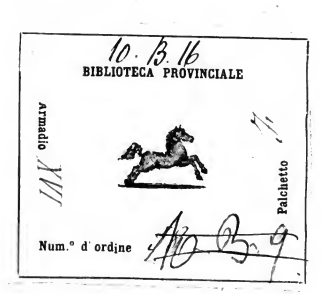


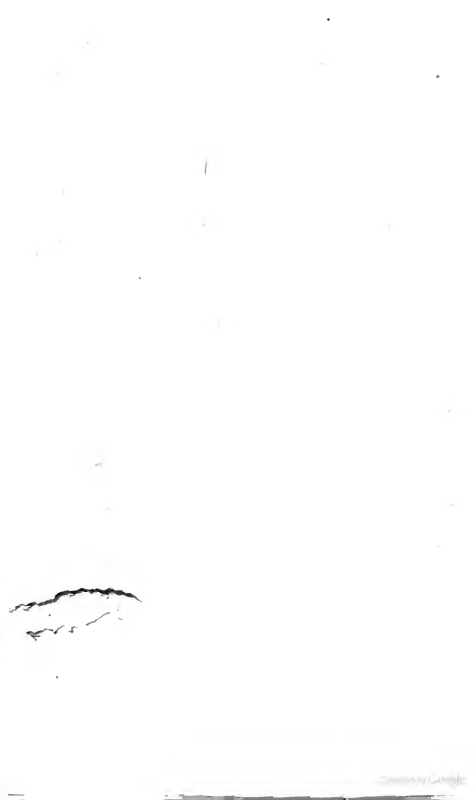




NAZIONALE
B. Prov.
I
1041
R BIBLIOTECA
VITT. EM. III
NAPOLI



B.I.
1
104.1



Digitized by Google

COURS

DE

GÉOMÉTRIE

ÉLÉMENTAIRE.

Digitized by Google

Tout exemplaire du présent ouvrage qui ne porterait pas, comme ci-dessous, la signature de l'Auteur et celle du Libraire, sera contrefait. Les mesures nécessaires seront prises pour atteindre, conformément à la loi, les fabricateurs de ces exemplaires.



PRÉFACE.

L'accueil fait à la seconde édition de cet ouvrage m'ayant imposé le devoir de le retoucher avec un soin nouveau, il en est résulté quelques modifications dont je vais rendre un compte succinct.

Le changement le plus notable est encore relatif à la classification et au placement des Problèmes, objet important pour faciliter l'étude et la rendre plus attrayante.

C'est dans cette vue que, dès la précédente édition, non content de rattacher à la *Géométrie plane* les Problèmes relatifs à cette première partie du Cours, j'avais indiqué dans la Table des matières, ceux que l'on pouvait résoudre à la suite de chaque théorie. Cette fois, j'ai fait plus : j'ai tout-à-fait réuni les Théorèmes et les Problèmes, en groupant ces derniers, suivant le cas, après chaque paragraphe ou après chaque chapitre. C'est encore afin d'amener le plus tôt possible la résolution des Problèmes, que j'ai joint la théorie des Contacts et des Intersections des cercles, à la théorie des Perpendiculaires qui suffit seule pour établir la première.

Les Préliminaires particuliers à chacun des quatre Livres avaient été jugés trop longs ; et par suite, malgré leur importance fondamentale, on les négligeait quelquefois. Pour remédier à ce défaut, je les ai disséminés, en les présentant, autant que possible, sous la forme de Théorèmes, forme plus saillante, et plus sûre pour obtenir l'attention des jeunes gens. Je n'ai conservé à peu près intacts, que l'Introduction générale et quelques courts Préliminaires relatifs à chacune des deux grandes divisions de la Géométrie : *sur un plan*, et *dans l'espace*.

L'extension que j'avais donnée à plusieurs théories, ayant porté le volume de l'édition précédente au-delà des limites entre lesquelles on est accoutumé à voir renfermer la *Géométrie élémentaire*, j'ai cru devoir supprimer dans celui-ci, le chapitre des Transversales et des Polaires, la plus grande partie des problèmes sur les Contacts, un chapitre où j'avais très brièvement exposé les principes de la théorie des Projections, et enfin, une portion des Problèmes Numériques, qui se trouvaient multipliés outre mesure. On pourra consulter, pour la théorie des Transversales et celle des Contacts, les ouvrages spéciaux, notamment ceux de Carnot, de MM. Brianchon, Poncelet, Gauthier de Tours, les *Annales de Mathématiques* de M. Gergonne, et enfin, les Traités de Géométrie de MM. Bergery et Didiez, dont le plan, moins restreint que le mien, admettait des développemens qui, pour moi, n'étaient pas sans inconvéniens.

Quant à la Géométrie Descriptive, ayant reconnu l'insuffisance du petit nombre de pages que je lui avais consacré, je me suis décidé à la passer entièrement sous silence, renvoyant, sur ce sujet, soit au Traité de mon savant professeur M. Hachette, soit à un Traité plus élémentaire et plus à la portée des élèves de nos colléges, celui de M. Lefébure de Fourcy. Au surplus, j'ai l'intention de réunir, dans un petit volume de Supplément, pour servir de sujet d'exercices aux élèves laborieux, les matières que j'ai supprimées, en leur donnant un peu plus de développement.

Outre ce moyen de réduire un volume dont la grosseur effrayait les élèves, j'ai employé un plus petit caractère typographique pour diverses portions de théories qui ne pouvaient être reproduites séparément, et qui, sans être exigées aux examens, ne contribuent pas moins puissamment à lier les différentes parties du Cours qu'à en mieux faire saisir l'ensemble.

Telles sont les principales modifications relatives au plan général de l'ouvrage; indiquons maintenant quelques changemens de détail.

Ayant cru remarquer que la méthode relative aux Proportions entre les Quantités Incommensurables, méthode aussi élégante que rigoureuse dont je suis redevable à M. Ampère et que j'ai développée dans l'Introduction, n'avait peut-être pas été exposée dans l'édition précédente, avec toute la simplicité dont elle est susceptible, j'en ai revu avec soin la rédaction; et, en la présentant d'une manière indépendante de la théorie des fractions continues (*voyez* le nº 66), je l'ai ainsi rendue plus élémentaire. De plus, pour ne laisser aucune obscurité sur ce point important, j'ai joint au premier procédé de démonstration, une autre méthode fondée sur une considération très simple de limites, méthode que j'ai empruntée aux préliminaires de l'excellent Traité de Géométrie descriptive de M. Lefébure de Fourcy [ouvrage cité plus haut], et qui offre toute la clarté et toute la rigueur désirables.

Au commencement du premier Livre, j'ai séparé en deux chapitres, la théorie des Perpendiculaires et des Obliques, et celle des Angles en général. Me bornant à peu près dans l'un de ces deux chapitres, à considérer des longueurs de lignes, j'ai donné dans le second, la théorie complète des angles, en indiquant sur-le-champ leur mesure par les arcs de cercle correspondans, sans attendre au deuxième Livre comme je l'avais fait précédemment. J'en ai recueilli l'avantage de pouvoir simplifier plusieurs démonstrations relatives aux Polygones Réguliers, et plus généralement aux Polygones Inscrits ou Circonscrits.

Si l'on croyait pouvoir m'objecter qu'en introduisant ainsi des proportions dans le premier Livre, j'ai dérogé à mon plan général, je répondrais que cette infraction apparente se trouve, à mon sens du moins, complètement justifiée par une considération particulière aux angles, savoir, que pour ces sortes de quantités, l'*étendue* n'est jamais distincte de *la figure*, ni la *similitude* séparée de l'*égalité*.

Ces divers changemens sont les seuls vraiment importans que j'aie fait subir au premier Livre, en y joignant toutefois quelques modifications apportées à la théorie des Parallèles pour en rendre l'exposition plus nette, mais toujours en prenant pour base, ce principe si simple et si rigoureux de BERTRAND *de Genève*, que *L'angle est plus grand que la bande*, principe accessible aux yeux non moins qu'à l'intelligence, et identique au fond, avec cet autre que personne ne conteste : *La longueur d'une circonférence de cercle est moindre qu'une ligne droite indéfinie*. [Voyez à la fin de l'ouvrage, *page* 515, une *addition* relative à cet objet.] — J'ai, en outre, terminé cette théorie par la mesure des Angles Excentriques, qui en dépend.

Au deuxième Livre, j'ai présenté dans une disposition plus lucide et plus tranchée, la théorie des Lignes Proportionnelles et des Figures Semblables, partie en me rapprochant de ma première édition, partie en suivant les indications qui m'ont été fournies par M. LAISNÉ, dont le *Programme* (*) et les bons avis m'ont été d'ailleurs fort utiles, non-seulement dans cette circoustance, mais dans beaucoup d'autres que je ne saurais mentionner avec détail, à moins d'énumérer presque toutes les théories.

Dans le troisième Livre, j'ai séparé, conformément à ce que j'avais fait dans le premier, la théorie des Plans Perpendiculaires, où je n'ai plus considéré que la *forme* et la *position*, de celle des Angles Dièdres proprement dits, que j'ai réunie, dans un même chapitre, à celle des Angles Trièdres et des autres Angles Polyèdres.

Je ne m'arrêterai pas à motiver cette assimilation des angles dièdres aux angles polyèdres : les premiers pourraient-ils être d'une autre nature que les derniers, lorsqu'on forme un angle dièdre avec deux angles trièdres, aussi incontestablement qu'un fuseau sphérique avec deux triangles?

J'ai eu peu de chose à changer au quatrième Livre, ayant déjà, lors de ma seconde édition, beaucoup amélioré cette portion de l'ouvrage, sur laquelle, j'aime à le rappeler, M. LAISNÉ m'avait communiqué plusieurs remarques fort judicieuses. Seulement, comme j'ai reconnu aux énoncés de certains Théorèmes d'Équivalence et de Mesure, l'inconvénient de se fixer moins aisément dans la mémoire sous leur forme absolue, que les énoncés *pratiques* correspondans [lesquels ne sont que des propositions relatives], je me suis décidé à donner simultanément les uns et les autres, en écrivant les derniers en caractère *italique*, et laissant aux autres le caractère romain (*voyez*, par exemple, le nº 572).

Je ne dois pas négliger de mentionner encore diverses améliorations que j'ai faites à la *Note* A, sur l'usage des instrumens; j'en suis redevable à mon ami M. GUENET, qui a bien voulu en outre, refaire presque tous les dessins de l'édition précédente, afin de les disposer dans un meilleur ordre.

(*) *Programme détaillé du Cours complet de Mathématiques élémentaires*, comprenant en outre la Cosmographie, etc. ; par A. M. LAISNÉ, professeur au Collége Rollin. Chez *Bachelier*.

Je me plais à déclarer aussi combien m'ont été utiles les nombreuses annotations qui m'ont été remises par M. de Maizières, mon ancien collègue, habile professeur, particulièrement versé dans la métaphysique des sciences, et par M. Delezenne, de Lille, auteur de plusieurs bons ouvrages sur les sciences mathématiques et physiques, qu'il professe avec beaucoup de distinction, ainsi que de divers mémoires qui mériteraient d'être plus répandus.

Enfin, ai-je besoin de parler de mes obligations sans nombre envers une personne dont les sages et paternels avis, qui ne me manquent jamais, n'ont pas été moins profitables à cette édition qu'à la précédente (*), et sont, sans aucun doute, la principale source du succès de cet ouvrage ?

Je termine par une observation. — Ce livre, destiné aux jeunes gens qui font une étude spéciale des Mathématiques, serait un peu étendu pour les élèves qui suivent le cours de Géométrie récemment établi en Troisième dans nos colléges ; et j'indique avec plaisir, comme spécialement approprié à cette partie de l'enseignement, le Traité publié par notre confrère M. Vernier (**), sauf quelques légères modifications que l'auteur se propose, je crois, d'y apporter. Toutefois, je manquerais certainement à remplir un devoir envers mes collègues, Messieurs les Professeurs de Mathématiques des divers colléges de Paris, si je ne les remerciais ici de l'analogie toute honorable pour moi, que présente, avec le plan général de mon ouvrage, le Programme de Géométrie qu'ils ont discuté et adopté pour ce cours préparatoire de Troisième, et que l'Université a ratifié avec de légères modifications.

(*) *Voyez* la Préface de la seconde édition.

(**) *Géométrie élémentaire à l'usage des classes d'humanités*, par M. Vernier. Paris, *Hachette*.

TABLE DES MATIÈRES

DU COURS DE GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

INTRODUCTION.

PREMIÈRE PARTIE.

GÉOMÉTRIE PLANE.

LIVRE PREMIER.

Des Figures considérées dans un Plan.

CHAPITRE PREMIER.

Des Perpendiculaires, des Obliques, et des Angles Droits.

CHAPITRE II.

Des Angles.

CHAPITRE III.

Des Parallèles.

CHAPITRE IV.

Du Triangle.

CHAPITRE V.

Du Quadrilatère.

CHAPITRE VI.

Des Polygones.

CHAPITRE VII.

Des Courbes.

* Paragraphes qui sont entièrement en petit caractère, et dont la lecture peut être omise.

LIVRE DEUXIÈME.

De l'Étendue considérée dans un Plan.

CHAPITRE PREMIER.

De la Similitude.

CHAPITRE II.

Problèmes sur les Lignes Proportionnelles et sur les Polygones Semblables.

CHAPITRE III.

CHAPITRE IV.

CHAPITRE V.

Problèmes sur les Aires.

SECONDE PARTIE.

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE.

LIVRE TROISIÈME.

Des Figures considérées dans l'Espace.

CHAPITRE PREMIER.

CHAPITRE II.

Du Parallélisme dans l'Espace.

CHAPITRE III.

Des Angles Dièdres, Trièdres, et Polyèdres.

CHAPITRE IV.

Des Prismes et du Cylindre.

CHAPITRE V.

Des Pyramides et du Cône.

CHAPITRE VI.

Des Polyèdres en général.

CHAPITRE VII.

De la Sphère.

LIVRE QUATRIÈME.

De l'Étendue considérée dans l'Espace.

CHAPITRE PREMIER.

CHAPITRE II.

Des Aires.

CHAPITRE III.

* NOTES.

*Note A. — *Des Instrumens.*

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

Signes empruntés à l'Algèbre, et autres Abréviations, qui sont employés dans ce Cours de Géométrie.

1° Lorsqu'on veut raisonner sur des quautités d'une nature quelconque, de manière à rendre le raisonnement indépendant de leurs valeurs particulières, il est commode de représenter ces quantités par des *lettres* : nous emploierons souvent ce genre de *Notation*.

2° Le signe = s'énonce *égale*, ou *égal à*, ou *est égal à*; il indique par conséquent *l'égalité de deux quantités*.

3° Le signe > s'énonce :

plus grand que. . . . . *supérieur à*. . .
ou. . . . . *est plus grand que*. . . . *est supérieur à*. . .
< . . . *plus petit*. . . . . *inférieur à*. . .

Ces deux signes d'*inégalité* se distingueront facilement l'un de l'autre, d'après cette observation, que l'*ouverture* est toujours tournée du côté de la plus grande des deux quantités que l'on compare, et la *pointe* du côté de la plus petite.

4° Le signe + s'énonce : *plus*. . . . ou *augmenté de*. . . ., et marque l'*addition*.

5° Le signe — s'énonce : *moins*. . . . ou *diminué de*. . . , et marque la *soustraction*.

6° Le signe × s'énonce : *multiplié par*.... ou *multipliant*....

La *multiplication* s'indique encore au moyen d'un point que l'on place entre les deux quantités à multiplier.

La simple juxta-position de deux quantités [ou plutôt des lettres ou signes quelconques qui les représentent] suffit même pour indiquer leur multiplication.

Ainsi, les trois expressions A × B, A.B, ou AB, signifient également : A *multiplié par* B.

Le *double*, le *triple*, le *quadruple*,... d'une quantité, de A par exemple, s'indique par le moyen d'un chiffre [ou d'un

groupe de chiffres] nommé *coefficient*, que l'on écrit à gauche de cette quantité. — Les expressions 2A, 3A, 4A,... signifient donc : A *multiplié par* 2, ou 2 *fois* A, ou *le double de* A ; A *multiplié par* 3, ou 3 *fois* A, ou *le triple de* A ; . . . etc.

7° Le signe : signifie *divisé par*. . . .

La *division* s'indique encore en plaçant verticalement le diviseur au-dessous du dividende, et séparant l'un de l'autre par un trait horizontal.

Ainsi... A : B, $\frac{A}{B}$, signifient également : A *divisé par* B.

8° Dans une proportion, le signe :, sans changer pour cela de signification, s'énonce : *est à*. . . : c'est-à-dire *se compose avec*. . ., *contient*. . ., ou *est contenu dans*. . . .

Il a pour corrélatif le signe :: que l'on énonce : *comme*...., et qui n'est autre chose qu'une sorte de signe d'égalité.

9° Le *carré* ou la *deuxième puissance*, le *cube* ou la *troisième puissance*,... d'une quantité, de A par exemple, s'indique par le moyen d'un petit chiffre nommé *exposant*, que l'on écrit au haut et à la droite de cette quantité, de la manière suivante : A^2, A^3. — Ces expressions s'énoncent : A *deux*, ou A *exposant deux*, ou A *deuxième puissance*, ou enfin A *quarré*; A *trois*, ou A *exposant trois*, ou A *troisième puissance*, ou A *cube*.

10° La *racine quarrée* ou *deuxième* d'une quantité A s'indique en plaçant cette quantité sous le signe $\sqrt{\ }$, de la manière suivante : $\sqrt{A}$. — De même, $\sqrt[3]{A}$ signifie et s'énonce : *racine cubique* ou *racine troisième de* A. — Le signe $\sqrt{\ }$ se nomme *un radical*.

11° Deux *parenthèses* ( ), ou deux *crochets* [ ], ou deux *accolades* { }, entre lesquels on enferme plusieurs quantités combinées entre elles par addition ou par soustraction, avertissent qu'il faut considérer toutes ces quantités comme réduites en une seule, avant d'effectuer les opérations indiquées par les signes qui précèdent ou suivent ces parenthèses.

Ainsi : $(A + B)C$ signifie que la *somme* des quantités A et B doit être *multipliée* par C;

$(A - B) : (C + D)$ signifie que l'*excès* de A sur B doit être *divisé* par la *somme* des quantités C et D ;

$(A - B + C)^2$ signifie que de A il faut *retrancher* B, puis au reste *ajouter* C, puis *élever* le résultat *au quarré ;*... etc.

12° Les renvois aux propositions déjà vues, seront aussi indiqués par des numéros placés entre deux parenthèses, ainsi que la désignation des figures auxquelles le texte se rapporte.

13° Il existe quelquefois dans les propositions, certaines phrases ou portions de phrases qu'à la rigueur on peut se contenter d'y sous-entendre, sans en altérer le sens, mais qui pourtant peuvent ajouter à la clarté : nous les renfermerons entre deux crochets.

14° Un plus petit caractère typographique sera employé pour indiquer certaines propositions, certains paragraphes, qui ne sont point exigés aux examens, et que l'on peut, sans inconvénient, omettre à une première lecture.

15°, Enfin, *C. Q. F. D.* signifie : *Ce qu'il fallait démontrer,*

n°	numéro,
Fig.	figure,
Ex.	exemple,
N. B.	*nota benè.*

ERRATA.

Pages.	Lignes.	Fautes.	Corrections.
77....	13 et 14....	à la fin du....	au
233....	14..........	> ou <.....	< ou >
324....	5	OC et OC'...	OP et OP'
bid. ..	16	P'O..........	PO'
328....	21..........	GCB...	GCI
344....	8..........	*Scol.* 3.	*Scolie.*
465....	7	*On*.........	*L'astronome* LALANDE.

COURS
DE
GÉOMÉTRIE
ÉLÉMENTAIRE.



INTRODUCTION.

Notions générales.

N° 1er. Tout Corps occupe, dans L'ESPACE *indéfini* qui embrasse l'univers matériel, un Lieu *déterminé* que l'on appelle proprement Un Espace.

Cet espace *fini*, rempli par le corps, a des *limites* ou *bornes* qui le *distinguent* du reste de l'espace indéfini : chacune d'elles prend le nom de Surface. — La surface étant ainsi le *lieu* où se fait la *séparation* entre un corps et le reste de l'espace, appartient également à l'un et à l'autre.

Comme il peut exister dans l'espace, une infinité de corps ayant chacun leurs limites propres, il en résulte que

Dans l'espace on peut concevoir une infinité de surfaces.

Lorsqu'une surface est *rencontrée* ou *coupée* par une autre surface, le lieu de leur *intersection* mutuelle se nomme une Ligne. — Cette ligne appartient à la fois aux deux surfaces.

Une ligne provenant donc, en général, de l'intersection de

deux surfaces, et une même surface pouvant être rencontrée par une infinité d'autres entièrement distinctes, il s'ensuit que

Sur une surface quelconque on peut concevoir une infinité de lignes.

Enfin, lorsque deux lignes viennent à se rencontrer, le lieu de leur intersection se nomme un Point. — Ce point est commun aux deux lignes.

Ainsi, un point résultant de la rencontre de deux lignes, et une même ligne pouvant être coupée par une infinité d'autres en autant de lieux différens, il s'ensuit que

Toute ligne peut être regardée comme ayant une infinité de points. — (*)

Quoique l'on acquière la notion du point par la considération des lignes, la notion de la ligne par la considération des surfaces, et la notion de la surface par la considération d'un *corps*, c'est-à-dire d'un objet *matériel*, on n'en doit pas conclure pour cela que les points, les lignes, et les surfaces, soient eux-mêmes des objets matériels. En vertu d'une faculté inhérente à notre intelligence, nous nous accoutumons facilement à considérer le point sans les lignes qui le déterminent ; la ligne, indépendamment des surfaces dont elle représente l'intersection ; la surface, séparée du corps ou de l'espace auquel elle sert de limite ; enfin l'espace lui même, comme étant absolument immatériel : et c'est le résultat de cette *abstraction*, que nous nommons *point*, *ligne*, *surface*, ou *espace*. — C'est encore ainsi que nous disons : les *points d'une ligne*, *d'une surface*, *d'un espace*; les *lignes d'une surface*; etc.

N° 2. L'espace, la surface, et la ligne, peuvent être envisagés sous deux points de vue distincts : ou sous le rapport de leurs diverses *formes* que l'on nomme généralement des Figures, ou sous le rapport de leurs *grandeurs* relatives que l'on comprend sous la dénomination commune d'Étendue.

L'étendue prend le nom particulier de Volume, d'Aire, ou

(*) Quelques auteurs, suivant une marche diamétralement opposée à celle que nous adoptons ici, partent de l'idée primitive du point qu'ils définissent par une négation : — Σημεῖόν ἐστιν οὗ μέρος οὐδέν : — *Le point est ce qui n'a pas de partie* — (Euclide, Livre I, *défin.* 1re) ; — et alors, ils considèrent la ligne comme étant *engendrée* par le *mouvement* du point; la surface, comme engendrée par le mouvement de la ligne ; et l'espace, par le mouvement de la surface.

de LONGUEUR, suivant que cette étendue est la grandeur d'un espace, d'uue surface, ou d'une ligne.

Ainsi la *longueur* d'une ligne, ou l'*étendue linéaire*, n'est autre chose que la grandeur de cette ligne, grandeur que l'on *évalue* ou que l'on *mesure* en la *rapportant* ou en la *comparant* à une *unité* de ligne. — De même, l'*aire* d'une surface, ou l'*étendue superficielle*, est la grandeur de cette surface, dont la *valeur numérique* s'exprime en unités de surface. — Enfin, le *volume* ou l'*étendue* d'un espace [ou d'un corps] est identiquement la même chose que la grandeur de cet espace; et on l'évalue en unités d'espace. — (*)

Quant aux figures, elles portent des noms très divers que nous ferons connaître par la suite.

La GÉOMÉTRIE est la science qui s'occupe de ces deux principaux objets : les PROPRIÉTÉS des différentes sortes de FIGURES, et la MESURE des *trois* espèces d'ÉTENDUE dont nous venons d'indiquer l'existence.

Dans le premier cas, pour donner, en quelque sorte, un *corps* aux figures, et les rendre susceptibles de tomber sous les *sens*, la Géométrie emprunte le secours de l'*Art du Dessin*; dans le second, pour exprimer la *composition* de chaque étendue, en unités de son espèce, elle a recours à la *Science du Calcul*.

N° 3. Deux figures peuvent avoir la même grandeur sans avoir nécessairement la même forme : dans ce cas, elles sont dites *équivalentes*.

(*) Dans plusieurs Traités de Géométrie, on emploie, pour désigner l'étendue des lignes, des surfaces, ou des corps, les dénominations d'étendue à *une dimension* [la *longueur*], d'étendue à *deux dimensions* [la *longueur* et la *largeur*], ou d'étendue à *trois dimensions* [la *longueur*, la *largeur*, et la *hauteur* que l'on nomme aussi *épaisseur* ou *profondeur*]. Mais nous avons cru devoir omettre ici ces dénominations, à cause de l'impossibilité d'en rendre raison, pour le moment, d'une manière rigoureuse.—(*Voyez*, au reste, la *note* précédente.)

L'étendue est encore dite *finie* lorsqu'elle correspond à une figure bornée de toutes parts ou complètement *définie*; — au contraire, l'étendue est dite *infinie* quand la figure qui lui appartient est *indéfinie*, ou n'est pas entièrement limitée. — Les expressions *infini* et *indéfini* s'emploient souvent l'une pour l'autre.

Deux étendues peuvent avoir la même forme sans avoir nécessairement la même grandeur : alors elles sont dites *semblables*.

Enfin, deux figures ou deux étendues peuvent être *superposables*, c'est-à-dire être telles qu'on puisse les placer l'une *sur* l'autre, ou l'une *dans* l'autre, de manière à les faire *coïncider* ou se confondre parfaitement ; elles sont alors tout-à-la-fois *équivalentes et semblables*, puisqu'elles ont en même temps la même grandeur et la même forme : on exprime cette double circonstance en disant que les deux figures ou les deux étendues sont *égales* (*).

Il faut observer toutefois, que les figures ne peuvent être considérées comme superposables, qu'autant que l'on fait abstraction de leur *matérialité* (numéro 1er) ou *impénétrabilité* [du moins lorsqu'elles ne sont pas de nature à être contenues sur une même surface]. Nous avertissons donc une fois pour toutes, que ce n'est point, à proprement parler, des corps eux-mêmes qu'il sera question dans ce Cours, mais des espaces qu'ils occupent ; et ces espaces seront toujours regardés comme pouvant se pénétrer mutuellement.

N° 4. *Le point n'a ni figure ni étendue ;*

Et c'est là surtout ce qui le distingue des autres objets de la Géométrie, qui sont tous *descriptibles* et *mesurables*. Néanmoins, comme on a souvent besoin de considérer un ou plusieurs points *isolés*, on convient de désigner chacun d'eux par une légère *marque* faite avec un *crayon*, une *plume*, ou tout autre *instrument* taillé en *pointe*, et propre à laisser une *empreinte* sur une surface donnée. Mais cette marque est censée n'affecter aucune forme déterminée ; et son étendue doit toujours être considérée comme rigoureusement *nulle* (**).

(*) *N. B.* — Le signe =, bien que s'énonçant : *égale* (voyez, au commencement de l'ouvrage, le tableau des *Signes et abréviations*), ne se rapporte, quand on l'applique aux figures, qu'à leur équivalence, et nullement à leur égalité absolue. Cependant son emploi ne peut induire en erreur, d'abord parce que l'équivalence de deux figures n'est autre chose que l'égalité des deux nombres qui servent de mesure à leur commune étendue (n° 2), et ensuite parce qu'*On ne se sert jamais du signe = pour désigner l'égalité géométrique* proprement dite, c'est-à-dire pour exprimer que deux figures sont superposables.

(**) *Voyez* la *note* de la *page* 2, ainsi que le *numéro* 2.

D'ailleurs, pour distinguer les uns des autres les différens points de l'espace, on place *à côté* de chacun d'eux, ou à côté de la marque qui le représente aux yeux, une lettre qui sert à l'*énoncer* dans le discours ; c'est ainsi qu'on dit : *le point* A, *le point* B, *le point* C.... (figure 1re). — Lorsqu'il Fig. 1re. existe entre plusieurs points, une *analogie* quelconque, on les désigne par les mêmes lettres, en ayant soin de distinguer ces lettres les unes des autres par des caractères d'écriture différens, ou bien par un ou par plusieurs accens que l'on place au haut et à la droite de chacune d'elles, de la manière suivante : A′, A″, A‴... ; ce qui s'énonce ainsi : A *prime*, A *seconde*, A *tierce*...

[Au surplus, quand, au lieu de désigner un point, quelque lettre de l'alphabet sera employée à représenter la valeur numérique d'une ligne (n° 2 — *voyez* aussi le tableau des *Signes et abréviations*), ou de toute autre quantité rapportée à une unité, nous aurons soin de faire en sorte que le sens du discours l'indique toujours d'une manière non équivoque.]

De la Ligne Droite.

N° 5. De toutes les lignes dont on s'occupe en Géométrie, la plus simple est la ligne appelée *droite*. — Pour en donner une idée, concevons qu'un point isolé de l'espace (n° 4) [*matérialisé* par la pensée] *se meuve* vers un autre point séparé du premier par un intervalle quelconque, en suivant, pour franchir cet intervalle, le plus court de tous les chemins, en nombre *infini*, qui peuvent mener de la position primitive du premier point à la position du second. La route ainsi parcourue par le point supposé mobile, sera ce que l'on nomme une *ligne droite*, ou simplement, une Droite (*), dont on se borne ordinairement

---

(*) Ἀρχιμήδης τὴν εὐθεῖαν ὡρίσατο γραμμὴν, ἐλαχίστην τῶν τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχουσῶν : — Archimède *définit la ligne droite en disant que c'est la plus courte de toutes celles qui ont les mêmes extrémités* — (Proclus, Commentaire sur le premier livre d'Euclide, Livre II).

à dire, d'après ARCHIMÈDE, que c'est LE PLUS COURT CHEMIN *d'un point à un autre*. — Mais cette notion deviendra plus claire et plus générale, si nous disons, d'une manière moins concise, que la ligne *droite* est une *ligne indéfinie*, LMNO.... (fig. 2), que nous nous représentons comme ayant la propriété d'être exclusivement celle *qu'il faut suivre pour franchir par le plus court chemin, l'intervalle qui sépare deux quelconques de ses points*, L et M, L et N, L et O, M et O, N et O, ... pris partout où l'on voudra sur son étendue illimitée. — (*)

Fig. 2.

Toute ligne droite, MN, doit donc être, par la pensée, prolongée indéfiniment dans *les deux sens*, MNO...., NML...., à moins qu'en vertu de circonstances particulières, cette ligne ne se trouve limitée, soit dans les deux sens, soit dans un seul. — Lorsqu'une droite sera terminée en deux points, M, N, nous dirons qu'elle est *déterminée de longueur* et que MN en est un *segment*; et quant aux portions ou *moitiés* de droite INO..., IML..., limitées dans un sens en un point I et illimitées dans l'autre, nous les nommerons des *segmens indéfinis* de droite.

N° 6. On appelle *ligne polygonale*, ou LIGNE BRISÉE, toute *ligne*, ABCDEF (fig. 3), *composée de segmens consécutifs de droites*, AB, BC, CD, DE, EF, *ayant, deux à deux, une extrémité commune*. — Ces segmens de droites, que l'on suppose limités aux points de rencontre, B, C, D, E, se nomment les *côtés* de la figure.

Fig. 3.

(*) Telle est, par exemple, la forme qu'affecte naturellement un fil abandonné à lui-même, lorsque l'une de ses extrémités a été préalablement fixée, et qu'à l'autre est attaché un corps pesant.

Telle est encore la ligne que suit le plus ordinairement la lumière, pour venir du corps lumineux à notre œil; et c'est ainsi que, suivant PLATON, *La ligne droite est celle dont les extrémités sont cachées par les points intermédiaires*: — Πλάτων ἀφορίζεται τὴν εὐθεῖαν γραμμὴν, ἧς τὰ μέσα τοῖς ἄκροις ἐπιπροσθεῖ — (PROCLUS, à l'endroit cité).

On peut encore se figurer la *ligne droite* comme *la seule susceptible de tourner sur elle-même sans changer de position dans l'espace*.

On nomme en général *ligne courbe*, ou simplement, COURBE, toute *ligne dont aucune portion* appréciable aux sens, *n'est rigoureusement droite.*

Enfin, on désigne par l'expression de *ligne mixte*, toute ligne qui est en partie droite et en partie courbe.

N° 7. *Toutes les lignes droites sont*, par leur nature, *égales* [ou superposables (n° 3)];

Et pour que la superposition de deux droites ait parfaitement lieu, *il suffit que deux points de l'une coïncident avec deux points de l'autre.*

Cette propriété, qui *caractérise* essentiellement la ligne droite, peut être considérée comme évidente, et doit par conséquent être admise *à priori.*

Cependant, il est facile d'en rendre raison complètement, et de manière à ne rien laisser à désirer.

En effet, soient deux droites indéfinies, AB, CD (fig. 4).—*Matérialisons*, par la pensée, la seconde droite CD, et *portons*-la sur la première AB, de façon qu'un point quelconque C de CD se trouve sur un point A de AB; puis faisons *tourner* la droite CD autour du point commun, jusqu'à ce qu'un second point D, pris à volonté sur CD, tombe en un point B de AB. Il est certain que les deux droites se confondront dans tout l'intervalle compris entre A et B : car, bien évidemment, Fig. 4.

Il ne saurait y avoir qu'un seul plus court chemin d'un point à un autre ;

Et ainsi les deux segmens de droite, AB, CD, seront égaux (n° 3). — Mais maintenant, les points C et D étant quelconques, il s'ensuit nécessairement que leur distance, ou l'étendue linéaire comprise entre eux, peut être prise aussi grande que l'on voudra; et que par conséquent, ce ne sont pas seulement des portions limitées des deux droites, que l'on peut faire coïncider, mais des portions *aussi grandes que l'on voudra*, et par conséquent les droites elles-mêmes considérées dans toute leur étendue indéfinie.

Ainsi, généralement : — *Deux droites coïncident dans toute leur étendue indéfinie, lorsqu'elles ont* été amenées à passer par *deux points communs.*

N° 8. En d'autres termes :

Par deux points donnés on ne peut mener qu'une seule droite;

Et comme d'ailleurs on en peut toujours mener une, il s'ensuit que

Deux points déterminent complètement la position d'une droite.

Voilà pourquoi il est d'usage de désigner une droite par
Fig. 2. *deux* lettres, M, N (fig. 2), placées *à côté* de cette ligne. *Une seule* lettre suffit pourtant quelquefois, surtout quand la droite est regardée comme déterminée de longueur (n° 5) : cette lettre unique représente alors, le plus ordinairement, la *valeur numérique* de la droite, supposée rapportée à une *unité linéaire* (n° 2).

La propriété d'être complètement déterminée par *deux* points, appartenant exclusivement à la ligne droite, il s'ensuit que, le plus ordinairement, on est obligé d'employer au moins *trois* points ou *trois* lettres pour désigner toute ligne différente d'une ligne droite. Néanmoins, *deux* lettres, ou même *une* seule, suffisent quelquefois.

On se sert souvent du mot *direction* pour désigner la *position* d'une ligne droite, MN (fig. 2), supposée *indéfinie dans les deux sens*, MNO..., NML...; et il est clair (n° 7) que *la direction est unique* pour chaque droite en particulier; ou bien, qu'un segment de droite, MN, ne peut avoir que *deux prolongemens* différens, l'un dans un sens, MNO..., et l'autre dans le sens *opposé*, NML....

Il résulte encore de ce qui précède, que

Deux droites distinctes ne peuvent avoir qu'un seul point commun ;

Et alors, chacune d'elles partage l'autre en deux *segmens indéfinis* (n° 5) situés respectivement de part et d'autre de la première. — Dans ce cas, les deux droites sont dites *concourantes;* et le point où elles se coupent se nomme leur *point de concours*, *de rencontre*, ou *d'intersection*.

Enfin si, sur une droite, MN (fig. 2), déterminée de longueur, on marque un point I tel que les deux portions MI, IN, soient égales (n° 3), ce point [qui est unique] est dit le *milieu de la droite.*

De la Surface Plane. — Division générale de la Géométrie.

N° 9. La plus simple de toutes les surfaces est la *surface plane*, ou simplement, le PLAN. — On nomme ainsi une *surface indéfinie sur laquelle* on conçoit que, *par chacun de ses points, une ligne droite peut être appliquée exactement suivant toute son étendue indéfinie, et dans une infinité de positions différentes.* — (*)

Il résulte de cette définition, que

Dans un plan, par chacun de ses points, on peut mener une infinité de droites.

Il suit encore de là et de la nature de la ligne droite, que

Toute droite qui a deux de ses points dans un plan, y est contenue tout entière :

Car ces deux points *déterminent* une des directions (n° 8) suivant lesquelles la droite peut être placée sur la surface.

Par conséquent : — *Une droite ne saurait être en partie sur un plan et en partie au dehors de ce plan.*

Les surfaces planes, ainsi que les lignes droites (n° 5), sont toujours supposées complètement indéfinies, à moins que des conditions particulières n'en restreignent l'étendue naturellement illimitée.

N° 10. On nomme SURFACE POLYÉDRALE, ou *surface brisée*, [par analogie avec les expressions de *ligne polygonale* et de *ligne brisée* (n° 6)], toute *surface composée de portions de plans consécutifs qui se rencontrent ou se coupent deux à deux.*

On appelle SURFACE COURBE, toute *surface dont aucune portion* appréciable *n'est rigoureusement plane.*

(*) Telle est la forme qu'affecte *sensiblement* la surface d'un liquide en repos, considérée dans une petite étendue. — Une glace bien polie, une feuille de papier bien tendue, nous offrent encore l'idée de surfaces planes, puisqu'une droite matérielle [comme le bord d'une règle bien dressée] peut toujours s'appliquer sur ces surfaces en passant par *deux* quelconques de leurs points.

Enfin, nous nommerons *surface mixte*, toute surface qui est en partie plane et en partie courbe.

N° 11. De même qu'une *droite* est déterminée de position (n° 8) par *deux* points, de même

La position d'un plan se trouve complètement déterminée par trois points,

Pourvu toutefois que ces *trois* points *ne* soient *pas situés sur une même ligne droite ;*

C'est-à-dire — 1° qu'*On peut toujours faire passer un plan par trois points non situés en ligne droite;*

Et — 2° que *Deux plans qui ont trois points communs non situés en ligne droite, coïncident dans toute leur étendue.*

Cette propriété du plan joue par rapport à la surface plane, le même rôle que la propriété du *numéro* 8 par rapport à la ligne droite ; on doit, par conséquent, l'admettre également comme évidente.

Au reste, elle peut être mise hors de doute par le raisonnement suivant.

Fig. 5. Considérons d'abord *trois* points, A, B, C (fig 5), situés arbitrairement dans l'espace ; et concevons qu'un plan quelconque [*matérialisé* par la pensée] soit disposé de manière à passer par les deux points A, B : la droite AB y sera contenue tout entière (n° 9). Cela posé, faisons tourner ce plan autour de AB comme autour d'une *charnière*, jusqu'à ce qu'il vienne passer par le troisième point C. Il est clair que le plan est alors *fixé* de position dans l'espace, en ce sens qu'il ne peut plus continuer sa *révolution* autour de AB sans que le point C cesse de s'y trouver compris. Le plan que l'on considère est ainsi *assujetti* à passer par les trois points A, B, C.

Je dis de plus que tout autre plan passant par les *trois* mêmes points, se confond nécessairement avec le premier dans toute son étendue indéfinie.

En effet, les points A, B, C, appartenant tous *trois* aux deux plans, il s'ensuit d'abord (n° 9) que les *droites de jonction*, AB, AC, BC, de ces points pris deux à deux, se trouvent à la fois contenues tout entières dans chacun des deux plans.

Soit maintenant un *quatrième* point *quelconque* K, pris sur l'un des deux

plans partout où l'on voudra [pourvu toutefois qu'il n'appartienne pas aux droites de jonction]. Il est impossible que le point K ne se trouve pas en même temps sur l'autre plan : car on peut évidemment toujours, par ce point [et même d'une infinité de manières différentes], mener dans le premier plan une droite MN qui coupe deux des trois droites de jonction respectivement en M, N. Les deux points M, N, appartenant ainsi au second plan, la droite MN y est contenue tout entière ; donc le point K est sur le second plan : c'est-à-dire que *tout* point pris sur le premier plan est aussi sur le second. Fig. 5.

Donc enfin, les deux surfaces coïncident entièrement.

Il résulte de là, que l'on peut désigner un plan par *trois* de ses points, A, B, C, non situés en ligne droite. Cependant il suffit quelquefois d'en considérer *deux*, ou même *un* seul.

N° 12. *Deux droites*, AB, CD (fig. 6), *qui se rencontrent*, en un point O, *déterminent* également *un plan :* Fig. 6.

Car si l'on fait passer un plan par leur point commun O et par deux autres points quelconques, A, C, pris respectivement sur chacune d'elles, ce plan contiendra les deux droites (n° 9); et de plus, il sera le seul dans ce cas (n° 11) : on le nomme, pour cette raison, *le plan des deux droites*.

Il est bon de remarquer d'ailleurs que dans la supposition précédente, les deux droites *se coupent, se traversent*, ou *se croisent* à leur point de rencontre, et qu'elles partagent ainsi l'étendue de leur plan en *quatre* portions indéfinies, AOC, COB, BOD, DOA, que l'on nomme des *angles*.

La *figure* 7 représente un angle isolé AOB [ou plutôt le *commencement* de cet angle]; — le point O se nomme le *sommet ;* et l'on appelle *côtés* de l'angle les segmens indéfinis de droite, OA, OB, entre lesquels il est compris. Fig. 7.

N° 13. De ce qui précède il résulte encore, que

Toutes les surfaces planes, considérées dans leur étendue indéfinie (n° 9), *sont égales* entre elles (n° 3).

De plus, non-seulement deux plans distincts sont superposables, comme on vient de le voir; mais on peut encore faire coïncider les *deux faces d'un plan*, le *dessus* avec le *dessous*. En effet, toute droite AB (fig. 8) tracée dans ce plan, le partagera en deux *portions* telles que, si l'on fait tourner Fig. 8.

Fig. 8. cette surface autour de la droite comme autour d'un *essieu*, les points de chacune des deux portions [soit pour exemple le point M] viendront tous en même temps occuper des *lieux* [le lieu N par exemple] appartenant à la position primitive de l'autre portion.

D'où l'on déduit les conséquences suivantes :

1° *Toute surface plane partage l'espace* indéfini (n° 1) *en deux moitiés superposables* — [dont, pour les distinguer, nous nommerons chacune une *région de l'espace*] ;

Et de même : — 2° *Une droite quelconque partage tout plan* qui la contient *en deux moitiés superposables* — [que nous nommerons *régions du plan*, et] que l'on peut faire coïncider, soit en faisant tourner le plan autour de la droite comme autour d'une *charnière*, soit en *pliant* le plan suivant la droite.

N° 14. Enfin, on peut conclure de ce qui a été dit au *numéro* 11, que

Par deux points donnés, ou *Par une droite donnée*, *on peut imaginer une infinité de plans :*

Car un plan passant par une droite donnée peut prendre autour de cette droite une infinité de positions différentes.

Au contraire, si l'on prend *quatre* points au hasard dans l'espace, le plan déterminé par trois d'entre eux ne passera pas ordinairement par le quatrième ; et de là il résulte qu'en général, une figure n'a pas tous ses points situés dans un même plan.

Cela posé, on donne le nom de *figure plane* à une figure dont tous les points sont dans un même plan.

Une *ligne droite* est donc essentiellement *plane*.

Toute ligne brisée qui n'est pas plane est dite une *ligne gauche*.

Toute ligne courbe qui n'est pas plane est dite une *courbe à double courbure* : — [cette dénomination est tirée de ce qu'une ligne en général, étant le lieu de l'intersection de deux surfaces (n° 1), ne peut avoir tous ses points situés dans un même plan, que dans certains cas particuliers, hors lesquels la ligne participe de ce qu'on appelle la *courbure* de chacune des deux *surfaces* (n° 10).]

Et par opposition, on qualifie quelquefois les courbes planes, de *courbes à simple courbure*.

N° 15. Les figures planes étant celles que l'esprit se représente le plus facilement, et les propriétés de toutes les autres figures se ramenant d'ailleurs constamment aux propriétés des figures planes, c'est par ces dernières que commence ordinairement l'étude de la GÉOMÉTRIE : et de là résulte une *division* naturelle de cette science en DEUX PARTIES.

La *première* partie, uniquement bornée aux propriétés des figures planes (n° 14), ainsi qu'à la mesure des *deux* sortes d'étendues qu'elles présentent (n° 2), est appelée GÉOMÉTRIE PLANE.

La *seconde*, qui comprend les propriétés des figures dont les divers élémens ne sont pas dans un même plan, ainsi que la mesure de leurs étendues, a reçu le nom de GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE.

Chacune de ces *deux parties principales* se subdivise ensuite en deux autres, suivant que l'on étudie les *figures en elles-mêmes*, ou qu'on les considère plus spécialement sous le point de vue des *relations métriques* ou des *rapports numériques* auxquels peuvent donner lieu les portions de lignes, de surfaces, ou d'espace, qui entrent dans leur composition.

Du Cercle.

N° 16. Celle des lignes courbes que l'on peut considérer comme la plus simple, est la LIGNE CIRCULAIRE, ou la CIRCONFÉRENCE DE CERCLE, ou simplement encore, la CIRCONFÉRENCE. — On nomme ainsi une *ligne plane*, ABC (fig. 9), *fermée* [ou Fig. 9.
rentrante sur elle-même], *dont tous les points sont à égale distance d'un point intérieur* O que l'on appelle le CENTRE de la circonférence.

Le CERCLE est la *portion de plan limitée par la circonférence;* mais ce nom se donne souvent aussi, pour abréger, à *la circonférence elle-même*.

Fig. 9. N° 17. Chaque *droite*, OA, OB, OC (fig. 9), *menée du centre* à la circonférence, et ainsi déterminée de longueur (n° 5), est dite un Rayon du cercle.

D'après cette définition et celle du cercle,

Tous les rayons d'un même cercle, mesurant les distances du centre aux divers points de la circonférence, *sont égaux* ;

Et la circonférence est dite le Lieu Géométrique des points qui sont situés à une distance de son centre égale à son rayon, et *dans un même plan*. — (*)

Un cercle, ou une circonférence, se désigne par *trois* points, A, B, C, de cette circonférence, ou par *un* rayon OA [la lettre du centre étant énoncée la première], ou bien encore simplement, par la lettre O du centre.

Deux circonférences décrites de points différens, comme centres, mais *avec le même rayon, sont égales* :

Car si l'on *transporte* le second cercle sur le premier de manière que leurs centres *coïncident*, les deux circonférences *se confondront* nécessairement dans toute leur étendue, puisque les rayons de l'une sont égaux aux rayons de l'autre.

N° 18. On appelle Diamètre d'un cercle, toute *droite* AD (fig. 9) qui aboutit à deux points de la circonférence en *passant par le centre*.

Tous les diamètres d'un même cercle sont égaux :

Car chacun se compose évidemment de l'ensemble de deux rayons opposés.

De plus : — *Tout diamètre*, AD, *divise le cercle*, ABC, *et sa circonférence, en deux parties égales*. — (**)

(*) Un cercle OA peut être considéré comme *engendré* par le mouvement d'un rayon qui *tournerait* de manière à conserver une extrémité *fixe* au point O qui est le centre, tandis que l'autre extrémité A, supposée *mobile*, parcourrait, ou engendrerait, ou *décrirait* la circonférence. — (*Voyez* la *note* de la *page* 2.)

(**) *N. B.*—Nous prévenons une fois pour toutes, que les *énoncés* tels que celui-ci doivent toujours être lus deux fois de suite : la première fois sans les *lettres* qui appartiennent à la *légende* des figures, et la seconde fois

En effet, plions la figure suivant AD, ou faisons tourner la partie ABD autour de AD comme *charnière* (n° 13), de façon que cette partie vienne *s'appliquer* sur l'autre partie ACD. Il est évident que la première des deux portions de cercle, ABD, *recouvrira* parfaitement la seconde, ACD : car si l'une des deux portions pouvait *déborder* l'autre, tous les points de la circonférence ne seraient pas également distans du centre, ce qui implique contradiction avec la définition du cercle (n° 16). Fig. 9.

Ainsi le diamètre AD [ou tout autre] divise le cercle en deux *demi-cercles*, et la circonférence en deux *demi-circonférences*.

N° 19. Une *portion* quelconque, ACB ou ADB (fig. 10), *de circonférence* [ainsi terminée aux deux points, A, B], se nomme un Arc de cercle. Fig. 10.

L'arc prend le nom de *quadrant* quand il est le quart de la circonférence.

Quand deux arcs peuvent se placer de manière à avoir le même centre et les mêmes extrémités, ils appartiennent nécessairement à des circonférences égales (n° 17) ; — et alors, ou ils sont égaux, ou ils forment ensemble une circonférence entière.

La *portion de droite*, AB, *comprise entre deux points*, A, B, *de la circonférence*, est dite la Corde, ou la *sous-tendante*, de l'arc ACB, ou de l'arc ADB. — Chaque corde *sous-tend* ainsi deux arcs qni forment ensemble une circonférence entière.

Il résulte de là, que

L'arc détermine la corde ;

Mais *non réciproquement*, puisqu'un arc n'a qu'une seule

---

avec ces mêmes lettres : c'est de la première manière qu'*Il faut les retenir de mémoire*.

Ainsi, l'énoncé ci-dessus doit être développé comme il suit :

« *Tout diamètre divise le cercle et sa circonférence en deux parties* » *égales* ; — Soit, par exemple, un cercle ABC, et AD l'un de ses diamè- » tres : je dis que les deux parties, AODB, AODC, du cercle, sont égales, » ainsi que les deux parties, ABD, ACD, de sa circonférence. — En » effet, etc. »

Fig. 10. corde, tandis qu'une même corde AB appartient toujours à *deux* arcs distincts, ACB, ADB (fig. 10), de la même circonférence [et peut même sous-tendre *une infinité* d'arcs, décrits
Fig. 11. de centres et de rayons différens (fig. 11)].

Quand la corde passe par le centre, elle devient un diamètre; et les deux arcs sous-tendus sont des demi-circonférences (nº 18).

D'après la propriété dont jouissent tous les diamètres, de partager le cercle en deux moitiés superposables (nº 18),
Fig. 10. il existe nécessairement, sur tout arc ACB (fig. 10), un point C tel que, si l'on tire le diamètre COD et qu'on applique la demi-circonférence CBD sur la demi-circonférence CAD, le point B doive tomber en A : les deux arcs AC, BC, sont alors égaux entre eux (nº 3); et le point C se nomme le *milieu de l'arc* ACB. — Par une raison semblable, les deux arcs AD, BD, étant égaux entre eux, le point D est le milieu de l'arc ADB. — Et de même, le point I où le diamètre COD rencontre la corde AB, est le *milieu de la corde* AB (nº 8).

Chacune des portions IC, ID, du diamètre CD, comprises respectivement entre les milieux C et D des deux arcs ACB et ADB, et le milieu I de leur corde commune AB, se nomme la *flèche* de l'arc correspondant.

Nº 20. *Le diamètre est la plus grande corde du cercle.*

Fig. 12. Soit, par exemple, une corde quelconque AB (fig. 12) qui ne passe pas par le centre O : je dis qu'elle est moindre que le diamètre AOC.

En effet, menons le rayon OB : nous aurons (nº 5)

$$AB < AO + OB,$$

ou (nº 17) $\quad AB < AO + OC,$

ou bien enfin $\quad AB < AC,$

comme nous l'avons énoncé.

Remarquons en outre, que, d'après la propriété caractéristique de la ligne droite (nº 5),

Fig 13. *La somme des cordes de deux arcs*, AC, BC (fig. 13), *est plus grande que la corde*, AB, *de la somme*, ACB, *de ces arcs.*

D'où il résulte que

Le double de la corde d'un arc, AC ou BC (fig. 10), *est plus grand que la corde*, AB, *d'un arc*, ACB, *double du premier*. Fig. 10.

N° 21. Lorsqu'une *corde* est *prolongée* indéfiniment dans les deux sens, elle prend le nom de SÉCANTE.

Soit AB (fig. 14) une sécante au cercle, coupant la circonférence aux deux points A, B; et supposons que l'on fasse *tourner* cette droite autour du point A, dans le plan du cercle, de manière que le second point d'intersection B se trouve successivement en B′, B″, B‴.... Ce second point d'intersection se rapprochant de plus en plus du premier, finira par *se confondre* avec lui : et alors la droite aura la position ST. Après avoir atteint cette position *limite*, si la droite continue à tourner de la même manière, le point d'intersection mobile passera au-delà du point fixe A et prendra les positions successives *b*, *b′*, *b″*... etc., en s'éloignant d'abord du point A pour repasser ensuite par ses positions antérieures. Fig. 14.

Cela posé, on nomme TANGENTE au cercle une *sécante* ST *dont deux points d'intersection avec le cercle sont réunis en un seul*; c'est pourquoi on la définit ordinairement en disant que c'est une *droite qui n'a qu'un point commun avec le cercle*. Cette *propriété* pouvant en effet servir à caractériser la tangente au cercle, nous l'adopterons pour le moment comme définition, sauf à revenir par la suite sur cet objet.

Lorsqu'une droite ST *touche* ainsi le cercle, ou est *tangente au cercle*, en un point A, alors, par réciprocité, le *cercle* est dit *tangent à la droite*; et le point A se nomme le *point de tangence* ou *de contact*.

On dit encore que *deux cercles*, AC, BC (fig. 15), sont *sécans*, lorsque leurs circonférences ont *deux* points communs, ou se coupent en deux points, C, C′. Fig. 15.

Et de même, deux *cercles* sont dits *tangens* l'un à l'autre, lorsque leurs circonférences ont *un* seul point commun : tels sont les cercles AM, BM, CM (fig. 16), lesquels, pris deux à deux, se touchent au point M. Fig. 16.

Fig. 10. N° 22. On nomme SEGMENT *de cercle*, une *portion de cercle comprise entre un arc*, ACB ou ADB (fig. 10), *et sa corde* AB. — La corde est la *base* du segment. — La même base, AB, appartient toujours à deux segmens dont l'ensemble forme un cercle entier (*voyez* le n° 20) ; et lorsque la base est un diamètre, les deux segmens correspondans sont des demi-cercles.

Enfin, l'on nomme SECTEUR, une *portion de cercle comprise entre un arc*, ACB ou ADB, *et les deux rayons*, OA, OB, *qui aboutissent à ses extrémités*. — Ces rayons sont les *côtés* du secteur ; et l'arc en est la *base*.

Cette base peut être moindre qu'une demi-circonférence, comme dans le secteur OACB; elle peut être plus grande, comme dans le secteur OADB ; enfin elle peut être égale à la demi-circonférence elle-même, ce qui arrivera si les deux rayons que nous avons nommés les *côtés* du secteur, sont les deux moitiés d'un même diamètre ; et alors le secteur sera lui-même un demi-cercle : tels sont les secteurs OCAD et OCBD.

De la Règle, du Compas, etc.

N° 23. Pour *tracer* ou pour *décrire* une droite [ou plutôt un *segment* (n° 5) de droite], on se sert d'un *instrument* que l'on nomme une RÈGLE, et qui n'est autre chose qu'une
Fig. 17. *barre*, AB (fig. 17), de bois ou de métal, dont les bords saillans sont supposés *rectilignes*.

Quand on veut exécuter le *tracé* de la droite, on place la règle dans une position fixe, de manière que l'un de ses bords passe par deux points donnés, A, B, que la droite doit *contenir ;* et l'on fait glisser le long de ce bord, un crayon, une plume, etc. (n° 4). — C'est là ce qu'on appelle

Mener une droite par deux points donnés, A, B.

(*Voyez*, à la fin du volume, la *Note* A, à l'*article* de la *Règle* et du *Compas*.)

N° 24. Souvent, au lieu de règle, on emploie un *cordeau* tendu, surtout lorsque la ligne à tracer doit avoir une certaine longueur ; mais il faut observer que ce moyen n'est exact que dans quelques cas particuliers, par

exemple quand la surface sur laquelle on opère est plane et *horizontale*, ou bien encore, quand la droite à tracer doit être *verticale*; sans quoi le *poids* du cordeau lui fait prendre une *courbure* (nº 6) que l'on ne saurait détruire complètement, quelque effort que l'on fasse pour le tendre.

Nº 25. Enfin quelquefois, opérant sur une grande étendue de *terrain*, et n'ayant pas à tracer effectivement une droite, on n'a besoin que de connaître des points de cette surface, supposée plane, qui soient situés dans une même *direction* (nº 8) ou sur un même *alignement*. Dans ce cas, on se sert de *piquets* longs et minces nommés *jalons*, A, B, C, D... (fig. 18), Fig. 18. que l'on plante *verticalement* de distance en distance : les pieds de ces jalons seront tous sur une même ligne droite MN, si, en dirigeant un rayon visuel dans le plan de deux jalons quelconques, A, D, on reconnaît que ce plan contient tous les autres jalons, ou si, suivant l'expression usitée, tout rayon visuel qui *affleure* deux jalons quelconques, affleure en même temps tous les autres.

Nº 26. L'instrument dont on se sert ordinairement pour décrire une circonférence ou un arc de cercle, se nomme un **Compas**. Il se compose de deux *branches*, AC, BC (fig. 19), Fig. 19. généralement égales, terminées en *pointe* à l'une de leurs extrémités, A, B, et réunies à l'autre extrémité C que l'on appelle la *tête* du compas, par une articulation qui permet aux branches de *s'ouvrir*, ou de *s'écarter* plus ou moins l'une de l'autre. L'une des pointes, A, sert à *marquer* le centre [ou du moins, est destinée à s'y placer], tandis que l'autre, B, doit être *armée* convenablement (nº 4) pour pouvoir *tracer* une ligne.

Lorsqu'on veut, au moyen du compas, décrire sur un plan, une circonférence dont le centre soit situé en un point donné, A, du plan, et dont le rayon ait une longueur déterminée, AB, on commence par disposer l'instrument de manière que son *ouverture*, c'est-à-dire la distance rectiligne de ses deux pointes, soit égale à la longueur donnée; ensuite, on fixe la pointe A au point donné, et l'on fait glisser la pointe B sur le plan donné : cette dernière pointe, en tournant autour du point A, trace la circonférence demandée. — C'est ce qu'on appelle

Décrire une circonférence d'un point donné, A, comme centre, et d'un rayon égal à une droite donnée, AB.

(*Voyez* la *Note* A.)

N° 27. Le moyen que nous venons d'indiquer pour décrire la circonférence, n'est praticable que lorsque le cercle doit être de petite dimension. Dans le cas contraire [pourvu toutefois que le plan sur lequel on opère soit
Fig. 20. horizontal], on prend un *cordeau* (n° 24), d'une longueur AB (fig 20) égale au rayon; on attache un *piquet* (n° 25) à chacune de ses extrémités; on fixe l'un de ces piquets au point A que l'on a pris pour centre; enfin, avec le second piquet B, on trace dans le plan donné une ligne qui [en supposant le cordeau toujours tendu] est la circonférence demandée.

On peut aussi, sur un plan quelconque, employer, à la place du cordeau, une règle suffisamment longue.

N° 28. La ligne droite et le cercle, ainsi que certaines surfaces dont ces lignes représentent les intersections ou qui en dérivent, étant les seuls objets que l'on considère dans cette partie des *Mathématiques* [ou de la *Science des Grandeurs* en général], à laquelle on est convenu de donner le nom de Géométrie Élémentaire, la *règle* et le *compas*, sont, par suite, les seuls instrumens dont l'usage appartienne essentiellement aux Élémens de Géométrie.

A la vérité, l'on fait souvent usage, dans la *Géométrie pratique*, de plusieurs autres instrumens, tels que ceux dont il vient d'être question; mais leur emploi n'a pour but que d'abréger ou de simplifier des opérations *graphiques* susceptibles, à la rigueur, d'être exécutées avec la règle et le compas seulement. Nous donnerons à la fin de l'ouvrage [dans la *Note* A], la description et la théorie de quelques-uns des principaux, et nous indiquerons la manière de s'en servir.

Des diverses espèces de Propositions et de Questions (*).

N° 29. Il y a plusieurs sortes de Propositions et de Questions que l'on distingue les unes des autres par autant de *termes* différens qu'il faut d'abord *expliquer*. — Ces sortes d'explications se nomment des *définitions* : ainsi, par exemple, nous venons de définir le mot Définition.

Autres *exemples* : — En expliquant (n° 2) ce que l'on entend par le mot *Géométrie*, nous avons donné la définition de

(*) On peut, sans inconvénient, passer tout de suite au *numéro* 60, sauf à revenir sur les *définitions*, sur les *méthodes*, etc., lorsqu'on y sera conduit par des renvois, ou lorsque le besoin d'éclaircissemens se fera sentir.

la Géométrie ; de même, en expliquant ce que c'est que la *ligne droite* (n° 5), le *plan* (n° 9), le *cercle* (n° 16), etc., nous avons défini la ligne droite, le plan, le cercle, etc.

En général, on ne saurait attacher une trop grande importance aux définitions : des définitions claires et précises sont le préambule nécessaire, le commencement obligé de toute théorie exacte, de tout raisonnement rigoureux.

N° 30. L'Axiome est une *proposition évidente par elle-même*, et dont le simple *énoncé* suffit pour en faire *immédiatement* reconnaître *la vérité*. — Telles sont les suivantes :

1° *Un tout est plus grand que chacune de ses parties prise séparément ;*

2° *Deux quantités respectivement égales à une troisième sont égales entre elles ;*

3° *Deux quantités égales, augmentées ou diminuées à la fois d'une même quantité, donnent des résultats égaux ;*

4° *Si deux quantités sont respectivement moindres* [ou plus grandes] *que deux autres, la somme des premières est moindre* [ou plus grande] *que celle des dernières.*

Etc., etc., etc.

N° 31. La Demande [en latin : *postulatum*] est une *proposition du même genre que l'axiome*, n'ayant peut-être pas *immédiatement* le même degré d'évidence, mais assez claire cependant pour que notre esprit n'éprouve aucune répugnance à l'admettre sans discussion. — Telles sont les propositions suivantes, dont, avec un peu d'attention, on sentira tout de suite la vérité :

1° *Entre deux points déterminés il n'existe qu'un seul plus court chemin*, — ou autrement : *Entre deux points on ne peut mener qu'une seule ligne droite* (n° 5) ; — [proposition qui toutefois ne doit pas être confondue avec celle du *numéro* 7 : — *Deux droites qui ont deux points communs coïncident dans toute leur étendue* ;]

2° *Il y a des surfaces sur lesquelles on peut, en chacun de leurs points, appliquer une ligne droite dans une infinité de positions* ; — [ce sont les surfaces que nous avons nommées planes (n° 9).]

Au reste, la vérité des propositions que l'on nomme *demandes*, est souvent susceptible d'être prouvée rigoureusement. C'est ce qui est arrivé, par exemple, pour les propositions des *numéros* 7 et 11, que nous aurions pu, à l'exemple de plusieurs auteurs, présenter simplement sous forme de demandes. — Dans tous les cas semblables, si l'on préfère assimiler les demandes aux axiomes, c'est que le faible avantage qui pourrait naître d'un peu plus de rigueur dans la manière d'établir ces propositions, ne suffirait pas pour

compenser la longueur ou les embarras de la route qu'il faudrait suivre pour en développer complètement les preuves.

Ainsi, la demande forme une sorte de transition entre l'axiome et le théorème, autre sorte de proposition dont nous parlerons tout à l'heure.

N° 32. Le **Lemme** est une proposition préliminaire peu digne d'attention par elle-même, et dont l'objet principal est de servir de *préparation ou de base aux propositions ou aux questions qui doivent suivre.*

Ce qui caractérise encore le lemme, c'est que, le plus ordinairement, il est emprunté à une autre science, ou à une autre partie de la science, que celle dont il forme l'introduction ; ou du moins il n'a pas toujours avec elle un rapport bien direct.

N° 33. Le **Théorème** est une *proposition qui n'est pas évidente par elle-même, mais dont on prouve la vérité, au moyen d'un raisonnement appelé* Démonstration, *en s'appuyant sur d'autres vérités déjà reconnues.* — Telle est la proposition du *numéro* 18.

Dans l'*énoncé* d'un théorème [et généralement d'une proposition quelconque], on peut ordinairement distinguer deux parties, dont la première, nommée Hypothèse, est une *supposition* faite sur un certain Sujet considéré comme principal, et dont l'autre, nommée Conclusion, est la *conséquence* de cette supposition.

Exemple : — *Un cercle étant tracé dans un plan* [sujet], — *si un point de ce plan est à une distance du centre, égale au rayon* [hypothèse], — *ce point est* (n° 17) *sur la circonférence* [conclusion].

N° 34. La **Réciproque** d'une proposition est une autre *proposition établie en sens inverse* de la première, de telle sorte que, le sujet principal restant le même, la conclusion primitive prend la place de l'hypothèse, *et vice versâ.*

Exemples : — 1° *Tout diamètre* [d'un cercle] *divise le cercle et sa circonférence en deux parties égales* (n° 18) ; — ou bien : *Toute corde* [sujet] *qui passe par le centre* [hypothèse], *divise le cercle et sa circonférence en deux parties égales* [conclusion].

Réciproquement : — *Toute corde* [même sujet] *qui divise un cercle, ou sa circonférence, en deux parties égales* [hypothèse], passe par le centre [conclusion], et par conséquent cette corde *est un diamètre*.

2° *Toute figure est étendue* (n° 2) [proposition directe ou primitive] ; — et *Toute étendue* [quand elle a des limites] *est figurée* [proposition inverse ou réciproque].

C'est comme si l'on disait : — *Toute chose qui a une figure* [hypothèse] *a une étendue* [conclusion] ; — et réciproquement : *Toute chose qui a une étendue* [hypothèse] *a une figure* [conclusion] ; — [sujet sous-entendu : *l'espace*].

3° Réciproque de l'axiome 3ᵉ du *numéro* 30 : — *Deux quantités sont égales lorsque, augmentées ou diminuées à la fois de quantités égales, elles donnent des résultats égaux.*

Etc., etc., etc.

N° 35. *Souvent une même proposition admet plusieurs réciproques.* — Ainsi, lorsque l'hypothèse peut se décomposer en plusieurs suppositions partielles indépendantes les unes des autres, la démonstration de chacune d'elles fournit une réciproque particulière. — Exemple : *On suppose démontré qu'*Une droite passant par deux points déterminés, A, B, passe aussi par un troisième point déterminé C ; — *Réciproque* 1ʳᵉ : Toute droite qui passe par les points A et C passe par le point B ; — *Récipr.* 2ᵉ : Toute droite qui passe par les points B et C passe par le point A.

Au contraire, — *Il existe beaucoup de propositions dont les réciproques sont fausses.* — Telle serait la réciproque que l'on voudrait tirer de l'axiome 2ᵉ du *numéro* 30, en disant que deux quantités égales entre elles sont égales à une troisième quelconque, proposition dont la *fausseté* saute aux yeux. Mais il s'en faut bien qu'une *absurdité* puisse toujours se reconnaître aussi facilement ; et de là résulte, en général, la nécessité, soit de démontrer les propositions inverses lorsqu'elles sont vraies et ne découlent pas immédiatement de leurs directes, soit, quand elles sont fausses, d'en faire ressortir l'absurdité.

Digitized by Google

Quelquefois aussi, une proposition qui est en apparence la réciproque d'une autre, ne fait que reproduire cette dernière en termes différens.— Telle est la proposition suivante par rapport à l'*axiome 1er* du *numéro* 30 : — *Une partie est plus petite que le tout* auquel elle appartient.

Enfin, il y a des propositions qui ne sont susceptibles d'aucune sorte de *renversement*, c'est-à-dire dont les énoncés pris *à rebours* n'offrent aucun sens raisonnable à l'esprit.

N° 36. Le Corollaire est la *conséquence immédiate d'une proposition qui précède.*

On doit voir, par cette définition, qu'il ne saurait exister de différence bien essentielle entre un corollaire et un théorème : d'une part, en effet, presque tous les théorèmes sont des conséquences de ceux qui les précèdent plus ou moins immédiatement ; et d'autre part, les corollaires ont souvent autant d'importance que les théorèmes sur lesquels ils s'appuient. Aussi pourrait-on, dans bien des cas, employer indifféremment l'une ou l'autre des deux dénominations ; seulement, celle de corollaire appliquée à une proposition, suppose presque toujours que, s'il faut un nouveau raisonnement pour en établir la vérité, ce raisonnement est assez simple pour que la suppression puisse en être faite sans beaucoup d'inconvénient.

N° 37. Le Problème est une *question* qui a pour objet la *détermination de certaines choses inconnues*, au moyen d'une ou de plusieurs autres choses *connues* ou *données* qui ont avec les premières, des relations indiquées par l'*énoncé*.—*Résoudre un problème*, c'est parvenir à la détermination de ces choses inconnues ; et le résultat qu'on obtient ainsi, s'appelle la Solution du problème.

Les problèmes de Géométrie peuvent se grouper en deux espèces principales : les *problèmes graphiques* ou relatifs aux *figures*, et les *problèmes numériques* ou relatifs à l'*étendue* (n° 2).

N° 38. Les *problèmes graphiques* consistent à *tracer* une figure qui remplisse certaines conditions déterminées, c'est-à-dire, à *trouver* certains points, à *décrire* certaines lignes, qui aient certaines relations déterminées avec certains points, avec certaines lignes données, soit de forme et de position, soit de grandeur seulement : et c'est là ce qu'on appelle *faire la construction du problème*.

Quant aux *problèmes numériques* de la Géométrie, ils consistent simplement en *applications* particulières des propositions générales relatives à la mesure des différentes sortes d'étendue.

Les questions de cette dernière espèce rentrant donc, sous un certain point de vue, dans le domaine de l'*Arithmétique*, on pourrait, à la rigueur, les séparer du *Cours de Géométrie* proprement dit. Mais comme, d'un autre côté, il est très important que les élèves soient habiles à appliquer des connaissances qui, s'ils en négligeaient la *pratique*, leur deviendraient à peu près inutiles, nous avons cru devoir, pour cette raison, donner quelques exemples de résolution des problèmes de ce genre, qu'il est d'ailleurs facile de multiplier autant qu'on le juge convenable.

Il existe encore des problèmes *mixtes* qui tiennent à la fois des problèmes graphiques et des problèmes numériques. — Ainsi, tantôt il y a une construction préparatoire à effectuer pour arriver à un résultat numérique, tantôt il y a des longueurs à mesurer pour fixer la position de certains points d'une figure, etc. — On rencontrera, par la suite, des exemples de ces différens cas.

N° 39. Outre les diverses classes de problèmes dont nous venons de parler, et que l'on peut comprendre sous la dénomination commune de *problèmes pratiques*, puisque leur résolution consiste toujours, soit dans des opérations manuelles, soit dans des applications numériques de propositions précédemment démontrées, on doit encore distinguer un autre genre de questions dont la solution fournit, au contraire, de nouvelles connaissances générales, et auxquelles on pourrait, par cette raison, appliquer le nom de *problèmes théoriques*.

Mais ces sortes de problèmes étant, en réalité, bien moins des questions proprement dites, que de véritables propositions qu'il serait long ou difficile, et quelquefois même impossible, d'énoncer clairement sous la forme qui leur est propre, on doit, dans une classification bien logique, les ranger parmi les théorèmes. D'ailleurs, comme on le conçoit facilement, il n'est aucune proposition qu'à la rigueur on ne puisse, en intervertissant l'ordre des idées, transformer en une question à résoudre; *et vice versâ*.

N° 40. Nous observerons en outre que beaucoup de problèmes, surtout de problèmes numériques, sont susceptibles, comme les théorèmes, de donner lieu à des *problèmes réciproques* ou *inverses* : c'est ce qui arrive lorsque, après avoir résolu une question, l'on s'en propose une autre dans laquelle les *inconnues* de la première sont prises, en totalité ou en partie, pour *données* de la seconde; *et vice versâ*. — Ainsi, *Étant donnée une circonférence, déterminer son rayon*, — et, *Étant donné le rayon, déterminer la circonférence*, — sont deux problèmes réciproques l'un de l'autre. — La solution des problèmes inverses peut servir de *preuve* ou de *vérification* à celle des *problèmes directs*.

N° 41. Enfin, pour terminer l'énumération qui précède, il nous reste à parler du Scolie. — On nomme ainsi une *remarque* ou *observation* faite *sur une ou sur plusieurs des propositions qui ont précédé*, et ayant pour objet de faire ressortir l'*extension* qu'on peut leur donner, les *restrictions* auxquelles elles sont soumises, leur *liaison* mutuelle, leur *utilité*, etc.

Quelquefois aussi, le scolie est une portion de théorème, ou une *proposition partielle*, que l'on juge assez importante par elle-même pour mériter une attention spéciale.

Au reste, nous emploierons généralement le titre de *scolie* quand il ne s'agira que d'observations de peu d'étendue, et portant principalement sur *une* proposition ou sur une question déterminée; dans tous les cas contraires, nous nous servirons du mot Remarque

Souvent, le scolie donne lieu à établir de nouvelles définitions, à démontrer de nouveaux théorèmes, à résoudre de nouveaux problèmes : nous en rencontrerons fréquemment des exemples.

Méthodes de Démonstration et de Résolution.

N° 42. Des différens moyens de démonstration particuliers à la Géométrie, le plus fécond à la fois, et le plus simple lorsqu'il est susceptible d'être employé, se trouve sans contredit dans la Superposition *des figures* (n°. 3). Ce moyen consiste à prouver que l'on peut faire *coïncider*, c'est-à-dire que l'on peut appliquer exactement l'une sur l'autre, deux figures ou deux portions de figures; et alors, ou bien de la superposition possible des deux figures totales on conclut l'*égalité* de toutes leurs parties *chacune à chacune;* ou bien de la superposition des *parties essentielles* des deux figures, c'est-à-dire des parties qui, une fois données, déterminent toutes les autres, on conclut l'égalité des figures totales, et par suite celle de toutes les autres parties.

N° 43. *Il existe pour les figures planes deux modes différens de superposition.* — C'est ce qu'on admettra sans peine si l'on observe que toute figure tracée d'abord sur un plan, et ensuite détachée de ce plan par la pensée, offre toujours deux *faces* que l'on peut appeler *le dessus* et *le dessous* (n° 13) de la figure, ou bien, en termes vulgaires, *l'endroit* et *l'envers*.

Or, les deux faces qui, dans la superposition, s'appliquent l'une *contre* l'autre, ou *en regard* l'une de l'autre, peuvent être, ou deux faces de même nom, ou deux faces de noms opposés. On a un exemple du premier cas dans la démonstration employée au *numéro* 18 pour faire voir que *Tout diamètre* [d'un cercle] *divise le cercle et sa circonférence en deux parties égales.* La proposition du *numéro* 17, que *Deux circonférences de même rayon sont égales*, offre un exemple du second cas. Nous dirons que la *superposition* est *directe* lorsque deux faces de noms opposés sont appliquées l'une contre l'autre, ou, en d'autres termes, lorsque deux faces de même nom *regardent* la même région (n° 13) de l'espace; et nous nommerons *superposition inverse* celle qui a lieu dans le cas contraire, où deux faces de même nom *se regardent* mutuellement. De plus, pour exprimer que deux *figures* sont *inversement superposables*, nous dirons qu'elles sont *symétriques entre elles*, ou simplement, qu'elles sont *symétriques*: expression qui indique suffisamment que les figures sont formées d'*élémens* ayant, deux à deux, la *même mesure*, sans toutefois pouvoir être elles-mêmes considérées comme *identiques*.

N° 44. Cela posé, pour obtenir la coïncidence de deux figures tracées dans un même plan, il y a généralement *trois* sortes de *mouvemens* distincts et successifs à faire prendre à celle des deux figures, que l'on suppose *mobile*, avant de l'amener à se confondre avec la figure *fixe*.

Soient en effet (fig. 21), ABC ou *abc* la figure fixe, et A'B'C' ou *a'b'c'* la figure mobile que l'on veut faire coïncider avec la première: [les *points analogues* ou *homologues*, c'est-à-dire ceux qui doivent se confondre deux à deux dans la superposition, étant désignés par les mêmes lettres (n° 4)]. Fig. 21.

Premier mouvement: la *translation* ou la *transposition*. — Faisons *glisser* la figure A'B'C' ou *a'b'c'* (fig. 21) dans son plan, de manière que l'un de ses points, A' ou *a'*, vienne coïncider avec son homologue, A ou *a* (fig. 22), de la figure ABC ou *abc*. Fig. 22.

Deuxième mouvement : la *rotation* ou le *pivotement*. — Faisons *tourner* la figure A'B'C' ou *a'b'c'* (fig. 22), toujours en glissant dans son plan, autour du point A ou *a* supposé fixe, de manière qu'un second point, B' ou *b'*, vienne coïncider
Fig. 23 et 24. avec son homologue, B ou *b* (fig. 23 et 24). — [Le point A prend, dans ce mouvement, le nom de *centre de rotation.*]

Troisième mouvement [auquel on n'a jamais recours que pour la superpositiou inverse] : le *rabattement* ou le *renver-*
Fig. 24. *sement.* — *Plions* la figure totale *abca'b'c'* (fig. 24) le long de la droite *ab* [ou *a'b'*] considérée comme *charnière* (n° 13), en soulevant le point *c'* au-dessus du plan de la figure fixe; et continuons ce mouvement jusqu'à ce que le point *c'* revienne, de l'autre côté de *ab*, retomber dans le plan et se placer sur son homologue *c*. — [La droite *ab* est dite l'*axe de rabattement* ou de *symétrie.*]

N° 45. Ces trois mouvemens effectués convenablement, les deux figures, supposées égales, se confondent ; mais notons bien que tous les trois ne sont pas toujours nécessaires : c'est ainsi que le rabattement, dans le *numéro* 18, a suffi pour déterminer la superposition des deux moitiés d'un même cercle ; comme la translation, dans le *numéro* 17, avait suffi pour faire coïncider deux cercles de rayons égaux.

Il est important d'observer encore, que le troisième mouvement, *le rabattement*, est celui qui *caractérise le genre de superposition :* c'est-à-dire que la superposition est directe quand on n'est pas obligé, pour l'exécuter, de *retourner* l'une des figures *sens dessus dessous*, comme dans la série des figu-
Fig. 21 — 24. res ABC, A'B'C' (fig. 21, 22, et 23); et au contraire, que la superposition est inverse quand le rabattement est indispensable, comme dans les figures *abc*, *a'b'c'* (fig. 21, 22, et 24), lesquelles sont alors *symétriques* entre elles (n° 43).

Remarquons enfin, que, dans beaucoup de cas, les deux modes de superposition peuvent s'exécuter sur les mêmes figures. C'est ainsi que l'on démontrerait tout aussi bien la proposition du *numéro* 17 en *renversant* l'un des deux cercles

sur l'autre, et que, dans celle du *numéro* 18, on pourrait obtenir la superposition des deux demi-cercles en faisant *pivoter* l'un d'eux autour de son centre.

N° 46. Quoique, dans ce qui précède, nous n'ayons parlé que de la superposition des figures planes, ce que nous en avons dit s'applique également, à quelques légères modifications près, aux figures considérées généralement. Ainsi, pour faire coïncider, dans l'espace, deux figures égales, ABC..., A'B'C'..., il faudra de même, faire prendre à la figure mobile A'B'C'..., trois mouvemens successifs.

1° On *transportera* A'B'C'... de manière que le point A', par exemple, décrivant une ligne quelconque [droite ou autre], vienne se placer sur son homologue A.

2° On amènera un second point B' à coïncider avec son homologue B, en faisant *pivoter* la figure A'B'C'... autour du point A. — [Pour plus de simplicité, le point B' pourra, dans ce second mouvement, rester constamment dans le plan déterminé (n° 11) par sa position primitive et par les points A et B.]

3° Enfin, on fera faire à la figure A'B'C'... une *révolution* autour de la droite AB [que l'on nomme alors l'*axe de révolution*], de manière qu'un troisième point C' vienne coïncider avec son homologue C.

Et alors les deux figures, supposées égales, se confondront.

Ainsi, comme on le voit, — *Pour les figures dans l'espace, il n'y a qu'une seule sorte de superposition* ou d'égalité; — et l'on aperçoit sans peine que les deux genres de superposition applicables aux figures planes, s'y trouvent compris comme cas particuliers.

Au reste, devant avoir une foule d'occasions d'éclaircir par des exemples, les principes de l'égalité et de la superposition des figures, nous n'en parlerons pas davantage pour le moment.

N° 47. Il existe un autre mode de démonstration, plus général encore que le premier, en ce que ses applications, ne se bornant pas à la seule Géométrie, peuvent s'étendre à toutes les sciences de raisonnement. Cette méthode, connue sous le nom de RÉDUCTION A L'ABSURDE, consiste à supposer d'abord que la proposition à établir ne soit pas vraie, puis, par certaines déductions tirées de principes déjà reconnus, à faire ressortir une contradiction, soit avec quelqu'un de ces principes, soit avec la supposition elle-même.

Un pareil genre de raisonnement, quoique très rigoureux, a pourtant quelque chose d'*indirect;* aussi doit-on en faire uage avec beaucoup de réserve, principalement à défaut d'autre, ou quand la démonstration est notablement plus courte

qu'une directe, et enfin lorsqu'on a déjà acquis, par des considérations quelconques, un pressentiment de la vérité qu'il s'agit de mettre en évidence, comme il arrive, en particulier, dans les propositions nommées *réciproques* (*voyez* le n° 34).

N° 48. Prenons pour exemple la première réciproque citée au *numéro* 34, laquelle correspond au théorème du *numéro* 18; et voyons comment on démontre cette réciproque par la réduction à l'absurde. — Il s'agit de prouver que

Fig. 25. *Toute corde*, AG (fig. 25), *qui divise un cercle*, OA, *ou sa circonférence, en deux parties égales, est un diamètre.*

En effet, si AG n'était pas un diamètre, on pourrait toujours mener par le point A un diamètre AOD; et l'on aurait, en vertu de la proposition directe, ABD égal à DCA. Or ABG est évidemment plus petit que ABD, tandis qu'au contraire, GCA est plus grand que DCA ou ABD; donc ABG est plus petit que GCA : ce qui implique contradiction avec la supposition que ces deux arcs ou ces deux segmens sont égaux. Donc il est impossible que AG ne soit pas un diamètre.

— Au reste, on peut raisonner plus simplement, et dire : « Il passe certainement par le point A une corde *unique* ayant la propriété de partager le cercle en deux parties équivalentes; et il passe aussi par le point A un diamètre unique (n° 8); or ce diamètre partage le cercle en deux parties équivalentes : donc les deux droites se confondent. »

N° 49. En généralisant cette dernière manière de raisonner, on est évidemment autorisé à établir l'axiome suivant :

Toutes les fois que, dans une figure, il existe quelque ligne remplissant à la fois plusieurs conditions qui ne sont pas toutes nécessaires à la détermination de cette ligne, on peut affirmer que toute ligne de même nature que la première sera identique avec elle, si, parmi ces conditions, elle en remplit un nombre suffisant pour la déterminer.

On a une application bien simple de ce principe, dans la proposition prise pour exemple au commencement du *nu-*

méro 35. En effet, on suppose démoutré que la droite qui passe par les deux points A et B, passe aussi par le troisième point C; et comme d'ailleurs il suffit de *deux* points pour déterminer une droite, on peut établir immédiatement les deux réciproques citées.

N° 50. Voici de nouveaux exemples fort simples de propositions et de leurs réciproques, lesquels donneront lieu à établir un autre principe général également fort important.

— *Un cercle étant tracé sur un plan :*

1° *Tout point situé sur la circonférence, est à une distance du centre égale au rayon ;*

2° *Tout point situé en dedans du cercle, est à une distance du centre plus petite que le rayon ;*

3° *Tout point situé en dehors du cercle, est à une distance du centre plus grande que le rayon.*

La première de ces propositions est comprise dans la définition même du cercle; et les deux autres en sont des conséquences évidentes.

Réciproquement : — *Un cercle étant donné sur un plan :*

1° *Tout point dont la distance au centre est égale au rayon, est situé sur la circonférence ;*

2° *Tout point dont la distance au centre est plus petite que le rayon, est situé en dedans du cercle ;*

3° *Tout point dont la distance au centre est plus grande que le rayon, est situé en dehors du cercle.*

Ces trois réciproques résultent nécessairement de l'existence déjà supposée admise des trois propositions directes. Par exemple, si le point est à une distance du centre, moindre que le rayon, il ne peut être situé qu'en dedans du cercle; car, pour qu'il fût situé sur la circonférence ou en dehors du cercle, il faudrait, en vertu de la première et de la troisième des propositions directes, que sa distance au centre fût égale au rayon ou plus grande que le rayon : ce qui, dans un cas comme dans l'autre, serait contraire à l'hypothèse, et par conséquent *absurde*.

Digitized by Google

N° 51. Maintenant, on peut fonder, sur le genre de démonstration que nous venons d'employer, cet autre axiome non moins évident que le premier (n° 49) :

Toutes les fois que, dans une proposition ou dans une série de propositions, toutes les hypothèses admissibles ont été faites sur un sujet déterminé, et que ces hypothèses ont conduit à des conclusions respectives essentiellement distinctes et telles que chacune d'elles exclue toutes les autres, on peut affirmer que les réciproques des propositions établies sont toutes vraies.

Ainsi, en revenant sur les trois premières propositions du *numéro* précédent, comme on aperçoit sur le champ — 1° que le point, pris pour *sujet*, ne peut avoir que *trois* sortes de positions essentiellement différentes dans le plan du cercle ; — 2° que pour chacune de ces positions, il y a une conclusion particulière relativement à sa distance au centre ; — et 3° qu'enfin une quelconque de ces trois conclusions exclut les deux autres : — alors, on ne saurait concevoir de doute sur l'existence d'aucune des trois réciproques.

N° 52. Nous engageons les élèves à se bien pénétrer de ces deux principes (nos 49 et 51), qui, tantôt l'un, tantôt l'autre, sont applicables à presque toutes les réciproques.

Le dernier des deux (n° 51) peut servir en outre à expliquer pourquoi certaines réciproques sont fausses (n° 35). Il fait voir que telles sont particulièrement les réciproques qui correspondent à des théorèmes dont la conclusion ne convient pas seulement à l'hypothèse établie, mais encore à d'autres hypothèses faites sur le même sujet.

Par exemple, si la réciproque de l'axiome 2° du *numéro* 30 est fausse (n° 35), cela tient à ce que deux quantités sont égales entre elles, non-seulement quand elles sont respectivement égales à une troisième, mais encore lorsqu'elles sont à la fois *doubles*, *triples*, *quadruples*...., *sous-doubles*..., etc., d'une troisième quelconque.

N° 53. Nous terminerons ce qui a rapport aux méthodes de démonstration, en signalant deux sortes de *faux raisonnemens* très communs de la part des commençans, et contre lesquels ils ne peuvent assez se tenir en garde : ce sont, en termes de *Logique*, le CERCLE VICIEUX et la PÉTITION DE PRINCIPE.

Le *cercle vicieux* est un raisonnement dans lequel, pour démontrer une proposition, l'on s'appuie, soit implicitement, soit explicitement, sur une autre proposition qui, d'après la marche qu'on a suivie, ne peut, au contraire, être elle-même démontrée qu'à l'aide de la première.

La *pétition de principe* est un raisonnement dans lequel, pour démontrer une proposition, l'on s'appuie sur la proposition elle-même. — C'est donc une sorte de cercle vicieux.

Un *jugement* sain et une *attention* soutenue paraissent suffire pour préserver de ces deux écueils ; cependant on ne peut se dissimuler que la *mémoire* ne soit également nécessaire, en tenant sans cesse présent à l'esprit, soit *l'ordre* des différentes propositions, soit *l'enchaînement* des diverses parties d'une même démonstration. Nous ne saurions donc trop recommander aux élèves de faire tous leurs efforts pour se bien pénétrer de cet ordre et de cet enchaînement, puisque c'est toujours en perdant de vue l'un ou l'autre, que l'on s'expose à commettre, dans le premier cas, un cercle vicieux, et dans le second, une pétition de principe.

Rien n'est plus propre à prémunir l'esprit contre ces grossières violations des premiers principes de la Logique, que de consulter souvent, ou même *d'apprendre par cœur le Programme* ou *la Table des matières* que nous avons placée au commencement du volume (*voyez* d'abord le n° 15). Cette Table, loin d'être négligée, doit être au contraire considérée comme faisant partie intégrante, et nous oserons même dire, comme étant la partie principale du Cours, puisqu'elle en représente en quelque sorte la *charpente* ou le *squelette*, sur lequel toutes les autres pièces viennent s'appuyer (*).

N° 54. Voyons maintenant ce qui est relatif aux problèmes.

La résolution d'un problème graphique (n° 38) peut donner lieu à l'emploi de deux MÉTHODES distinctes : l'ANALYSE, ou la SYNTHÈSE.

(*) Nous engageons, pour la même raison, les élèves à se faire eux-mêmes un Programme plus détaillé, présentant dans une série complète et suivie, les définitions et les énoncés des théorèmes et de leurs principaux corollaires.

Lorsqu'on veut procéder par la *méthode analytique*, on commence par *supposer le problème résolu*, c'est-à-dire par décrire sans instrument, et tant bien que mal, une figure à laquelle *on suppose* les propriétés exigées par l'énoncé (*). Alors, par une suite d'opérations préparatoires et de conséquences successives tirées des relations qui lient les *données* aux *inconnues*, ou *tâche* de découvrir quelque *construction* (n° 38) qui, réellement exécutée, conduirait à la véritable solution; ou bien, on ramène la question proposée à d'autres questions plus ou moins simples que l'on sait déjà résoudre. C'est ce qui s'appelle *faire l'analyse du problème.*

La *méthode synthétique* est l'inverse de la précédente : elle consiste à *prescrire* tout d'abord les opérations à effectuer, sauf à prouver ensuite que le résultat de cette construction satisfait aux conditions du problème.

N° 55. Pour donner un exemple de l'emploi de chacune de ces deux méthodes, proposons-nous le problème suivant :

Fig. 15. *Deux points*, A et B (fig. 15), *étant donnés sur un plan, trouver dans ce plan un troisième point* C *qui soit à une distance du point* A, *égale à* 3 *unités de longueur, et à une distance du point* B, *égale à* 2 *unités.*

Si l'on veut procéder par l'*analyse*, voici comment on raisonnera :

« Supposons le problème résolu, et soit C le point cherché. » — En menant les droites AC, BC, on aura AC égal à 3 unités, » et BC égal à 2. Or, tous les points qui sont à une distance » du point A, égale à 3, sont situés sur une circonférence dé-

(*) Il arrive ainsi bien souvent, dans la démonstration des théorèmes comme dans la résolution des problèmes, que les constructions ont seulement pour but de diriger le raisonnement. En pareil cas, il n'est pas nécessaire qu'elles soient faites avec beaucoup de soin, ni que l'on sache sur quels principes elles sont fondées, ou par quels moyens on pourrait les effectuer. Il suffit de tracer grossièrement des lignes auxquelles on suppose les propriétés dont il est question; et l'on conçoit sans peine que les *vérités générales* découvertes à l'aide de pareilles figures, sont tout aussi rigoureusement établies que si les opérations graphiques eussent été parfaitement exécutées.

» crite du point A comme centre, avec un rayon égal à 3; et
» tous les points qui sont à une distance du point B, égale à 2,
» sont situés sur une circonférence décrite du centre B, et d'un
» rayon égal à 2. — D'où résulte la construction suivante:

» 1° *Du point A comme centre, et d'un rayon égal à 3 unités de longueur, décrivons une circonférence de cercle;* — » 2° *Du point B comme centre, et d'un rayon égal à 2 unités, décrivons une autre circonférence :*

» Le point cherché se trouvera à la rencontre C des deux » circonférences. »

Si, au contraire, on veut employer la synthèse, on dira :

« 1° *Du centre A et d'un rayon égal à 3 unités, décrivons une circonférence;* — 2° *Du centre B et d'un rayon égal à 2, décrivons une autre circonférence :*

» Le lieu C où les deux circonférences se rencontrent, est » le point cherché.

» En effet, tout point de la première circonférence est situé » à une distance du point A, égale à 3, et tout point de la se» conde est situé à une distance du point B, égale à 2; donc » tout point commun aux deux circonférences, fournit *une so» lution* du problème. »

N° 56. On voit que ces deux méthodes ont chacune leur caractère propre. — L'*analyse* est la *méthode d'invention;* son usage est éminemment propre à assurer et à rendre plus facile la découverte d'une construction qui satisfasse aux conditions exigées. — La *synthèse* est la *méthode de démonstration;* elle exige le plus ordinairement, pour pouvoir être employée, que l'analyse ait déjà fait connaître cette construction; mais elle en prouve plus directement l'efficacité. — La première méthode est plus longue, parce que son emploi suppose des tâtonnemens, nécessaires pour parvenir à un but que l'on ne distingue pas immédiatement; — la seconde est plus courte, parce qu'en la suivant, on marche droit à un but que l'on connaît d'avance, ou que l'on aperçoit sans effort.

Nous userons, suivant les cas, pour présenter la solution des problèmes graphiques, de l'une ou de l'autre de ces deux méthodes. Ainsi, dans les questions un peu compliquées, nous aurons recours à l'analyse. Au contraire, quand la construction s'offrira d'elle-même assez naturellement, nous donnerons la préférence à la synthèse. Enfin, dans les problèmes très faciles, nous nous contenterons de donner un abrégé de l'une ou de l'autre, en indiquant seulement la construction sans démonstration.

N° 57. Au reste, l'utilité des méthodes dont nous parlons ne se borne pas à la résolution des problèmes : toutes deux peuvent être également appliquées aux théorèmes, l'analyse pour les *découvrir*, et la synthèse pour les *démontrer* Toute la différence se réduit en réalité à ceci : — *L'énoncé suit ou précède la démonstration, suivant que l'on fait usage de l'analyse ou de la synthèse.*

Néanmoins, la méthode synthétique ayant, par sa nature, quelque chose de moins diffus que la méthode analytique, doit lui être généralement préférée pour la démonstration des théorèmes dont l'existence a déjà été aperçue ou pressentie ; et au contraire la méthode analytique, la seule susceptible de *conduire* l'esprit dans la recherche de nouvelles connaissances, aura le plus ordinairement l'avantage lorsqu'il s'agira de découvrir la solution d'un problème.

En résumé, l'*analyse* sert à *trouver* les vérités *inconnues*, et la *synthèse* à *prouver* les vérités *connues*.

N° 58. Pour que la résolution d'un problème soit complète, il faut encore, dans la plupart des cas, que l'analyse ou la synthèse soit accompagnée d'une *discussion*. — On nomme ainsi l'*examen* détaillé des circonstances variables que peut présenter la question, ainsi que des conséquences particulières qu'elles entraînent, examen d'où il résulte que, suivant les cas, le problème est *déterminé*, ou *indéterminé*, ou bien *impossible* : c'est-à-dire qu'il a *un nombre limité* et *déterminé* de solutions, ou *un nombre illimité*, ou bien qu'il n'en a *aucune*.—Par exemple, en discutant le problème fort simple du *numéro* 55, on verra aisément que dans certaines circonstances [qui sont celles de la *figure* 15], il y a *deux* solutions ; que dans d'autres, ces deux solutions se réduisent à *une* seule [comme dans la *figure* 16] ; et enfin qu'il pourrait n'y en avoir *aucune*. C'est d'ailleurs ce que nous reconnaîtrons encore mieux par la suite.

N° 59. De plus, il y a une distinction bien essentielle à faire entre le nombre ou la *multiplicité des solutions* d'un même problème, et le nombre ou la *diversité des constructions* que l'on peut employer pour arriver au résultat cherché. Ainsi, d'une part, il peut y avoir *plusieurs points* différens, *plusieurs lignes*, etc., qui remplissent également certaines conditions exigées ; et, d'un autre côté, il peut y avoir *diverses manières* de parvenir à la détermination de chacun de ces points, de chacune de ces lignes, etc.

Relativement aux divers moyens d'obtenir une même solution, la construction employée peut être plus ou moins *simple*, suivant que le nombre des lignes à tracer est moindre ou plus considérable ; et elle est dite aussi plus ou moins *élégante*, suivant qu'elle tire un parti plus ou moins avantageux des données de la question ou des lignes déjà décrites, ainsi que des analogies qui peuvent exister entre elles, suivant qu'elle assigne aux lignes inconnues des positions plus ou moins appropriées à leur objet, enfin, suivant qu'elle suppose plus ou moins de sagacité de la part de celui qui la découvre.

Des Rapports et des Proportions en Géométrie.

N° 60. Bien que les notions de *rapport* et de *proportion* appartiennent essentiellement à l'*Arithmétique*, néanmoins, comme elles se représentent à chaque instant dans la *Géométrie*, et qu'il est extrêmement important de bien fixer les idées sur ce sujet, nous croyons devoir les rappeler brièvement.

On appelle *rapport d'une quantité à une autre* quantité de même espèce, la *manière dont la première quantité* [que l'on nomme *l'antécédent* du rapport] *se compose de la seconde* quantité [que l'on nomme *le conséquent*]. Ainsi, lorsque l'on dit qu'une quantité A contient *trois* fois une autre quantité B, plus *deux* fois le *septième* de cette autre quantité B, on énonce le rapport de la quantité A [considérée comme antécédent] à la quantité B [considérée comme conséquent].

Lorsque l'on veut comparer entre elles plusieurs quantités de même espèce, on en prend *une quelconque* pour *terme général de comparaison ;* on lui donne le nom d'UNITÉ; et l'on appelle *nombre*, le *rapport* de chacune des autres quantités, considérées successivement comme antécédens, à cette unité considérée comme conséquent. Le *nombre* n'est donc qu'un cas particulier du *rapport*, avec lequel on le confond souvent, ainsi qu'on le fait dans l'exemple ci-dessus en disant simplement que *le rapport de* A *à* B *est représenté par le nombre* $3+\frac{2}{7}$, pour dire que *la quantité* A *se compose de la quantité* B ou *avec la quantité* B, *comme le nombre* $3+\frac{2}{7}$ *se compose avec* 1 ; ce que d'ailleurs, on exprime de la manière suivante :

$$A : B :: 3 + \frac{2}{7} : 1.$$

(*Voyez*, au commencement de l'ouvrage, le tableau des *Signes et abréviations*.)

Au reste, pour faire mieux comprendre ce qui précède et pour dissiper complètement ce qu'il peut y rester de vague, nous ajouterons quelques nouveaux développemens, en prenant pour exemple particulier la détermination du rapport de deux droites, après avoir toutefois résolu subsidiairement deux petites questions pour lesquelles il ne faut que savoir faire usage de la règle et du compas.

N° 61. PROBLÈME Ier. Fig. 26.

Trouver une droite égale en longueur à la somme de deux ou de plusieurs droites déterminées, m, n, p. . . . .

Pour exécuter cette opération, il faut :

1° Tracer d'une manière quelconque une droite indéfinie
Fig. 26. AX (n° 23); — 2° Prendre une ouverture de compas (n° 26) égale à la première longueur donnée *m*, et l'appliquer sur la droite AX, par exemple de A en B; — 3° Prendre une autre ouverture de compas égale à la seconde longueur *n*, et la porter à la suite de la première et dans le même sens, de B en C; — 4° Prendre une troisième ouverture de compas égale à *p*, et la porter à la suite des deux autres de C en D; — . . . . . . Et ainsi de suite.

La distance entre le point A et l'extrémité de la dernière des droites *m, n, p*. . . . , est la longueur cherchée, puisque

$$AB + BC + CD ... = m + n + p ...$$

SCOLIE. — On peut, par le même moyen,

Multiplier une droite déterminée par un nombre entier donné :

En effet, cette question n'est qu'un cas particulier du problème qui précède, dans lequel on supposerait les droites *m, n, p*. . . , égales entre elles et en nombre égal au *nombre* donné; il est donc inutile de s'y arrêter.

N° 62. PROBLÈME II. Fig. 27.

Trouver une droite égale en longueur à l'excès d'une droite déterminée, m, sur une autre droite déterminée, n.

1° Traçons une droite indéfinie AX.— 2° Portons, au moyen d'un compas, la droite m de A en B. — 3° Portons la droite n de B en C en seus contraire de la première. Fig. 27.

La droite AC sera égale à la droite cherchée, puisque l'on a

$$AC = AB - BC = m - n.$$

SCOLIE 1er. — Par une suite de soustractions successives, on peut arriver facilement à

Diviser une droite déterminée par une autre droite déterminée,

C'est-à-dire à trouver le nombre [entier] de fois que la première droite contient la seconde.

SCOL. 2. — On peut également, par une suite d'essais successifs, parvenir, aussi approximativement qu'on le veut, à

Partager une droite déterminée en un nombre [entier] *donné de parties égales.*

Pour cela, on prend nne première longueur que l'on suppose, *à vue*, devoir différer pen de la longueur partielle cherchée, et on la retranche de la droite proposée, autant de fois [s'il est possible] que le nombre donné contient d'unités. On voit de cette manière si la longueur essayée est trop grande ou trop petite; on la diminue ou on l'augmente suivant le cas; on fait un nouvel essai; et l'on continue ainsi jusqu'à ce qu'on arrive à une longueur qui satisfasse sensiblement à la question.

Au reste, nous donnerons plus tard des moyens de résoudre cette question rigoureusement, et sans tâtonnement.

SCOL. 3. — Enfin, en combinant les solutions des deux problèmes principaux qui précédent (nos 61 et 62), on parviendra sans peine, par des moyens analogues, à

Trouver une droite égale en longueur à la somme de plusieurs droites données [en nombre quelconque], *diminuée de la somme de plusieurs autres droites données.*

N° 63. **Problème III.** **Fig. 28.**

Fig. 28 *Trouver le rapport numérique des longueurs de deux droites déterminées*, AB, CD.

Pour que le rapport des deux droites données soit susceptible d'être exprimé exactement par deux nombres [qu'il nous est permis de supposer entiers], il faut que l'on puisse trouver une troisième droite contenue un nombre exact de fois dans chacune des deux premières, ou une *mesure commune* aux deux droites données. Mais, remarquons d'abord qu'une pareille mesure commune ne saurait exister sans qu'il en existe en même temps une infinité d'autres, parties aliquotes de la première ; et parmi toutes ces mesures communes, nous devons chercher *la plus grande*, comme étant celle qui donnera pour les deux termes du rapport cherché, les nombres les plus simples.

Cette recherche correspond visiblement à celle que l'on exécute en *Arithmétique* pour trouver *le plus grand diviseur commun* à deux nombres donnés ; et l'on prouverait facilement, par des considérations analogues, que pour obtenir la plus grande mesure commune aux deux droites données, il faut porter la plus petite sur la plus grande, autant de fois que cela se peut, puis le reste sur la plus petite, etc., etc.

Portons donc la plus petite droite CD sur la plus grande AB, et supposons que la première soit comprise 2 fois dans la seconde, de A en E, avec un reste EB [moindre que CD] : nous aurons

$$AB = 2.CD + EB.$$

Portons maintenant EB sur CD ; et supposons que

$$CD = EB + FD.$$

Portons de même FD sur EB ; et soit

$$EB = 4.FD + GB.$$

Soit enfin

$$FD = 3.GB.$$

Il résulte évidemment des égalités précédentes :

$$EB = 4.3.GB + \quad GB = 13.GB$$
$$CD = \quad 13.GB + \ 3.GB = 16.GB$$
$$AB = 2.16.GB + 13.GB = 45.GB.$$

D'où il suit que le *rapport* de AB à CD peut être représenté par la fraction $\frac{45}{16}$: c'est-à-dire que l'on a la proportion

$$AB : CD :: 45 : 16.$$

Scolie 1[er]. — Les deux nombres 45 et 16, dont le rapport est celui même des deux droites, sont nécessairement *premiers entre eux :* car s'ils avaient un facteur commun, 5 par exemple, 5.GB serait contenu un nombre exact de fois dans AB et un nombre exact de fois dans CD; et alors GB ne serait pas la plus grande mesure commune à ces deux droites ; conséquence qui ne peut s'accorder avec la nature de l'opération exécutée ci-dessus. — (Voyez l'*Arithmétique*.)

Scol. 2. — Il est facile de voir que la marche précédente serait également applicable à deux quantités de même nature quelconque, dont on voudrait trouver la plus grande mesure commune, et par suite le rapport numérique, pourvu que ces quantités fussent *comparables par superposition*. Nous aurons de fréquentes occasions de rappeler cette remarque et d'en faire usage.

N° 64. Remarques. — Maintenant, dans l'emploi du procédé général que nous venons d'exposer, il peut se présenter deux cas :

***Ou bien*, après un certain nombre d'opérations partielles, on parvient à un reste qui peut être porté un nombre exact de fois sur le reste précédent, comme il est arrivé dans l'exemple ci-dessus (n° 63). — On dit alors que les deux droites sont *commensurables entre elles*, pour exprimer que leur rapport est un nombre assignable [nombre que l'on obtient d'ailleurs par des substitutions analogues à celles que nous avons exécutées dans le même exemple].**

Ou bien, quelque loin que l'on pousse les opérations partielles, il est impossible de trouver un reste qui soit contenu un nombre exact de fois dans le reste précédent, comme nous en verrons plus tard des exemples. — Dans ce second cas, les deux droites, n'ayant pas de commune mesure assignable, sont dites *incommensurables entre elles*. — Ne pouvant plus alors, comme dans le premier cas, représenter rigoureusement, par un nombre exact, entier ou fractionnaire, la valeur du rapport des deux droites, on est obligé, pour se figurer ce *rapport* ou ce *nombre incommensurable*, de s'en tenir à une *approximation* qu'il faut tâcher de pousser aussi loin que possible. A cet effet, on néglige un des restes successifs fournis par l'opération, en regardant comme complet le quotient qui lui correspond ; le nombre obtenu en conséquence pour le rapport demandé, sera d'autant *plus approché* que l'opération aura été poussée plus loin ; et quant à la véritable valeur du rapport lui-même, ce sera *la limite* vers laquelle tendront continuellement les nombres résultant de cette série d'approximations, supposée indéfinie.

N° 65. Remarquons toutefois que, dans la pratique, le nombre des divisions partielles a toujours nécessairement un terme, soit parce que les restes successifs finissent bientôt par échapper aux sens en raison de leur petitesse, et qu'on est obligé de les négliger dès qu'ils sont devenus inappréciables, soit encore par suite de l'imperfection des instrumens que l'on emploie. En effet, comme, à chaque opération, le compas *se ferme* de plus en plus, ses deux branches finissent toujours par *se joindre* de telle manière qu'il devient *physiquement* impossible de les rapprocher davantage. La distance qui reste alors entre les deux *pointes* considérées comme des *points mathématiques* (n° 4), distance qui est plus ou moins petite suivant le degré de perfection de l'instrument, est bien encore *mesurable* par la pensée ; mais il n'y a plus moyen de continuer effectivement l'opération, bien que les deux droites proposées puissent être essentiellement incommensurables entre elles.

N° 66. Cela posé, l'on dit qu'*il y a proportion entre deux quantités* homogènes entre elles [ou de même nature], A, B, *et deux autres* quantités, A', B', aussi homogènes, ou bien, que *quatre quantités*, A et B, A' et B', *sont proportionnelles*,

quand la recherche du rapport numérique, exécutée sur chaque couple de quantités, conduirait de part et d'autre à *la même série de quotiens*, en nombre limité ou en nombre illimité.

Observons d'ailleurs [et ceci est bien important] qu'il n'est nullement nécessaire à l'exactitude de cette proportion, c'est-à-dire à l'identité des rapports A : B et A' : B', ou des fractions $\frac{A}{B}$ et $\frac{A'}{B'}$, que l'on connaisse actuellement la valeur commune de ces rapports ou de ces fractions, ni même que cette valeur soit susceptible d'être exprimée exactement; tout se réduit à pouvoir constater que, d'après la nature de la question, les deux conditions suivantes se trouveraient toujours remplies dans la double opération dont nous venons de parler :

1° *Que les quotiens qui se correspondent soient constamment égaux deux à deux ;*

Et — 2° *Que l'une des divisions successives ne puisse donner de reste sans que sa correspondante donne aussi un reste.*

Nous aurons bientôt l'occasion d'appliquer ces principes.

Nous devons cependant encore insister sur ce point : que les proportions établies entre des quantités incommensurables entre elles, jouissent absolument des mêmes propriétés, que si les rapports de ces quantités étaient des nombres commensurables. — [Au reste, la preuve de cette assertion appartenant à l'*Arithmétique*, nous y renvoyons.]

N° 67. La théorie des fractions continues peut être employée avec avantage pour donner plus de clarté et de précision à ce qui précède (*).

A cet effet, soient désignées généralement par A et B, comme ci-dessus (n°s 60 et *suiv.*), les deux droites [ou les deux quantités de nature quelconque] dont on veut obtenir le rapport; par q le nombre de fois que la plus petite B peut être portée sur la plus grande A, et par R la droite restante; par q' le nombre de fois que R peut être porté sur B, et par R' le reste correspondant; par q'' le nombre de fois que R' peut être porté sur R, et par R'' le

(*) C'est à M. Ampère que nous sommes redevables de la méthode suivante, qui a déjà été exposée en détail dans la *Géométrie* de M. Nicollet.

reste ; et ainsi de suite. — D'après ces conventions, on aura les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} A &= B\,.\,q + R \ldots (\alpha) \\ B &= R\,.\,q' + R' \ldots (\beta) \\ R &= R'.\,q'' + R'' \ldots (\gamma) \\ R' &= R''.\,q''' + R''' \ldots (\delta) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Or, on déduit de l'égalité (α) :

$$\frac{A}{B} = q + \frac{R}{B},$$

et de l'égalite (β) :

$$\frac{B}{R} = q' + \frac{R'}{R}, \quad \text{d'où} \quad \frac{R}{B} = \frac{1}{q' + \frac{R'}{R}};$$

donc $\left[\text{en substituant dans la valeur de } \frac{A}{B}\right]$:

$$\frac{A}{B} = q + \frac{1}{q' + \frac{R'}{R}}.$$

De même, l'égalité (γ) donne

$$\frac{R}{R'} = q'' + \frac{R''}{R'}; \quad \text{d'où} \quad \frac{R'}{R} = \frac{1}{q'' + \frac{R''}{R'}}.$$

donc $\left[\text{en substituant dans la dernière valeur de } \frac{A}{B}\right]$:

$$\frac{A}{B} = q + \frac{1}{q' + \frac{1}{q'' + \frac{R''}{R'}}}.$$

Et ainsi de suite.

Donc enfin la valeur de $\frac{A}{B}$ se présente sous la forme d'une *fraction continue :*

$$\frac{A}{B} = q + \frac{1}{q' + \frac{1}{q'' + \frac{1}{q''' + \ldots}}}.$$

Maintenant, examinons ce que devient cette fraction continue, dans chacun des deux cas distingués au *numéro* 64.

Dans le premier cas, la fraction continue est *limitée*; et le rapport des deux droites n'est autre chose que *la dernière réduite* (voyez l'*Arithmétique*) qui en provient.

Dans le second, la fraction continue, étant composée d'un nombre *illimité* de *fractions intégrantes*, se prolonge indéfiniment; et alors il faudrait, si cela était possible, la considérer sous cette forme *indéfinie*, pour avoir une véritable *expression du rapport* cherché. Néanmoins on approche de plus en plus de sa valeur, à mesure que l'on prend un plus grand nombre de *fractions intégrantes*, ou que l'on calcule un plus grand nombre de réduites.

En considérant la chose sous le point de vue précédent, on dira qu'il y a proportion entre les *quatre* quantités A, B, A', B', lorsque les deux rapports $\frac{A}{B}$, $\frac{A'}{B'}$, sont susceptibles d'être exprimés par *la même fraction continue*, soit limitée, soit illimitée, et par conséquent de fournir la même série de réduites successives.

N° 68. Enfin, pour ne négliger aucun moyen d'éclaircir l'importante question qui nous occupe, nous indiquerons encore la méthode suivante que nous empruntons au *Traité de Géométrie descriptive* de M. Lefébure de Fourcy. A la vérité, cette méthode ne conduit pas directement à la commune mesure la plus grande, ni par conséquent aux expressions les plus simples du rapport de deux quantités données: [son auteur se proposait un autre but]; mais en revanche, étant entièrement indépendante de la théorie du plus grand diviseur commun et de celle des fractions continues, elle présente un avantage particulier dans les cas les plus ordinaires, où l'on cherche bien moins à déterminer, exactement ou approximativement, la valeur du rapport de deux quantités, qu'à prouver l'identité de deux rapports, c'est-à-dire en un mot, à établir l'existence d'une proportion.

Soient donc, comme dans le *numéro* 63, les deux droites AB, CD (fig. 29), Fig. 29.
dont on veut avoir le rapport; et supposons qu'ayant retranché de la plus grande AB, la plus petite CD, autant de fois que possible (n° 62, *scol.* 1er), nous ayons trouvé que la première comprend la seconde un nombre de fois dont nous représenterons la valeur par *a* [le nombre *a* étant le même que nous avons appelé *q* dans le *numéro* précédent (n° 67)]; et de plus, qu'il y ait un reste EB [moindre que CD].

Divisons ensuite CD en parties aliquotes égales entre elles (n° 62, *scol.* 2) dont chacune soit inférieure [ou égale] à EB (*): soit *a'* le nombre de ces

---

(*) Pour mieux concevoir la possibilité d'obtenir un pareil résultat, supposons que l'on cherche le nombre de fois que CD contient EB (n° 62, *scol.* 1er). Si l'on trouve ainsi pour quotient un nombre entier exact, EB est la commune mesure; et le rapport étant alors commensurable, on peut l'exprimer très aisément. Mais si au contraire l'opération donne un reste, et que la partie entière du quotient soit, par exemple, le nombre 7; dans ce cas

parties contenues dans AB *avec un reste* FB, et b' le nombre de celles que contient *exactement* CD.

Divisons encore CD en un nombre [plus grand] de parties égales, dont chacune soit inférieure [ou égale] à FB; et soient a'' et b'' les nombres de ces parties, contenus respectivement, dans AB *avec un reste* GB, et dans CD *exactement*.

Et ainsi de suite.

Cela posé, les longueurs AE, AF, AG.... vont en croissant; et l'on peut en trouver une qui diffère de AB aussi peu que l'on voudra.

Les valeurs des fractions $\frac{a}{1}$, $\frac{a'}{b'}$, $\frac{a''}{b''}$...., qui expriment les rapports de ces longueurs, à la longueur CD, vont donc aussi en croissant et tendent vers une *limite*; et cette limite est *le rapport* même de AB à CD (n° 64).

Le nombre des fractions $\frac{a}{1}$, $\frac{a'}{b'}$, $\frac{a''}{b''}$.... n'est pas nécessairement indéfini; il est limité toutes les fois que l'on arrive à une partie aliquote de CD, contenue un nombre exact de fois dans AB. Dans ce cas particulier, la dernière fraction représente le rapport cherché, rapport qui est alors commensurable; dans tous les cas contraires, ce rapport est incommensurable.

Enfin, quand deux couples de quantités, A et B, A' et B', conduisent à la même série de fractions, $\frac{a}{1}$, $\frac{a'}{b'}$, $\frac{a''}{b''}$...., en nombre limité ou en nombre illimité, on a, entre ces quantités, la proportion

$$A : B :: A' : B'.$$

---

on divise CD en 8, ou 9, ou 10... parties égales (n° 62, *scol.* 2) [au moins *une de plus* qu'il n'y a d'unités dans le quotient]: et ces parties se trouvent essentiellement moindres que EB.— Même raisonnement pour la suite de la démonstration.

Au surplus, il n'est nullement nécessaire de savoir exécuter l'opération qui vient d'être décrite, mais seulement d'en concevoir la possibilité (*voyez* la *note* de la *page* 34).

N. B. — On fera bien de consulter, dès à présent, à la fin du volume, la *Note* B, dans laquelle nous avons donné une courte exposition du *Système métrique usuel*. — On pourra voir également, dans la *Note* A, ce qui est relatif au *vernier rectiligne*.

Digitized by Google

PREMIÈRE PARTIE.

GÉOMÉTRIE PLANE.

Digitized by Google

N. B. — Dans cette première partie ou dans la Géométrie plane (n° 15), toutes les figures seront supposées dans un seul et même plan.

Digitized by Google

PRÉLIMINAIRES DE LA GEOMETRIE PLANE.

N° 69. D'après ce que nous avons déjà dit au *numéro* 12, on nomme ANGLE [et quelquefois ANGLE PLAN], chaque *portion indéfinie de plan, comprise entre deux droites*, AB, CD (fig. 6), *qui concourent* (n° 8), ou *se coupent*, en un point O. Fig. 6.

Ce *point de rencontre* O est le *sommet* commun (n° 12) des quatre angles formés par les deux droites AB, CD; et chacun des segmens indéfinis OA, OB, OC, OD, est un *côté* commun à deux angles *consécutifs* : [cette dernière expression s'appliquant aux angles qui ont LE *même sommet* et UN *même côté*].

Un angle se désigne ordinairement par *trois* lettres, dont deux indiquent des points pris respectivement sur les côtés, et dont la troisième, qui doit toujours être placée entre les deux autres dans l'énoncé, indique le sommet. Ainsi, les angles de la *figure* 6 s'énoncent : AOC, COB, BOD, DOA.

Cependant, on peut désigner simplement un angle, AOB (fig. 7), sur tout quand il est isolé, par la seule lettre, O, du sommet, et dire : *l'angle* O. — On peut encore, même quand plusieurs angles, consécutifs (fig. 30) ou non, ont le même sommet, les désigner chacun par une seule lettre : *m*, *n*, *p* ... ou par un *numéro* d'ordre : 1, 2, 3... Fig. 7. Fig. 30.

N° 70. Les *deux angles* AOC et DOB (fig. 6), *dont chacun est compris entre les prolongemens des côtés de l'autre*, sont dits des *angles opposés ;* il en est de même des angles AOD et BOC. Fig. 6.

Au contraire, *deux angles consécutifs qui ont un côté commun et dont les autres côtés sont* mutuellement *les prolongemens l'un de l'autre*, sont dits des *angles adjacens :* tels sont les angles AOC et COB (fig. 6), COB et BOD, BOD et DOA, DOA et AOC, pris ainsi deux à deux.

Enfin, l'on nomme *bissectrice* d'un angle AOB (fig. 31), la droite OC qui partage cet angle en deux angles égaux (n° 3), AOC, COB. Fig. 31.

N° 71. **On conçoit [et nous démontrerons d'ailleurs par la**
Fig. 32. suite] que deux droites, telles que AB, CD (fig. 32), quoique indéfinies, peuvent être situées dans un même plan, de manière cependant à ne pas se couper.

Or, on nomme PARALLÈLES, des *droites* ainsi *contenues dans un même plan, et qui ne peuvent se rencontrer, quelque loin qu'on les prolonge.*

N° 72. On appelle généralement *transversale,* toute ligne qui *coupe* ou qui *traverse* d'une manière quelconque, une autre ligne, ou un *système* [assemblage] d'autres lignes.

Fig. 33. Cela posé, lorsque deux droites quelconques, AB, CD (fig. 33), parallèles ou concourantes, sont rencontrées par une transversale EF, il en résulte, autour des *deux* points de rencontre, M, N, *huit* angles qui, considérés isolément ou comparés deux à deux, prennent les dénominations suivantes :

Considérés *isolément,*

1° Les quatre angles AMF, BMF, CNE, DNE, dont l'ouverture est *en dedans* des droites AB, CD, se nomment des *angles internes ;*

2° Les quatre angles AME, BME, CNF, DNF, dont l'ouverture est *en dehors* des droites AB, CD, se nomment des *angles externes ;*

Comparés *deux à deux,*

1° Les angles AMF et CNE, BMF et DNE, sont *internes d'un même côté* [de la sécante];

2° Les angles AME et CNE, BMF et DNF, sont *externes d'un même côté;*

3° Les angles internes AMF et DNE, CNE et BMF [situés, l'un d'un côté, l'autre de l'autre, de la sécante], sont *alternes-internes ;*

4° Les angles externes AME et DNF, BME et CNF, sont *alternes-externes ;*

5° Enfin, les angles AME et CNE, AMF et CNF, BME et DNE, BMF et DNF, situés ainsi, deux à deux, d'un même côté de la sécante, mais l'un en dedans des deux droites AB, CD, et l'autre en dehors, sont dits, pour cette dernière raison,

des *angles interne-externe*, ou des angles *correspondans* ; et bien que cette dernière dénomination soit assez impropre, nous l'emploierons de préférence comme plus abrégée.

N° 73. On nomme généralement POLYGONE (fig. 3, 34, et 35), un *système* quelconque *de lignes qui se coupent*. — Le polygone est dit *rectiligne* lorsque toutes ces lignes sont droites, ce qui est le cas le plus commun. Fig. 3, 34, et 35.

Ordinairement, on suppose en outre que les droites sont situées dans un même plan, qu'elles sont déterminées de longueur (n° 5), et limitées deux à deux par les mêmes points : alors le *polygone* n'est autre chose qu'une *ligne brisée plane* (n°s 6 et 14). — Les segmens de droites (n° 5) qui composent le polygone sont dits les *côtés* de ce polygone ; leurs points d'intersection sont dits les *sommets* ; et enfin leurs angles se nomment les *angles* du polygone.

Chaque angle formé par deux côtés consécutifs d'un polygone, est dit *compris* entre ces côtés ; et deux angles dont les sommets terminent un même côté, sont dits *adjacens* à ce côté.

Un polygone est dit *ouvert*, lorsque la première extrémité du premier côté ne coïncide pas avec la dernière extrémité du dernier côté (fig. 3). — Dans le cas contraire, où il circonscrit une portion de plan (fig. 34 et 35), il est dit *fermé*, et le nombre des angles est alors visiblement le même que celui des côtés.

N° 74. Comme, le plus souvent, c'est d'un polygone fermé qu'il s'agit, on cesse alors de considérer les côtés en eux-mêmes, et l'on entend par le mot *polygone*, une *portion de plan circonscrite par un système de droites* [ou plus généralement de lignes quelconques] *qui se coupent deux à deux*.

On nomme *périmètre* [ou *contour*] du polygone, l'*ensemble* [ou plus souvent la *somme*] des côtés, supposés terminés respectivement aux sommets de ce polygone.

Il faut évidemment au moins *trois* droites pour circonscrire une portion de plan ; d'où il suit qu'un polygone fermé ne peut avoir moins de *trois* côtés. — Le plus simple des polygones

4..

est donc celui de *trois* côtés, que l'on nomme TRIANGLE [ou *trilatère*]. — Le polygone le plus simple après le *triangle*, est celui de *quatre* côtés, que l'on nomme *quadrilatère* [et quelquefois *quadrangle*]. — [Nous donnerons plus tard les noms particuliers aux autres polygones.]

Fig. 34. Enfin, l'on nomme *diagonales*, les droites, AC, AD, BD, BE, CE (fig. 34), qui lient deux à deux les sommets des angles non adjacens à un même côté. — Un triangle ne peut donc avoir de diagonales.

N° 75. Un polygone est dit *équilatéral* s'il a tous ses côtés égaux ; il est dit *équiangle* s'il a tous ses angles égaux. — Un polygone qui est à la fois *équilatéral et équiangle* se nomme un *polygone régulier*.

Deux polygones d'un même nombre de côtés sont dits *équilatéraux entre eux* s'ils ont leurs côtés égaux chacun à chacun et assemblés de la même manière ; — ils sont dits *équiangles entre eux* s'ils ont leurs angles égaux chacun à chacun et disposés dans le même ordre.

Fig. 36. Un *polygone* ABCD. . . (fig. 36) est dit *inscrit* à un cercle lorsque tous ses côtés sont des cordes du cercle ; — et réciproquement le *cercle* est dit *circonscrit* au polygone.

Fig. 37. Un *polygone* ABCD. . . . . (fig. 37) est dit *circonscrit* à un cercle lorsque tous ses côtés sont *tangens* au cercle ; — et réciproquement le *cercle* est dit *inscrit* au polygone.

Un polygone est dit *inscriptible* ou *circonscriptible* [au cercle], suivant que l'on peut circonscrire ou inscrire un cercle à ce polygone.

Enfin, l'on peut dire aussi qu'un *polygone* est *inscrit à un autre* polygone, lorsque les sommets du premier sont situés sur les côtés du second ; — et réciproquement, le second est dit *circonscrit* au premier.

LIVRE PREMIER.

DES FIGURES CONSIDÉRÉES DANS UN PLAN.

CHAPITRE PREMIER.

THÉORIE DES PERPENDICULAIRES ET DES OBLIQUES. — DES ANGLES DROITS EN PARTICULIER.

Paragraphe Ier. — *Figures Rectilignes.*

N° 76. Lorsqu'une *droite* AB (fig. 38) est *rencontrée par un segment indéfini* (n° 5) CO *d'une autre droite qui fait avec elle deux angles adjacens* (n° 69), AOC, COB, *égaux* entre eux, chacun de ces angles est dit un Angle Droit; — et l'on nomme Perpendiculaire *à* [ou *sur*] une droite AB, une *seconde droite* OC *qui rencontre la première* [ou *tombe sur* la première], *de manière à faire* ainsi *avec elle deux angles adjacens égaux;* — le point de rencontre O est *le pied de la perpendiculaire*. Fig. 38.

Cette perpendiculaire peut être considérée, ou comme indéfinie, ou comme terminée au point O et à un autre point, C par exemple (n° 5). Quand la perpendiculaire est *menée* par un point O pris *sur* une droite AB, on dit qu'elle est *élevée* sur cette droite; et quand elle est menée par un point C pris *hors* d'une droite AB, on dit qu'elle est *abaissée* sur la droite. Ces expressions sont employées surtout dans la résolution des problèmes, et plus généralement dans l'explication des constructions.

Digitized by Google

N° 77. Mais maintenant, il est nécessaire de motiver la
Fig. 38. dénomination de *perpendiculaire*, appliquée à la droite OC (fig. 38) considérée comme indéfinie dans les deux sens, en
Fig. 39. faisant voir qu'un segment indéfini (n° 5), OC (fig. 39), d'une droite CD, ne peut être perpendiculaire sur une autre droite AB, sans que le second segment OD de la première droite soit aussi perpendiculaire sur la seconde.

En effet, d'abord la droite AB partage le plan des deux droites (n° 12) en deux moitiés superposables (n° 13), et ensuite les angles AOC, BOC, sont égaux d'après les définitions (n° 76); donc chacun de ces deux angles est *le quart du plan* total. Mais la droite CD partage aussi le plan en deux moitiés superposables; donc l'angle AOD et par suite l'angle BOD sont aussi chacun un quart du plan total : et par conséquent, les quatre angles formés autour du point O comme sommet commun, sont égaux.

Ainsi, non-seulement les segmens indéfinis OC et OD sont perpendiculaires à la droite AB, mais en même temps les segmens indéfinis OA et OB sont aussi perpendiculaires à la droite CD; c'est pourquoi l'on dit alors que les deux *droites* sont *perpendiculaires entre elles*, ou plus simplement, qu'elles sont *perpendiculaires*.

N° 78. Ce qui vient d'être dit (n° 77) peut se résumer dans les propositions suivantes :

1° *Lorsqu'une droite* CD (fig. 39) *est perpendiculaire sur une autre* AB, réciproquement aussi *la seconde droite* AB *est perpendiculaire sur la première* CD;

2° *Tous les angles droits sont égaux :*

Proposition qui ne doit pas s'entendre seulement des angles formés par deux droites perpendiculaires entre elles en un point O, mais de tous les angles droits possibles, quels que soient leurs sommets respectifs, O, O'...;

Et enfin — 3° *L'un des quatre angles formés par deux droites qui se coupent, ne peut être égal à un angle droit, sans que les trois autres le soient aussi.*

N° 79. Lorsque deux droites, AB, CD (fig. 6), se rencontrent [en un point O] de manière à faire des *angles* (n° 69) *inégaux*, elle sont dites *obliques* l'une *à* l'autre [ou l'une *sur* l'autre], ou simplement, *obliques entre elles*. Fig. 6.

Si l'une de ces droites, par exemple AB, est considérée comme indéfinie, et que l'autre soit supposée réduite à un segment OC, c'est cette seconde droite que l'on appelle plus particulièrement *l'oblique*; — et le point de rencontre O en est *le pied* (*voyez* le n° 76).

N° 80. LEMME. Fig. 40.

Dans tout triangle [rectiligne] (n° 74) ABC, *un côté quelconque est* — 1° *plus petit que la somme des deux autres*, — et — 2° *plus grand que leur différence.* Fig. 40.

1° La première partie de l'énoncé résulte immédiatement de ce que la ligne droite est le plus court chemin d'un point à un autre.

2° Quant à la seconde partie, supposons, par exemple, AC > BC : il s'agit de prouver que l'on a

$$AB > AC - BC\,;$$

or, c'est une conséquence évidente de ce que, d'après la première partie de la proposition, qui est également vraie pour chacun des trois côtés, on a

$$AB + BC > AC:$$

en effet, retranchant BC des deux membres de cette dernière inégalité, on obtient la précédente qui se trouve ainsi démontrée.

COROLLAIRE. — *Dans tout triangle* ABC, *si l'on joint par des droites les extrémités d'un même côté* AB *avec un point intérieur* D, *la somme des deux autres côtés est plus grande que la somme des droites intérieures.*

En effet, en prolongeant AD par exemple, jusqu'à la rencontre de BC en E, on aura, Fig. 40.

Digitized by Google

dans le triangle ACE, ...AE $<$ AC $+$ CE,
et dans le triangle DEB,.... DB $<$ DE $+$ EB;
d'où l'on tire, en ajoutant ces deux inégalités membre à membre,

$$AE + DB < AC + DE + CE + EB,$$

ou

$$AD + DE + DB < AC + DE + CB;$$

et de là, en retranchant DE des deux membres,

$$AD + DB < AC + CB;$$

Ce qu'il fallait démontrer.

N° 81. THÉORÈME I. Fig. 41.

Fig. 41. *Par un point* O *pris sur une droite* AB, — 1° *On peut toujours élever une perpendiculaire;* — et — 2° *On n'en peut élever qu'une* [dans un même plan avec la droite].

1° La première partie de la proposition est évidente, puisqu'elle revient à dire (n° 76) que par le point O l'on peut toujours imaginer une droite OP qui fasse avec AB deux angles adjacens égaux, AOP, POB.

2° La seconde partie n'est pas moins visible : car, pour que l'on pût *élever* (n° 76) sur AB, et d'un même côté, les deux perpendiculaires OP, OG, il faudrait que chacune des deux droites OP, OG, fît avec AB deux angles adjacens égaux; et alors on aurait

$$AOP = AOG = BOG = BOP;$$

Ce qui est absurde (n° 30). — Quant à deux perpendiculaires distinctes, élevées par un même point O, l'une d'un côté de AB, l'autre de l'autre, leur existence simultanée est également impossible d'après le *numéro* 78 (3°).

N° 82. THÉORÈME II. Fig. 42.

Fig. 42. *D'un point* O *pris hors d'une droite* AB, — 1° *On peut toujours abaisser une perpendiculaire;* — et — 2° *On n'en peut abaisser qu'une.*

1° Du point O à un point quelconque G pris sur AB, menons la droite OG; puis, faisons tourner la figure autour de AB comme charnière, de manière à la rabattre, dans son plan primitif, de l'autre côté de AB : et soit O'G la nouvelle position de la droite OG. Alors, en menant la droite OPO', coupant AB en P, cette droite sera perpendiculaire à AB (n° 76) puisque les angles OPG, O'PG, seront nécessairement égaux. Fig. 42.

2° Je dis qu'il est impossible qu'aucune droite passant par le point O et différente de OP, telle, par exemple, que la droite OG, soit perpendiculaire à AB. En effet, les deux segmens de droites GO, GO', devraient être, d'après ce qui précède, les prolongemens l'un de l'autre, puisqu'ils sont tous deux perpendiculaires à AB, et que par un point pris *sur* une droite, il ne peut passer qu'une seule perpendiculaire à cette droite (n° 81, 2°). Et comme d'ailleurs PO et PO' font partie d'une droite unique, il s'ensuivrait que par deux points, O, O', on pourrait mener deux droites différentes, OGO', OPO'; — *Ce qui est absurde.*

N° 83. Théorème III. Fig. 43.

La perpendiculaire OC *abaissée sur une droite* AB, *d'un point extérieur* O, *est le plus court chemin du point à la droite.* Fig. 43.

D'abord, la ligne droite étant le plus court chemin entre deux points donnés, il ne peut y avoir à comparer que des droites menées du point O aux différens points de la droite AB.

Cela posé, prouvons que la perpendiculaire OC est plus courte que toute oblique OD. Pour cela, faisons tourner la portion de figure OCD autour de AB comme charnière, de manière à la rabattre, dans son plan primitif, de l'autre côté de AB, en O'CD : nous aurons

$$O'C = OC, \qquad O'D = OD;$$

de plus, OCO' étant une ligne droite (n° 81, 2°), il en résultera :

$$OC + O'C < OD + O'D, \quad \text{ou} \quad 2.OC < 2.OD;$$

Fig. 43. d'où, en prenant la moitié de part et d'autre,

$$OC < OD; \qquad C. Q. F. D.$$

Corollaire. — *La perpendiculaire abaissée d'un point sur une droite, mesure la vraie distance du point à la droite.*

Scolie. — La distance CD (fig. 43) est dite la *projection* de OD sur AB. — En général, la projection d'une droite déterminée de
Fig. 44. longueur, MN (fig. 44), sur une autre droite indéfinie AB, est la *distance*, PQ, *des pieds des perpendiculaires* abaissées des extrémités de la première droite, sur la seconde.

N° 84. Théorème IV. Fig. 45.

Fig. 45. Si d'un point O extérieur à une droite AB, on mène à cette droite la perpendiculaire OC et différentes obliques, OD, OD′, OE, . . . :

1° *Deux obliques*, OD, OD′, *qui s'écartent également de la perpendiculaire* [c'est-à-dire, telles que l'on ait $CD = CD'$], *sont égales;*

2° *De deux obliques*, OD, OE, *qui s'écartent inégalement de la perpendiculaire* [de sorte que l'on ait $CD < CE$], *celle*, OE, *qui s'en écarte le plus, est la plus longue.*

1° Plions la figure le long de la perpendiculaire OC : les points D et D′ se confondront puisque $CD = CD'$;

donc $$OD = OD'.$$

2° Plions la figure le long de la droite AB : nous aurons,

d'abord $O'D = OD, \quad O'E = OE;$

puis $OD + O'D < OE + O'E$ (n° 80), ou $2.OD < 2.OE$;

et de là, en prenant la moitié de part et d'autre,

$$OD < OE.$$

N. B. — Le raisonnement précédent semblerait supposer que les obliques, OD, OE, dont il s'agit, sont situées du

même côté de la perpendiculaire; mais il n'en est pas ainsi, parce que [*d'après* 1°] l'on peut remplacer OD par son égale OD'. Fig. 45.

COROLLAIRE. — *Entre une droite* indéfinie *et un point extérieur on ne saurait mener plus de deux droites égales :*

Sans quoi il existerait au moins, soit deux obliques égales d'un même côté de la perpendiculaire, soit une oblique égale à cette perpendiculaire.

Scolie. — Dans le théorème précédent, on a fait toutes les hypothèses possibles sur la grandeur des écartemens relatifs de deux obliques, par rapport à une perpendiculaire, [toutes ces lignes étant supposées menées à une même droite d'un même point extérieur]; et de plus, ces diverses hypothèses ont conduit à des conséquences toutes contradictoires entre elles : donc *les réciproques* des deux propositions que comprend, à proprement parler, le *théorème* IV, *sont vraies*, d'après le principe général du *numéro* 51.

Ainsi *Réciproquement :* — Si d'un point extérieur à une droite, on mène une perpendiculaire et différentes obliques à cette droite :

1° Deux obliques égales s'écartent également de la perpendiculaire;

2° De deux obliques inégales, la plus longue s'écarte le plus de la perpendiculaire.

N° 85. THÉORÈME V. Fig. 46.

1° *Tout point* E *de la perpendiculaire* CD *élevée sur une droite* [déterminée de longueur] AB, *par son milieu* C, *est également distant des deux extrémités de la droite;* Fig. 46.

2° *Tout point* F *extérieur à la perpendiculaire est inégalement distant des mêmes extrémités.*

En effet : — 1° Menons les droites AE, BE : nous aurons

$$AE = BE, \text{ puisque } AC = BC \text{ (n° 84)};$$

Fig. 46. 2° Menons AF, BF; et par le point E où BF coupe CD, menons encore AE : nous aurons

$$AF < AE + EF, \quad \text{ou} \quad AF < BE + EF,$$

ou enfin $$AF < BF.$$

Réciproque qui n'a pas besoin de démonstration (n° 51) :

1° Tout point également distant des extrémités d'une droite appartient à la perpendiculaire menée par son milieu;

2° Tout point inégalement distant des mêmes extrémités est extérieur à la perpendiculaire.

COROLLAIRE. — *La perpendiculaire élevée sur une droite par son milieu, est le* LIEU GÉOMÉTRIQUE *de tous les points* [du plan de la figure] *qui sont également distans de ses extrémités.*

SCOLIE 1er. — Le théorème précédent donne encore lieu à plusieurs autres propositions que l'on peut considérer comme autant de nouvelles réciproques, et qui sont évidentes d'après le principe du *numéro* 49. — Nous ne citerons que la suivante :

Si deux points, D, E (fig. 46), *sont, chacun en particulier, à une même distance de deux autres points*, A, B, *la droite* DE *menée par les deux premiers est perpendiculaire sur le milieu de la droite* AB *qui joint les deux derniers.*

Scol. 2. — On peut ajouter à la seconde partie de l'énoncé du théorème précédent et de ses réciproques, que le point F et le point A [ou celle des deux extrémités A, B, qui est la plus rapprochée de F] sont toujours du même côté de la perpendiculaire CD.

N° 86. REMARQUE. — Nous avons rencontré dans le courant de ce chapitre, et nous rencontrerons encore, plusieurs circonstances où *le rabattement seul* suffit (n° 45) pour faire coïncider deux figures ou deux portions de figure. La théorie des perpendiculaires nous met à même de conclure que pareille chose a lieu pour toute *figure* plane, ABCDE... A'B'C'D'E'...

Fig. 47 et 48. (fig. 47 et 48), *dont les points sont, deux à deux, distribués*

de part et d'autre d'une certaine droite MN *de ce plan, à une même distance et sur une même perpendiculaire pour chaque couple de points.* Fig. 47 et 48.

La figure est alors dite *symétrique par rapport à la droite* MN, qui en est un *axe de symétrie* (n° 44).

On peut définir simplement l'*axe de symétrie* en disant que c'est une *droite qui partage une figure en deux moitiés, de telle manière qu'en pliant cette figure suivant la droite, les deux moitiés se superposent inversement.*

C'est, par exemple, ce qui arrive pour la perpendiculaire élevée sur une droite par son milieu (n° 85), pour la bissectrice d'un angle (n° 69), etc.

La considération des axes de symétrie peut être utile pour simplifier beaucoup de démonstrations : car bien souvent, des considérations analogues à celles des *numéros* 48 et 49, rendent évidente dans une figure, l'existence de pareilles droites ; et alors on peut conclure immédiatement l'égalité des deux parties de cette figure. — Ainsi par exemple, avant même que la proposition du *numéro* 18 soit démontrée, il est évident que,

Tout diamètre d'un cercle en est un axe de symétrie :

Car *il n'y a aucune raison* pour que, si l'on *pliait* la figure suivant ce diamètre, l'une des deux parties débordât l'autre ; ou si l'on aime mieux, il ne saurait exister de pareille raison qui ne fût applicable à chacune des deux parties en même temps ; et alors chacune d'elles devrait, à la fois et dans les mêmes points, *déborder* l'autre et en être débordée ; — *Ce qui est absurde.*

Cette manière de raisonner est tout aussi rigoureuse que la forme de démonstration employée dans le *numéro* cité (n° 18) ; elle est applicable dans un grand nombre de circonstances, et particulièrement dans plusieurs des théorèmes qui suivront.

§ II. — *Des Perpendiculaires considérées dans le Cercle. — Des Droites Extérieures, Tangentes, et Sécantes à la Circonférence.*

N° 87. THÉORÈME VI.

Une droite et une circonférence de cercle ne peuvent se rencontrer en plus de deux points.

En effet, les rayons menés aux points communs sont des droites égales ; et il ne peut y en avoir plus de deux (n° 84, *coroll.*).

COROLLAIRE. — *Toute sécante à un cercle coupe la circonférence en deux points*, et non davantage.

[On verra par la suite, que certaines autres courbes peuvent avoir avec une sécante, *plus de deux* points communs.]

SCOLIE. — Une droite et un cercle situés dans un même plan (*voyez* le n° 21), ne peuvent avoir que *trois* positions relatives essentiellement différentes : — la droite peut être

Fig 49. 1° *Extérieure au cercle* [telle que MN] (fig 49),

Fig. 14. 2° *Tangente au cercle* [en *un* point A, telle que ST] (fig. 14),

3° *Sécante au cercle* [en *deux* points A, B] (fig. 14);

N° 88. THÉORÈME VII. Fig. 10.

Fig. 10. *Le milieu* I *d'une corde* AB *et les milieux*, C, D, *des arcs correspondans, sont toujours sur un même diamètre perpendiculaire à la corde.*

En effet, en répétant le raisonnement du *numéro* 19, on voit d'abord que le diamètre mené par le milieu C de l'arc ACD, passe aussi par le milieu D de l'arc ADB restant de la circonférence, ainsi que par le milieu I de la corde commune.

En second lieu, puisque, dans la superposition des demi-cercles CAD et CBD (n° 19), les demi-cordes IA et IB prennent la même direction, il s'ensuit que le diamètre COD et la corde AB sont perpendiculaires (n° 76).

SCOLIE 1er. — La droite CD satisfait aux *cinq* conditions suivantes : — elle passe [1°] par le centre O, [2°] par le point I, [3° et 4°] par les points C, D ; et [5°] elle est perpendiculaire à AB. — Or, *deux* de ces conditions entraînant toutes les autres (n°s 8, et 81 ou 82), on peut en conclure, conformément au principe du *numéro* 49, l'existence d'autant de propositions distinctes et *réciproques* les unes des autres, qu'il y a de manières de combiner 5 choses en les prenant 2 à 2. — Nous citerons particulièrement les *trois* propositions suivantes :

Réciproque 1re. — *Le rayon perpendiculaire à une corde divise cette corde et les arcs correspondans, chacun en deux parties égales ;*

Récipr. 2. — *La perpendiculaire élevée sur une corde par son milieu, contient les milieux des arcs correspondans ainsi que le centre ;*

Récipr. 3. — *La flèche* (n° 19), IC ou ID (fig. 10), *d'un arc*, ACB ou ADB, *est perpendiculaire à sa corde* AB. Fig. 10.

Corollaire. — *Deux cordes ne peuvent se couper mutuellement en deux parties égales sans passer à la fois par le centre :*

Car si l'on menait une droite, du centre au point de rencontre des deux cordes, cette droite serait à la fois perpendiculaire à toutes deux ; — *Ce qui est absurde* (n° 81, 2°).

Scol. 2. — Le segment de droite AI (fig. 10), perpendiculaire au diamètre CD, se nomme le Sinus *des arcs* AC et AD. — On le définit généralement ainsi : la *perpendiculaire, déterminée de longueur, abaissée d'une extrémité de l'arc, sur le rayon qui aboutit à l'autre extrémité.* — Ainsi, le *sinus* d'un arc est la *demi-corde* de l'*arc double.* — [Tout arc a *deux sinus* d'après la définition, puisqu'il a *deux* extrémités ; mais ces deux sinus sont égaux en longueur.]

Le sinus d'un arc est plus petit que la corde de cet arc (n° 83), *et à plus forte raison plus petit que l'arc lui-même* (n° 5).

Le sinus d'un quadrant (n° 19) *est égal au rayon.*

Le même segment de droite AI, perpendiculaire au diamètre CD, est encore dit une *ordonnée au diamètre.*

N° 89. Théorème VIII. Fig. 14.

La perpendiculaire ST *élevée à l'extrémité d'un rayon* OA, *est tangente en ce point à la circonférence ; — et réciproquement.* Fig. 14.

En effet, tout autre point de la perpendiculaire ST est plus distant du centre, que le point A ; donc cette perpendiculaire n'a que ce point commun avec la circonférence : donc elle lui est tangente en ce point (n° 21).

Réciproque 1re. — *La tangente est perpendiculaire au rayon qui aboutit au point de tangence.*

En effet, tout autre point de la tangente est plus distant du centre, que le point de tangence; donc, etc. (n° 83).

COROLLAIRE.—*Par un point donné sur une circonférence on ne peut mener qu'une seule tangente* (n° 81, 2°).

SCOLIE 1er. — On peut faire, sur ce théorème, une remarque analogue à celle du *numéro* précédent (n° 88, *scol.* 1er); d'où résulte encore l'existence des nouvelles *réciproques* suivantes :

RÉCIPR. 2. — *La perpendiculaire abaissée du centre sur la tangente, passe par le point de tangence.*

RÉCIPR. 3. —*La perpendiculaire élevée au point de tangence sur la tangente, passe par le centre;*

Scol. 2. — Le *théorème* VIII pourrait aussi se déduire comme corollaire, du *théorème* VII, par la raison que celui-ci ne doit pas cesser d'avoir lieu quand la sécante [ou la corde prolongée (n° 21)] devient tangente.

N° 90. THÉORÈME IX. Fig. 50.

Fig. 50. Dans un même cercle O [ou dans des cercles égaux]:

1° *A des arcs égaux correspondent des cordes égales, et ces cordes sont également distantes du centre;*

2° *A un plus grand arc correspond une plus grande corde, et cette plus grande corde est la moins distante du centre :*

[On suppose, dans l'énoncé, que *les arcs ne dépassent pas une demi-circonférence*].

1° La première partie de ce théorème [dont nous avons déjà fait usage (n° 20)], n'a, pour ainsi dire, besoin d'aucune démonstration, puisque l'on peut opérer immédiatement la superposition sans déplacer le centre commun, et par conséquent sans changer les distances de ce centre aux cordes des arcs.

2° Soient deux arcs inégaux, un plus grand ACB, et un plus petit ACB′, que l'on peut [*d'après* 1°] supposer placés de telle manière qu'ils commencent en un même point A, et se trouvent du même côté par rapport à ce point; soient encore OI, OI′, les perpendiculaires abaissées du centre O respectivement sur les cordes AB, AB′; soit enfin G le point d'intersection de OI′ avec AB.

[Il faut remarquer d'abord, que, le point B' étant situé entre le point A et le point B, de même le milieu de l'arc ACB' le serait entre le point A et le milieu de l'arc ACB, et que par conséquent le point G se trouve entre le même point A et le point I. — Cela posé :] Fig.50.

Il s'agit de démontrer que l'on a $AB > AB'$, ou, ce qui revient au même, $AI > AI'$ (n° 88); et que $OI < OI'$.

Pour cela, on a d'abord :

$$AI > AG, \quad \text{et} \quad AG > AI' \text{ (n° 83)};$$

donc *à fortiori* $AI > AI'$.

En second lieu, on a de même :

$$OI < OG, \quad \text{et} \quad OG < OI';$$

donc $OI < OI'$.

Scolie 1er. — Le *théorème* IX étant, en réalité, la réunion de *plusieurs théorèmes* distincts dans lesquels le sujet et l'hypothèse sont les mêmes (n° 33), il en résulte également *plusieurs réciproques* différentes. Ces réciproques, qui sont nécessairement *vraies* d'après le principe général établi au *numéro* 51, sont les suivantes :

Réciproque 1re. — Dans un même cercle, etc..... :

1° A des cordes égales correspondent des arcs égaux, et ces cordes sont également distantes du centre;

2° A une plus grande corde correspond un plus grand arc, et cette plus grande corde est la moins distante du centre :

[On suppose, etc. . . . .]

Récipr. 2. — 1° Des cordes également distantes du centre sont égales, et il leur correspond des arcs égaux ;

2° Une corde moins distante du centre est plus grande, et il lui correspond un plus grand arc.

Scol. 2. — Les propositions précédentes supposent essentiellement, et conformément à l'énoncé, que les arcs ne dépassent pas une demi-circonférence. Dans le cas contraire il faudrait modifier ces propositions, mais seulement dans ce qu'elles ont de relatif aux arcs.

Scol. 3. — Il est important d'observer que

Les cordes et les arcs, bien que croissant et décroissant en même temps [lorsque les arcs sont au plus égaux à la demi-circonférence], *ne sont pas proportionnels* (voyez le n° 20).

Scol. 4. — La distance du centre à une corde varie entre *zéro* et le rayon ; à la première limite la corde est un diamètre ; à la seconde elle devient nulle, et sa direction est tangente au cercle (n° 21).

De plus, — *Suivant qu'une droite est extérieure, tangente, ou sécante à un cercle, la distance du centre à cette droite est supérieure, égale, ou inférieure au rayon ; — et réciproquement* (n° 51).

N° 91. Théorème X. Fig. 51.

Fig. 51. *La plus petite corde que l'on puisse mener à un cercle par un point intérieur* I [différent du centre], *est la perpendiculaire* CD *au diamètre* AB *qui passe par ce point.*

En effet, soit MN une autre corde quelconque passant par le même point, et OK sa distance au centre O ; la perpendiculaire OK étant plus courte que l'oblique OI, il s'ensuivra (n° 90) :

$$MN > CD; \qquad C. Q. F. D.$$

N° 92. Théorème XI. Fig. 52.

Fig. 52. *Si d'un point* I *intérieur à un cercle* [et différent du centre] *on mène le diamètre* AB *et différentes cordes*, MN, M'N', PQ.... :

1° *Deux cordes*, MN, M'N', *qui font avec le diamètre des angles égaux, sont égales ;*

2° *De deux cordes*, MN, PQ, *qui font avec le diamètre des angles inégaux, celle*, PQ, *qui fait le plus petit angle* [aigu] *est la plus longue.*

[Remarquons d'abord que si l'on mène par le point I la corde CD perpendiculaire au diamètre AB, les pieds K, K', L..... des perpendiculaires abaissées du centre O sur les cordes MN, M'N', PQ...., tomberont dans le plus grand, CBD, des deux segmens CAD, CBD, déterminés par la corde

CD; sans quoi ces perpendiculaires seraient plus longues que l'oblique OI, ce qui est impossible. — Cela posé:] Fig.52.

1° Si l'on plie la figure le long du diamètre AB, les cordes MN, M'N', coïncideront, puisque les angles NIB, N'IB, sont égaux par hypothèse; et par conséquent, les perpendiculaires OK, OK', se confondront pareillement. Les cordes MN, M'N', sont donc également distantes du centre, et sont par conséquent égales (nº 90, *récipr.* 2).

2° La perpendiculaire OK coupant nécessairement la corde PQ en un point G, on a ainsi (nº 83) :

$$OL < OG, \quad \text{et} \quad OG < OK,$$

et par conséquent, *à fortiori*,

$$OL < OK;$$

d'où il suit (nº 90) que la corde PQ est plus grande que la corde MN.

Les *réciproques* de ce théorème sont *évidentes* (nº 51).

§ III. — *Continuation du précédent. — Des Cercles Sécans, Tangens, Extérieurs et Intérieurs les uns aux autres.*

Nº 93. THÉORÈME XII. Fig. 53.

Deux circonférences de cercle ne peuvent avoir plus de deux points communs [sans se confondre]. Fig.53.

En effet, supposons que trois points, A, B, C, puissent appartenir en même temps à deux [ou, plus généralement, à plusieurs] circonférences. Lions ces points entre eux par deux droites, AB, BC; et par les milieux respectifs, M, N, de ces droites, élevons des perpendiculaires. Chacune de ces perpendiculaires devant contenir le centre de *toute* circonférence passant par les trois points A, B, C (nº 88), il s'ensuit que ces droites devront se rencontrer. Or, le point de rencontre étant nécessairement unique (nºs 81, 2°; et 8), il s'ensuivra que les circonférences supposées, ayant même centre O, et même rayon OA = OB = OC, seront *identiques*. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE 1er. — *Par trois points donnés on ne peut faire passer qu'une seule circonférence.*

[Il faut d'ailleurs évidemment que les trois points ne soient pas en ligne droite (n° 87).]

COROLL. 2. — *Un même arc ne saurait appartenir à deux cercles différens ;*

[D'où l'on peut conclure que, dans l'énoncé du théorème démontré au *numéro* 90, *mais non dans les réciproques*, il n'est pas absolument nécessaire d'énoncer la condition de l'identité ou de l'égalité des cercles.]

SCOLIE. — Deux cercles situés dans un même plan (*voyez* le n° 21), ne peuvent avoir que *cinq* positions relatives essentiellement différentes : ils peuvent être

Fig. 54. 1° *Extérieurs l'un à l'autre* (fig. 54) ;
Fig. 55. 2° *Tangens extérieurement* (fig. 55) ;
Fig. 56. 3° *Sécans*. . . . . (fig. 56) ;
Fig. 57. 4° *Tangens intérieurement* (fig. 57) ;
Fig. 58. 5° *Intérieurs l'un à l'autre* (fig. 58).

Et de plus, ces cinq positions relatives sont les seules possibles.

La droite qui joint les deux centres se nomme la *ligne des centres*.

Fig. 59. Les deux cercles peuvent avoir le même centre (fig. 59) : alors ils sont dits *concentriques* ; et la portion de plan comprise entre leurs circonférences, se nomme une *couronne circulaire*.

Les deux cercles sont dits *excentriques* toutes les fois qu'ils n'ont pas le même centre.

N° 94. THÉORÈME XIII. Fig. 56.

Fig. 56. *Lorsque deux circonférences*, OM, O'M, *se coupent, la ligne des centres est perpendiculaire à la corde* MN *qui joint les points d'intersection ; et elle la divise en deux parties égales.*

En effet, la perpendiculaire élevée sur le milieu P de la corde

MN commune aux deux cercles, devant passer par les deux points O, O′ (nº 88), n'est autre chose que la ligne des centres (nºˢ 49 et 93) : — *Ce qui démontre la proposition.* Fig. 56.

Nº 95. Théorème XIV. Fig. 56.

Réciproquement : — *Lorsque deux circonférences*, OM, O′M, *ont un point commun* M *hors de la ligne des centres, elles sont sécantes.*

En effet, d'après l'hypothèse, les trois points O, O′, M, forment un triangle (nº 74) dans lequel OM et O′M sont les rayons respectifs des deux cercles. Cela posé, l'on peut, en renversant le triangle OMO′, former un second triangle ONO′, symétrique du premier par rapport à la droite OO′ (nº 86), et dans lequel on aura par conséquent

$$ON = OM \quad \text{et} \quad O'N = O'M\,;$$

d'où il résulte que, le point N appartenant aussi aux deux circonférences, ces deux circonférences sont sécantes.

Nº 96. Théorème XV. Fig. 55 et 57.

Lorsque deux circonférences, OA, O′A, *se touchent, la ligne des centres passe par le point de contact.* Fig. 55 et 57.

En effet, si elle n'y passait pas, les deux circonférences seraient sécantes, d'après le théorème précédent (nº 95).

Nº 97. Théorème XVI. Fig. 55 et 57.

Réciproquement : — *Si deux circonférences*, OA, O′A, *ont un point commun sur la ligne des centres, elles sont tangentes.*

En effet, si elles étaient sécantes, la ligne des centres ne passerait pas par ce point commun (nº 94).

Scolie 1ᵉʳ. — Les *deux* derniers *théorèmes*, XV et XVI (nºˢ 96 et 97), comparés aux *deux théorèmes* précédens, XIII et XIV (nºˢ 94 et 95), peuvent être considérés comme présentant un cas particulier de ceux-ci : le cas

où les deux points d'intersection se réunissent en un seul (n° 21). Alors en effet, la corde commune aux deux circonférences devient *nulle*; et la ligne des centres passe nécessairement par le seul point commun.

Fig. 55 et 57. Scol. 2. — Si, au point de contact A (fig. 55 et 57) de deux circonférences OA, O'A, on élève la perpendiculaire ST à la ligne des centres, cette perpendiculaire sera une tangente (n° 89) commune aux deux cercles. Par conséquent, tous les cercles (fig. 60) qui ont leurs centres sur une même droite MN, et qui passent par un même point A pris sur cette droite, sont tangens les uns aux autres, ainsi qu'à la perpendiculaire ST élevée par ce point sur la ligne des centres.

Fig. 60.

D'où l'on peut conclure (n° 49) que,

Réciproquement, — *Lorsqu'un nombre quelconque de circonférences se touchent* [deux à deux] *en un même point*, A (fig. 60),

1° *Tous leurs centres sont sur une même droite*,

Et — 2° *Elles ont*, au point commun A, *une tangente commune perpendiculaire à la ligne des centres.*

Scol. 3. — *Entre une circonférence et sa tangente on peut faire passer une infinité d'autres circonférences;*

Et cependant on ne peut y faire passer aucune droite (n° 89, *coroll.*). — La tangente est la limite commune de toutes ces circonférences, dont le rayon devient de plus en plus grand : circonstance que l'on exprime en disant que

La droite est une circonférence de cercle décrite d'un rayon infiniment grand.

Scol. 4. — *Deux circonférences de cercle ne sauraient avoir en deux points différens, leurs tangentes communes :*

Car alors elles auraient le même centre et le même rayon (n° 89, *récipr.* 2), et par conséquent elles se confondraient.

N° 98. Théorème XVII. Fig. 54 — 58.

Fig. 54 — 58. *Deux cercles*, O, O', *étant situés dans le même plan :*

1° *Si les circonférences sont extérieures l'une à l'autre* (fig. 54), *la distance des centres est plus grande que la somme des rayons;*

2° *Si les circonférences se touchent extérieurement* (fig. 55), *la distance des centres est égale à la somme des rayons ;* Fig. 54—58.

3° *Si les circonférences se coupent* (fig. 56), *la distance des centres est plus petite que la somme des rayons et plus grande que leur différence ;*

4° *Si les circonférences se touchent intérieurement* (fig. 57), *la distance des centres est égale à la différence des rayons ;*

Et enfin, — 5° *Si les circonférences sont intérieures l'une à l'autre* (fig. 58), *la distance des centres est plus petite que la différence des rayons.*

En effet :

1° (Fig. 54) — En nommant A, A', les points d'intersection respectifs *intérieurs* de la ligne des centres, OO', avec chacune des deux circonférences, on a :

$$OO' = OA + O'A' + AA';$$

et par conséquent :

$$OO' > OA + O'A'.$$

2° (Fig. 55) — Les centres O, O', étant en ligne droite avec le point de tangence A (n° 96), on a

$$OO' = OA + O'A.$$

3° (Fig. 56) — Les centres O, O', formant un triangle avec l'un des points communs, M, on a (n° 80) :

$$OO' < OM + O'M,$$

et [en supposant $OM > O'M$]

$$OO' > OM - O'M.$$

4° (Fig. 57) — Les centres O, O', étant en ligne droite avec le point de tangence A (n° 96), on a [en supposant $OA > O'A$] :

$$OO' = OA - O'A.$$

Enfin — 5° (Fig. 58) — En nommant A et A' les points d'in-

Fig. 54 — 58. tersection respectifs de la droite OO′ avec la plus grande et avec la plus petite des deux circonférences, de telle sorte que le rayon O′A′ soit une portion du rayon OA, on a :

$$OO' = OA - O'A' - AA';$$

et par conséquent

$$OO' < OA - O'A'.$$

Réciproque évidente (n° 51) : — Deux cercles étant situés dans le même plan :

1° Si la distance des centres est plus grande que la somme des rayons, les deux circonférences sont extérieures l'une à l'autre ;

2° Si la distance des centres est égale à la somme des rayons, les deux circonférences se touchent extérieurement ;

3° Si la distance des centres est plus petite que la somme des rayons et plus grande que leur différence, les deux circonférences se coupent ;

4° Si la distance des centres est égale à la différence des rayons, les deux circonférences se touchent intérieurement ;

Et enfin — 5° Si la distance des centres est plus petite que la différence des rayons, les deux circonférences sont intérieures l'une à l'autre.

Scolie 1er. — On peut résumer de la manière suivante les diverses parties du théorème précédent et de sa réciproque :

1° Pour que deux circonférences *se coupent*, il faut que la distance des centres soit à la fois moindre que la somme des rayons *et* plus grande que leur différence ; — et ces *deux* conditions sont suffisantes ;

2° Pour que deux circonférences *se touchent*, il suffit que la distance des centres soit égale à la somme des rayons *ou* à leur différence ; — mais *une* seule de ces conditions est nécessaire : — le contact est extérieur dans le premier cas, et intérieur dans le second ;

3° Enfin, pour que deux circonférences n'aient *aucun point commun*, il suffit que la distance des centres soit plus grande que la somme des rayons *ou* plus petite que leur différence; — mais *une* de ces conditions est nécessaire : — les deux circonférences seront extérieures ou intérieures l'une à l'autre, suivant que le premier ou second cas aura lieu.

Scol. 2. — La ligne des centres est toujours un *axe de symétrie* (n° 86) de la figure. — Il en existe un second quand les deux cercles sont égaux, ce qui ne peut avoir lieu que dans les trois premières positions (n° 93) : ce second axe est la perpendiculaire élevée sur la ligne des centres par le point milieu de leur distance. Quand les cercles égaux sont sécans, cette perpendiculaire n'est autre que leur corde commune; et quand ils sont tangens, c'est la tangente commune. — Dans le cas particulier de deux cercles concentriques, toute droite menée par le centre commun est un axe de symétrie.

§ IV. — *Problèmes qui dépendent de la théorie des Perpendiculaires.*

N° 99. Problème I. Fig. 61.

Par un point O *pris sur une droite* MN [supposée indéfinie], *élever une perpendiculaire à cette droite.* Fig. 61

Analyse. — Soit pris, sur la droite MN, et de part et d'autre du point O, OA = OB. — Tout point également distant des points A et B appartient à la perpendiculaire cherchée (n° 85) : le problème sera donc résolu si l'on trouve, outre le point O, un second point également distant des points A et B.

Construction. — 1° Marquons sur MN, de part et d'autre du point O, et à des distances égales quelconques, deux points A, B [ce qui se fait au moyen du compas (n° 26)]. — 2° Des points A et B comme centres, et d'un même rayon arbitraire [mais toutefois plus grand que OA = OB], décrivons deux arcs de cercle qui se coupent en un point C. — 3° Tirons la droite OC.

OC est la perpendiculaire cherchée, d'après ce qu'on vient de voir en faisant *l'analyse* du problème.

Fig. 61. *Scolie.* — Pour que les deux circonférences décrites des points A et B comme centres respectifs, puissent se couper, il est nécessaire et suffisant que leur rayon commun soit plus grand que OA : car alors la distance des centres est moindre que la somme des rayons ; et d'ailleurs elle est plus grande que leur différence puisque cette différence est nulle. — (*Voyez* le n° 98.)

N. B. — Il est bon de déterminer à la fois les *deux* points d'intersection des deux circonférences, par la raison que ces deux points et le point donné devant être tous les *trois* en ligne droite, il en résulte un moyen d'assurer et en même temps de vérifier l'exactitude de la construction.

N° 100. PROBLÈME II. Fig. 62.

D'un point pris hors d'une droite [supposée indéfinie], *abaisser une perpendiculaire à cette droite.*

Fig. 62. ANALYSE. — Soit MN la droite donnée, et C le point donné. — Le pied de la perpendiculaire cherchée étant supposé en D, si l'on considère sur la droite MN, deux points, A, B, également distans du point C, ils seront aussi également distans du point D (n° 84, *récipr.*) ; et de plus, tout point E également distant de A et de B, appartiendra à la perpendiculaire (n° 85, *récipr.*).

1re *Construction.* — 1° Du point C comme centre, et d'un rayon arbitraire [mais qui toutefois doit être pris, *à vue d'œil,* plus grand que la perpendiculaire CD], décrivons un arc de cercle qui coupera la droite MN en deux points, A, B (n° 90, *scol.* 4). — 2° Des points A et B comme centres respectifs, et d'un même rayon aussi arbitraire [mais plus grand que la moitié de AB], décrivons deux arcs de cercle. — 3° Par l'un des points d'intersection, E, de ces arcs, et par le point C, menons la droite CE.

Cette droite sera la perpendiculaire cherchée, conformément à *l'analyse* ci-dessus.

N. B. — Il est bon que le point E ne soit pas pris du même côté de la droite MN, que le point C : la direction de la perpendiculaire CD en est mieux déterminée. Fig. 62.

Autre Analyse. — Comme CD ne peut être perpendiculaire à MN sans que réciproquement MN soit perpendiculaire à CD, il s'ensuit une autre manière de résoudre le même problème.

Soient donc maintenant, A le point donné, et CE la droite donnée.— La perpendiculaire cherchée passe par les extrémités de tout arc dont le milieu et le centre sont sur CE.— Cela posé :

2ᵉ *Constr.* — 1° D'un point quelconque C pris sur la droite CE, comme centre, et du rayon CA, décrivons un arc AFB qui coupe en F la droite CE.— 2° Prenons, sur cet arc, FB égal à FA (*voyez* le n° 90). — 3° Menons la droite AB.

Cette droite est la perpendiculaire cherchée (n° 85, *scol.* 1ᵉʳ).

N° 101. Problème III. Fig. 63.

Faire passer une perpendiculaire à une droite AB [déterminée de longueur], *par son milieu.* Fig. 63.

Analyse. — *Voyez* le *numéro* 85 (*scol.* 1ᵉʳ).

Construction. — 1° Des points A et B comme centres, et d'un même rayon quelconque [pourvu qu'il surpasse la moitié de AB (*voyez* le n° 98)], décrivons des arcs de cercle qui se couperont en deux points C, D, situés, l'un d'un côté de la droite AB, l'autre de l'autre (*voyez* le n° 94). — 2° Menons CD.

CD sera la droite cherchée ; et son point O d'intersection avec la droite AB sera le milieu de celle-ci.

N. B. — Il n'est pas nécessaire que les arcs de cercle qui se coupent en C et en D soient décrits du même rayon : il suffirait que ce fût le même rayon pour le point C, et le même pour le point D. Alors, les deux points C, D, pourraient être pris d'un même côté de AB ; mais il est plus avantageux de les prendre de deux côtés différens (*voyez* le n° 100, *N. B.*).

SCOLIE. — La construction précédente ne suppose pas que la droite AB soit réellement tracée; mais quand cette circonstance a lieu, la construction résout en même temps le problème suivant :

Trouver le milieu d'une droite [déterminée de longueur],

Ou — *Partager une droite en deux parties égales*,

Et par suite — *en* 4, 8, 16..... *parties égales*.

N° 102. REMARQUE. — La construction du problème précédent peut servir en outre à résoudre les questions suivantes :

1° *Décrire sur une droite donnée, comme diamètre, une circonférence* ou *une demi-circonférence :*

L'opération ci-dessus en fait connaître le centre, qui n'est autre que le milieu de la droite donnée; et la moitié de cette droite en est le rayon.

2° *Trouver le centre d'une circonférence* ou *d'un arc de cercle :*

On marque *trois* points quelconques sur cette circonférence ou sur cet arc; et par les milieux respectifs de *deux* des trois cordes qui lient ces trois points deux à deux, on fait passer des perpendiculaires : ces perpendiculaires se coupent nécessairement au centre cherché.— (*Voyez* le n° 93.)

3° *Par trois points donnés faire passer une circonférence :*

On opère sur les trois points donnés, absolument comme dans la construction du problème précédent (2°). — Mais le problème actuel (3°) présente un cas d'impossibilité, celui où les trois points donnés seraient en ligne droite (*voyez* le n° 87) : car si cela arrivait, les perpendiculaires ne pourraient se rencontrer (n° 82, 2°). — Il ne peut y avoir qu'*une* solution (n° 93); d'où l'on peut conclure [ce qui sera d'ailleurs prouvé directement au *chapitre* IV] que les perpendiculaires menées par les milieux des droites qui lient les trois points donnés pris deux à deux, concourent toutes *trois* en un même point.

4° *Par deux points donnés faire passer une circonférence qui ait son centre sur une droite donnée :*

Le centre se trouve à l'intersection de la droite donnée, avec la perpendiculaire menée par le milieu de la distance des deux points donnés. — Pour que le problème soit possible, il faut que la droite donnée ne soit pas perpendiculaire à la droite qui lie les deux points donnés (*voyez* 3°). — Il n'y a qu'*une* solution.

N. B. — Nous devons faire observer que la *discussion* (n° 58) des deux problèmes précédens (3° *et* 4°) n'est pas complète, bien que nous ayons signalé un cas d'impossibilité auquel ils sont sujets : car il resterait à prouver que ce cas d'impossibilité est le seul, et c'est ce que nous ne pourrons faire qu'à la fin du *chapitre* III. Cette sorte de lacune momentanée ne présente cependant aucun inconvénient ; et d'ailleurs, la construction des deux problèmes dont il s'agit est trop simple et se déduit trop directement de ce qui précède, pour que nous ayons cru devoir différer plus long-temps à en présenter la solution.

La même observation est applicable en tout point aux *deux problèmes* IV et V qui suivent (n°s 103 et 104).

N° 103. Problème IV. Fig. 64.

Décrire un cercle qui touche en un point donné A *une droite donnée* MN, *et qui passe par un second point* B *donné* [hors de la droite]. Fig. 64.

Analyse. — Le centre du cercle cherché doit se trouver à la fois sur la perpendiculaire élevée à la droite MN par le point A (n° 89, *récipr.* 2), et sur la perpendiculaire menée par le milieu de AB (n° 88, *récipr.* 2).

Construction. — 1° Élevons, au point A, sur la droite MN, la perpendiculaire AO (n° 99). — 2° Par le milieu de AB faisons passer la perpendiculaire CO (n° 101).

Le point de rencontre, O, des deux perpendiculaires, sera le centre du cercle cherché ; et son rayon sera égal à OA.

Discussion. — La solution est *unique ;* — et le problème serait impossible si le second point donné était sur la droite donnée.

[*Voyez* le n° 87, et les *problèmes* 3° et 4° du *numéro* précédent (n° 102), dont celui-ci (n° 103) n'est qu'un cas particulier. — *Voyez* aussi le *N. B.* du même *numéro* 102.]

N° 104. PROBLÈME V. Fig. 65.

Fig. 65. *Décrire un cercle qui touche en un point donné* A *une circonférence donnée* OA, *et qui passe par un second point donné* B [extérieur ou intérieur à cette circonférence].

ANALYSE. — Le centre du cercle cherché doit se trouver à la fois sur la perpendiculaire menée par le milieu de AB, et sur la direction du rayon OA (n°s 88 et 96).

Construction. — 1° Par le milieu de la droite AB faisons passer la perpendiculaire DC (n° 101). — 2° Menons le rayon OA ; et prolongeons-le au besoin.

Le point de rencontre C de ces deux droites sera le centre du cercle cherché ; et son rayon sera égal à CA.

Discussion. — Soit MN la perpendiculaire menée par le point A, au rayon OA.

Si les points donnés O et B sont, l'un d'un côté de MN, l'autre de l'autre, les deux cercles seront tangens extérieurement. — Ils seront tangens intérieurement si ces deux points sont du même côté de MN. — Le problème sera impossible si le point B est sur MN. — (*Voyez* le n° 97, *scol.* 2.)

Lorsque les points O et B sont du même côté de MN, le cercle cherché est enveloppé par le cercle donné ou il l'enveloppe lui-même, suivant que le point B est intérieur ou extérieur au cercle donné. — Si le point B était sur la circonférence donnée OA, les deux cercles se confondraient.

Enfin, lorsque le point B se trouvera sur la droite OA, le centre du cercle cherché sera le milieu même de AB.

[*Voyez* le n° 93. — *Voyez* encore le n° 102, *N. B.*]

N° 105. PROBLÈME VI.

Mener une tangente à un cercle, par un point donné sur sa circonférence.

Pour cela, il suffit d'élever une perpendiculaire à l'extrémité du rayon qui aboutit au point de tangence (n° 89), ce qui se fait en prolongeant d'abord ce rayon d'une quantité égale à sa longueur, et opérant ensuite, pour le reste de la construction, comme au *numéro* 99.

N° 106. PROBLÈME VII. Fig. 66.

Par un point T *donné hors d'un cercle* OA, *mener une tangente.* Fig. 66.

ANALYSE. — Soit TA la tangente demandée, et OA le rayon mené au point de tangence : les droites TA, OA, seront perpendiculaires entre elles (n° 89). — Soit pris, sur le prolongement de OA, une distance AP = OA ; et menons TP : les droites TO, TP, seront égales entre elles (n° 84). — Le point P se trouvera donc sur la circonférence décrite du point T comme centre avec le rayon TO ; et le point de contact, A, sera le milieu de la corde [OP = 2.OA] qui sous-tend la portion OP de cette circonférence (nos 88 et 89).

Construction. — 1° Du point T comme centre, et du rayon TO, décrivons un arc de cercle suffisamment grand. — 2° Du point O comme centre, et d'un rayon égal au diamètre de la circonférence donnée, décrivons un petit arc de cercle qui coupe le premier en un point P. — 3° Menons la droite OP, coupant la circonférence donnée, en un point A. — 4° Menons la droite TA.

Cette dernière droite sera la tangente demandée.

Discussion. — 1° Pour que les circonférences TO et OP se coupent (n° 98), il faut que OP soit moindre que le double de TO, ou que OA soit moindre que TO : ce qui revient à dire

Fig. 66. que le point donné T doit être hors du cercle OA. De plus, comme il y a nécessairement alors entre les deux circonférences TO et OP, deux points d'intersection, P, P', il en résulte aussi deux points de tangence, A, A', ou *deux* tangentes, TA, TA', qui satisfont également à la question.

2° Si TO = OA, c'est-à-dire si le point T est sur la circonférence donnée, les deux circonférences TO, OA, sont alors égales : le point P, commun aux deux circonférences OP, TO, au lieu d'être un point d'intersection, est un point de contact, nécessairement situé sur la ligne, OT, des centres ; d'où il résulte que la droite OP se confond avec la droite OT, et le point A, milieu de OP, avec le point donné T. La construction ne donnant plus, pour le point de tangence cherché, que le point T lui-même, devient donc *illusoire*, en ce sens qu'au lieu de *deux* points pour déterminer la tangente, on n'en a plus qu'*un seul*. — [Ce résultat tient évidemment à ce que l'on veut appliquer au cas où le point donné est sur la circonférence, un mode de résolution auquel on n'a été amené que par suite de l'hypothèse où ce point serait extérieur]. — Au reste, il n'y a maintenant, pour résoudre la question, qu'à élever une perpendiculaire à l'extrémité du rayon OT (*voyez* le n° 105).

On n'obtient plus qu'*une* solution dans le cas actuel, parce que le rapprochement du point T avec la circonférence donnée OA, entraîne celui des deux points d'intersection, P, P', du cas précédent, avec la droite OT sur laquelle ils se réunissent en un seul point de contact ; et alors, les deux points A, A', se réunissant également au point T, les droites TA, TA', se confondent avec la tangente au point T.

3° Enfin, il n'y a plus *aucune* solution possible si le point T est dans l'intérieur du cercle OA, parce que les circonférences OP et TO n'ont plus alors de point commun.

Scolie. — Par un point extérieur à un cercle, on peut toujours mener *deux* tangentes, et non davantage ; — et ces tangentes sont égales.

N° 107. Problème VIII. Fig. 67.

Par deux points donnés, A, B, faire passer une circonférence d'un rayon donné OA. Fig. 67

Analyse. — Le centre du cercle cherché doit se trouver à une distance égale à OA, de chacun des points A, B.

1re *Construction.* — 1° Des points A, B, comme centres respectifs, et d'un rayon égal à OA, décrivons deux circonférences, lesquelles se couperont généralement en deux points, O, O'. — 2° Des points O et O', comme centres respectifs, et du même rayon donné, décrivons deux autres circonférences.

Chacune de ces circonférences satisfera à la question.

Discussion. — Si la distance des points donnés est moindre que le double du rayon donné, les circonférences décrites des points A, B, comme centres, se couperont en deux points, O, O'; et il y aura *deux* solutions distinctes. — Si AB est égal au double du rayon donné, les circonférences A, B, se toucheront en un point qui sera le centre du *seul* cercle qui puisse satisfaire à la question. — Enfin, si AB est plus grand que le double du rayon donné il n'y aura plus de point commun, ni par conséquent de solution.

2e *Constr.* — 1° Par le milieu de AB faisons passer une perpendiculaire (n° 101). — 2° Du point A ou du point B comme centre, et d'un rayon égal au rayon donné, décrivons un petit arc de cercle qui coupe cette perpendiculaire en un point, O ou O'.

Ce point sera le centre d'un cercle qui satisfera aux conditions du problème.

La *discussion* de cette seconde construction est à peu près semblable à celle de la première.

N. B. — Avant de passer au chapitre suivant, il sera bon de voir, dans la *Note* A, à la fin du volume, la description de l'*équerre*, et son usage dans la résolution des problèmes qui dépendent de la construction des perpendiculaires.

CHAPITRE II.

DES ANGLES.

§ Ier. — *Propriétés générales des Angles.*

N° 108. *Les angles* étant, d'après la définition que nous en avons donnée aux *numéros* 12 et 69, susceptibles d'*augmentation* et de *diminution*, et présentant par conséquent le caractère de véritables grandeurs, *sont soumis aux mêmes principes que toutes les autres espèces de quantités ;* c'est-à-dire qu'on peut les *comparer* entre eux, les *mesurer* ou les *rapporter à une unité* commune, les *évaluer* ou les *exprimer en nombres*, les *combiner* par voie d'*addition* ou de *soustraction*, les *multiplier*, les *diviser*, etc.

On doit comprendre d'ailleurs que

La grandeur d'un angle ne dépend en aucune manière de la longueur actuellement tracée des droites qui lui servent de côtés, — ces droites étant toujours censées prolongées à l'infini.

N° 109. L'*angle droit* étant celui que notre expérience journalière nous apprend le plus tôt à reconnaître, il est naturel de le prendre pour *unité des angles*. Ainsi, l'on dit qu'un angle vaut $\frac{1}{3}$, ou $\frac{2}{5}$, ou $\frac{7}{4}$...., pour exprimer qu'il est *le tiers*, ou les *deux cinquièmes*, ou qu'il est égal à *sept fois le quart*... d'un angle droit, ou simplement *d'un droit*.

N° 110. On nomme Angle Aigu tout angle *moindre qu'un* angle *droit*, et Angle Obtus tout angle *plus grand qu'un* angle *droit*. — Ainsi, par suite de la convention précédente (n° 109), la valeur de tout *angle aigu* est $<$ 1, et celle de tout *angle obtus* est $>$ 1.

De la définition des *obliques* (voyez le n° 79), et de celles que nous venons de donner des angles aigus et des angles obtus, il résulte que

Toute droite qui en rencontre une autre obliquement, fait avec elle un angle aigu d'un côté et un angle obtus de l'autre.

Les deux droites sont dites d'autant plus *inclinées* l'une sur l'autre, que la différence de ces deux angles est plus considérable. Ainsi, généralement, *l'inclinaison* de deux droites est d'autant *plus grande*, que l'angle *aigu* qu'elles font entre elles est *plus petit* et que leur angle *obtus* est *plus grand*; et cette inclinaison est nulle quand les deux droites sont perpendiculaires entre elles (*).

N° 111. Deux *angles*, AOC, COD (fig. 68), *dont la somme est égale à* UN *angle droit*, ou *à un quart de plan*, sont dits COMPLÉMENS *l'un de l'autre*, ou COMPLÉMENTAIRES. Fig. 68.

Deux *angles*, AOC, COB, *dont la somme est égale à* DEUX *angles droits*, ou *à un demi-plan*, sont dits SUPPLÉMENS *l'un de l'autre*, ou SUPPLÉMENTAIRES.

Il est évident qu'un même angle ne peut avoir qu'un seul complément et un seul supplément, et que par conséquent

Deux angles sont égaux lorsque chacun d'eux est complémentaire ou supplémentaire d'un troisième.

N° 112. THÉORÈME I. Fig. 68.

Les angles adjacens (n° 70), AOC, COB [formés par deux droites concourantes AB, CO], *sont supplémentaires.*

En effet, si par le point de rencontre O, on élève sur AB la perpendiculaire OD, la somme des deux angles AOC, COB, sera identique avec la somme des deux angles droits AOD, DOB.

(*) Tout en nous conformant à l'usage qui a consacré ces locutions, nous ne pouvons nous dispenser de faire observer qu'elles sont vicieuses, et surtout contradictoires avec la signification originelle du mot *inclinaison*, si l'on veut ne considérer ce mot, conformément à la définition d'EUCLIDE, que comme le synonyme du mot angle : — Γωνία ἐστὶν, ἡ... δύο γραμμῶν... πρὸς ἀλλήλας κλίσις : — *L'angle est l'inclinaison de deux droites l'une sur l'autre* — (EUCLIDE, Livre I, *défin.* 8e).

Autrement : — Il suffit même, pour démontrer la proposi-
Fig. 68. tion, de faire remarquer tout simplement, que les angles AOC et COB composent un *demi-plan* (n° 13, 2°).

Scolie. — La même proposition est applicable à chacun des
Fig. 6. *quatre* systèmes ou *couples* d'angles adjacens (fig. 6) formés par deux droites concourantes (*voyez* le n° 70).

COROLLAIRE Ier. — *La somme de tous les angles consécutifs,*
Fig. 69. AOC, COD, DOE, EOB (fig. 69), *formés d'un même côté d'une droite* AB, *par d'autres droites quelconques*, OC, OD, OE, *issues d'un de ses points* O, *est constamment égale à* 2 DROITS.

COROLL. 2. — *La somme des quatre angles formés par deux*
Fig. 6. *droites qui se coupent* (fig. 6) *est égale à* 4 DROITS.

Fig. 70. COROLL. 3. — *La somme de tous les angles consécutifs*, AOB, BOC, COD.... etc. (fig. 70), *formés autour d'un même point* O *par des segmens indéfinis de droites quelconques*, OA, OB, OC, OD... etc., *issus de ce point, est constamment égale à* 4 DROITS.

Fig. 71. COROLL. 4. — *Les bissectrices* (n° 70), OM, ON (fig. 71), *de deux angles adjacens*, AOC, COB, *sont perpendiculaires entre elles.*

N° 113. THÉORÈME I. Fig. 68.

Fig. 68. RÉCIPROQUEMENT : — *Lorsque deux angles consécutifs*, AOC, COB, *sont supplémentaires, les côtés extrêmes*, AO, OB, *sont en ligne droite.*

En effet, supposons que OB ne soit pas le prolongement de AO [en ligne droite]; et dans cette hypothèse, soit OB′ ce prolongement. On aurait alors (n° 112)

$$AOC + COB' = 2 \text{ DROITS};$$

mais on a déjà, par l'hypothèse,

$$AOC + COB = 2 \text{ DROITS};$$

d'où il résulterait $AOC + COB' = AOC + COB$,

ou simplement, $COB' = COB$:

Ce qui est absurde.

Scolie. — Nous aurions pu nous dispenser de développer ce aisonnement qui n'est qu'une application particulière du principe général établi au *numéro* 49.

COROLLAIRE. — *Si un nombre quelconque d'angles consécutifs* Fig. 69.
(fig. 69) *forment une somme égale à* 2 DROITS, *les côtés extrêmes sont en ligne droite.*

N° 114. THÉORÈME III. Fig. 6.

Les angles opposés (n° 70), AOC et BOD, AOD et BOC, Fig. 6.
[formés par deux droites qui se coupent, AB, CD] *sont égaux deux à deux.*

En effet, deux angles opposés quelconques, tels que AOC et BOD, sont toujours à la fois supplémentaires d'un même angle, AOD ou BOC. — (*Voyez* le n° 111.)

Réciproque 1re. — Si les angles AOC et BOD sont égaux d'une part, ainsi que les angles AOD et BOC de l'autre, leurs côtés AO et OB seront en ligne droite, ainsi que leurs côtés CO et OD : — Car, d'après l'hypothèse, la somme de deux angles consécutifs quelconques sera égale à 2 *droits*. — (*Voyez* le n° 113.)

Récipr. 2. — Si AO et OB, par exemple, sont en ligne droite, et que les angles AOC et BOD soient égaux, CO et OD seront aussi en ligne droite : — Car, en vertu de l'hypothèse, les angles AOC, AOD, seront supplémentaires, aussi bien que les angles BOD, AOD.

N° 115. THÉORÈME IV. Fig. 72.

1° *Tout point* E *pris sur la bissectrice* AD (n° 70) *d'un angle* Fig. 72
BAC *est également distant des deux côtés de cet angle ;*

2° *Tout point* F *situé dans l'angle et extérieur à la bissectrice, est inégalement distant des mêmes côtés.*

En effet : — 1° Abaissons sur AB et sur AC les perpendiculaires respectives EG, EI, et plions la figure suivant AD : les droites AB, AC, coïncideront, puisque les angles BAD, CAD, sont égaux par hypothèse; et par conséquent les perpendiculaires EG, EI, se confondront pareillement (n° 82, 2°).

Fig. 72. 2° Abaissons sur AB et sur AC les perpendiculaires FK, FI, et plions la figure suivant AF : les droites AK, FK, prendront respectivement des positions telles que AL, FL. Soit M le point d'intersection des droites FI et AL ; nous aurons

$$FL < FM, \quad \text{et} \quad FM < FI ;$$

donc, *à fortiori*,

$$FL < FI, \quad \text{ou} \quad FK < FI.$$

Réciproque évidente (n° 51) : — 1° Tout point situé dans un angle et également distant de ses côtés, appartient à la bissectrice de cet angle ;

2° Tout point situé dans l'angle et inégalement distant de ses côtés, est extérieur à la bissectrice.

COROLLAIRE. — *La bissectrice d'un angle est le* LIEU GÉOMÉTRIQUE *de tous les points situés dans cet angle à égale distance de ses côtés.*

Fig. 73. SCOLIE. — Si d'un point quelconque C (fig. 73) de la bissectrice d'un angle AOB, on abaisse sur ses côtés les perpendiculaires CA, CB, et que du point C comme centre et du rayon CA égal à CB, on décrive une circonférence, cette circonférence touchera les deux côtés de l'angle respectivement aux points A et B (n° 89).

RÉCIPROQUEMENT : — *Lorsqu'une circonférence touche deux droites concourantes,* OA, OB, *son centre* C *se trouve sur la bissectrice* de l'angle de ces droites.

N° 116. LEMME. Fig. 74.

Fig. 74. *Tout angle* A *d'un triangle* ABC *est moindre que chaque angle extérieur* CBD *adjacent à l'un des deux autres.*

En effet, les deux angles A et CBD ont une partie commune ECBD ; et ils ont de plus, pour parties non communes, le premier un triangle ABC, et le second un angle ECF ; mais le triangle, qui est une quantité limitée de toutes parts, est nécessairement moindre que l'angle, qui est une quantité essentiellement indéfinie (n° 69) ; d'où l'on conclut, en ajoutant ECBD de part et d'autre :

$$\text{angle } A < \text{angle } CBD.$$

COROLLAIRE. — *Étant donné un triangle* ABC (fig. 40), *si l'on joint par des droites les extrémités d'un même côté* AB *avec un point* D *pris dans l'intérieur, l'angle des deux autres côtés est moindre que l'angle des droites intérieures.* Fig. 40.

En effet, en prolongeant AD jusqu'à la rencontre de BC en E (n° 80), on aura

angle ACB < *angle* AEB,

et *angle* AEB < *angle* ADB;

d'où, *à fortiori*, *angle* ACB < *angle* ADB.

N° 117. THÉORÈME V. Fig. 45.

Si d'un point O extérieur à une droite donnée AB, on mène à cette droite la perpendiculaire OC et différentes obliques, OD, OD′, OE....: Fig. 45.

1° *Deux obliques*, OD, OD′, *qui s'écartent également de la perpendiculaire* [c'est-à-dire telles que l'on ait CD = CD′] *sont également inclinées* (voyez le n° 110) sur la droite donnée;

2° *De deux obliques*, OD, OE, *qui s'écartent inégalement de la perpendiculaire* [de sorte que l'on ait CD < CE], *celle* OE, *qui s'en écarte le plus, est la plus inclinée* sur la droite donnée.

[Observons d'abord que les angles ODC, OD′C, OEC.... étant, d'après le *lemme* précédent (n° 116), moindres que les angles droits OCA ou OCB, sont par conséquent aigus, tandis que leurs supplémens sont obtus (n° 110). — Cela posé:]

1° Plions la figure le long de la perpendiculaire OC: les points D et D′ se confondront puisque CD = CD′ (*voyez* le n° 84):

donc *angle* ODC = *angle* OD′C;

2° Plions la figure le long de la droite AB: nous aurons, d'après le lemme déjà cité,

angle ODC > *angle* OEC.

N. B. — Ce dernier résultat ne suppose nullement [quoique la démonstration paraisse l'exiger] que les obliques OD, OE, soient situées du même côté de la perpendiculaire, puisque [*d'après* 1°], l'on peut remplacer OD par OD′.

Réciproque évidente [d'après le n° 51]. — Si d'un point extérieur à une droite donnée on mène une perpendiculaire et différentes obliques à cette droite:

1° Deux obliques également inclinées sur la droite donnée s'écartent également de la perpendiculaire; — [et elles sont égales (d'après le *numéro* 84)];

2° De deux obliques inégalement inclinées sur la droite donnée, la plus inclinée s'écarte le plus de la perpendiculaire; — [et elle est la plus longue (*même numéro*)].

§ II. — *De la Mesure des Angles par des Arcs de cercle.*

N° 118. Les droites qui, par leurs intersections mutuelles, déterminent les angles, étant toujours censées prolongées à l'infini [ce qui ne saurait avoir lieu dans la réalité], et les angles étant d'ailleurs, d'après leur définition (n° 69), des grandeurs essentiellement *indéfinies*, il est possible qu'au premier abord, on éprouve quelque peine à se faire une idée nette de cette espèce de quantité.

C'est pourquoi nous allons nous occuper, dans ce paragraphe, de faire voir que la mesure de l'angle peut être complètement débarrassée de toute considération de l'*infini*, et entièrement ramenée à celle d'autres quantités absolument *finies*, qu'il sera, par conséquent, plus aisé de se représenter clairement.

Fig.75 Pour cela, nous supposerons que du sommet O (fig. 75) de chaque angle AOB, comme centre, et avec un certain rayon arbitraire OA, on ait décrit, dans son plan, un arc de cercle ACB, terminé aux deux côtés OA, OB. — Cet arc est ce que l'on nomme *l'arc correspondant à l'angle ;* et réciproquement, *l'angle* est dit *correspondant à l'arc*, ou bien encore, *l'angle au centre* de cet arc.

N° 119. Cela posé, il est clair que, dans un même cercle, ou dans des cercles de rayons égaux, OA, O'A' (fig. 75) :

A des angles égaux, AOB, A'O'B', *correspondent des arcs égaux*, ACB, A'C'B' :

Car si l'on superpose *directement* (n° 43) les deux angles, les points A et A' coïncideront, ainsi que les points B et B', et par suite les arcs ACB et A'C'B' (n° 17).

Il résulte de là, qu'à un angle *double, triple, quadruple*... d'un autre, correspond aussi [dans le même cercle] un arc *double, triple, quadruple*... de l'arc correspondant à l'angle *simple ;* — et généralement

A un plus grand angle correspond un plus grand arc :

Car il est évident qu'un angle ne peut augmenter ou diminuer, sans que l'arc correspondant augmente ou diminue en même temps.

Les deux propositions précédentes ont pour *réciproques* les deux suivantes, lesquelles sont vraies d'après le principe établi au *numéro* 51 :

A des arcs égaux correspondent des angles égaux ;

Et — *A un plus grand arc correspond un plus grand angle.*

N° 120. De plus, suivant qu'un angle est aigu, droit, ou obtus, l'arc correspondant est évidemment *inférieur, égal*, ou *supérieur* à un *quadrant* (n° 19).

Lorsque l'arc est égal à une demi-circonférence, il n'y a plus d'angle proprement dit ; cependant on peut considérer encore les rayons opposés, formant le diamètre qui sous-tend la demi-circonférence, comme faisant entre eux un angle égal à 2 *droits*, lequel angle correspondrait à cette demi-circonférence.

On peut même regarder comme un angle plus grand que 2 *droits*, toute portion de plan correspondant à un arc plus grand qu'une demi-circonférence. Ainsi, par exemple, dans la *figure* 9, en supposant que les arcs AB et AC fassent une Fig. 9. somme plus grande que la demi-circonférence, rien n'empêche de considérer la somme des angles consécutifs AOB, AOC, comme formant un angle unique plus grand que 2 *droits* et correspondant à l'arc total BAC.

Enfin, toujours suivant cette manière de voir, le plan lui-même, dans son étendue indéfinie, n'est autre chose qu'un angle égal à 4 *droits*, et correspondant à une circonférence entière décrite d'un quelconque de ses points comme centre. — (*)

(*) De même que le cercle peut être considéré comme ayant pour génération le *pivotement* (n° 44) d'un rayon autour de son centre (*voyez* la 1re *note* de la *page* 14), de même l'angle peut être supposé engendré par la *rotation* d'un segment indéfini de droite autour de son extrémité.



N° 121. Théorème VI. Fig. 76.

Fig. 76. Dans un même cercle ou dans des cercles de rayons égaux, *Les angles au centre*, AOB, COD, *sont proportionnels aux arcs correspondans*, AB, CD.

[Pour démontrer cette proposition, il est nécessaire de faire observer d'abord, conformément à la remarque du *numéro* 63 (*scol.* 2), — 1° que deux angles sont toujours comparables par superposition, — et 2° que deux arcs d'un même cercle le sont également. — Cela posé :]

Commençons par prendre une ouverture de compas égale à la corde de l'arc CD; puis, du point A comme centre et d'un rayon égal à cette corde, décrivons un petit arc de cercle qui coupe l'arc AB en un point K. Les arcs AK, CD, seront égaux, puisque par hypothèse leurs cordes sont égales (n° 90, *récipr.* 1re); et par suite, en menant le rayon OK, nous formerons un angle AOK égal à l'angle COD (n° 119). Ainsi l'arc CD se trouvera porté une première fois sur l'arc AB, et l'angle COD sur l'angle AOB. — Supposons que l'arc CD, ayant été porté de cette manière 2 fois sur l'arc AB, de A en E, ait donné un reste EB moindre que CD : l'angle COD se trouvera, de même, porté 2 fois sur l'angle AOB, avec un reste EOB moindre que COD; et nous aurons à la fois

$$AB = 2.CD + EB, \qquad AOB = 2.COD + EOB.$$

Portons à son tour l'arc EB sur l'arc CD; et supposons que le premier soit contenu dans le second *une seule* fois, de C en F; nous aurons alors

$$CD = EB + FD, \qquad COD = EOB + FOD.$$

Portons encore FD sur EB; et soit de même

$$EB = 4.FD + GB, \qquad EOB = 4.FOD + GOB.$$

Soit enfin, pour fixer les idées,

$$FD = 3.GB, \quad \text{d'où} \quad FOD = 3.GOB.$$

Il résulte de ces égalités [comme dans le *numéro* 61],

EB = 13.GB,	EOB = 13.GOB;
CD = 16.GB,	COD = 16.GOB;
AB = 45.GB,	AOB = 45.GOB.

Fig. 76.

Donc GB, commune mesure des arcs AB et CD, est contenu 45 fois dans le premier et 16 fois dans le second; et de même GOB, commune mesure des angles AOB et COD, est contenu 45 fois dans le premier et 16 fois dans le second. Donc, le rapport de l'arc AB à l'arc CD, et celui de l'angle AOB à l'angle COD, sont exprimés tous deux par la même fraction $\frac{45}{16}$; et par conséquent on a

angle AOB : *angle* COD :: *arc* AB : *arc* CD.

Cette proportion est vraie généralement; et elle aurait encore lieu même quand les arcs seraient incommensurables entre eux ainsi que les angles : car il est certain que les deux conditions nécessaires (n° 66) à l'existence de la proportion, sont remplies : savoir — 1° que dans les deux séries de divisions successives exécutées ci-dessus, *les quotiens* fournis, d'un côté par les arcs de cercle, de l'autre par les angles correspondans, *sont* constamment *égaux deux à deux* (n° 119) dans le même ordre; — et 2° que l'une des divisions successives ne peut donner de reste, sans que sa correspondante donne aussi un reste.

On peut au reste, pour plus de clarté, réduire les rapports en fraction continue (*voyez* le n° 67). — L'exemple précédent donnerait ainsi,

$$\frac{AB}{CD} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \frac{1}{3}}}, \quad \frac{AOB}{COD} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \frac{1}{3}}}.$$

On reconnaît alors que le rapport des arcs et celui des angles correspondans, étant représentés tous deux par la même fraction continue, sont égaux. Seulement, ces fractions continues seraient composées d'un nombre illimité de fractions intégrantes si les arcs, et par suite les angles, étaient incommensurables entre eux.

Ou bien encore, on emploiera la méthode de M. Lefébure de Fourcy (n° 68), qui est parfaitement applicable au cas actuel.

Corollaire. — *Un arc quelconque est à la demi-circonférence, ou à la circonférence entière, comme l'angle correspondant est à 2* droits, *ou à 4* droits.

Scolie.— En même temps que les raisonnemens précédens démontrent le théorème énoncé, l'opération qui les accompagne conduit à la solution de ce problème :

Déterminer le rapport de deux angles, ou *de deux arcs du même cercle*, — et *Trouver leur plus grande commune mesure* — quand il en existe une, c'est-à-dire quand les quantités que l'on compare sont commensurables entre elles; dans le cas contraire, c'est-à-dire quand ces quantités sont *incommensurables entre elles*, on est obligé de se contenter d'une commune mesure *approximative*, ainsi que d'un rapport *approché* (voyez le n° 64).

N° 122. Remarques.— Par suite du théorème précédent, il sera très avantageux de prendre, d'une part pour les arcs d'un même cercle, de l'autre pour les angles au centre qui leur correspondent, des unités respectives telles qu'*à l'unité des arcs corresponde l'unité des angles :* car, de cette *convention* une fois admise, il résulte que

Fig. 76. *Tout angle* AOB (fig 76) *a la même* mesure [c'est-à-dire, est représenté par le même *nombre*] *que l'arc correspondant* AB.

En effet, si dans la proportion (n° 121)

$$AOB : COD :: AB : CD$$

on suppose que COD et CD sont respectivement, COD l'unité des angles, et CD l'unité des arcs, cette proportion signifiera proprement, que *l'angle* AOB *se compose avec son unité comme l'arc correspondant* AB *se compose avec son unité;* et alors, entendant par AOB et par AB les rapports numériques abstraits de cet angle et de cet arc à leurs unités respectives, on aura simplement

$$AOB = AB,$$

égalité qui a identiquement la même signification que la proportion, et au moyen de laquelle la *mesure* ou l'*évaluation*

numérique (voyez l'*Arithmétique*) d'un angle quelconque [quantité indéfinie] se trouvera toujours ramenée à celle d'un arc [quantité limitée], ainsi que nous l'avons énoncé au *numéro* 118. — (*)

Or, puisque l'on prend ordinairement l'*angle droit* pour *unité des angles* (n° 109), il est convenable de prendre pour *unité des arcs*, comme nous venons de le dire, l'arc correspondant, c'est-à-dire le *quart de circonférence* ou le *quadrant* (n° 19).

N° 123. Par suite, de même que l'on nomme *angles complémentaires* deux angles dont la somme équivaut à un droit, et *angles supplémentaires* deux angles dont la somme équivaut à *deux* droits (n° 111), de même aussi l'on nomme *arcs complémentaires* deux arcs dont la somme égale UN *quadrant*, ou UNE *unité d'arc*, et *arcs supplémentaires* deux arcs dont la somme égale DEUX *quadrans*, ou simplement 2, valeur de la *demi-circonférence*.

Deux arcs respectivement complémentaires ou supplémentaires d'un troisième sont nécessairement *égaux*.

N° 124. Il résulte de ce qui précède, que les propositions relatives aux angles sont presque toujours susceptibles de deux genres de démonstration, puisque au lieu de considérer les angles en eux-mêmes, on peut raisonner sur les arcs qui leur correspondent. On emploie l'une ou l'autre de ces deux méthodes, suivant les circonstances.

Pour faire concevoir par un exemple, l'avantage que peut présenter la substitution des arcs à la place des angles, rappelons cette proposition fort simple, que — *Par un point donné sur une droite, on ne peut élever qu'une seule perpendiculaire* (n° 81). — Il est facile de démontrer ce théorème en décrivant, du point donné O (fig. 77) comme centre, et Fig. 77.
d'un rayon quelconque, une circonférence dont la droite don-

(*) Ce qui précède suffit pour expliquer la définition que beaucoup d'auteurs donnent de l'*angle*, en disant que c'est l'*écartement plus ou moins considérable de deux droites qui se coupent*, écartement mesuré par la longueur de l'arc décrit dans son plan, entre ses côtés, de son sommet comme centre, et avec un rayon convenu.

Fig. 77. née AB deviendra le diamètre; car alors, chacune des deux demi-circonférences déterminées par cette droite, ne pouvant avoir qu'*un seul milieu* (voyez le n° 19), il s'ensuivra évidemment qu'il ne peut exister, de chaque côté du diamètre AB, qu'un seul rayon perpendiculaire. Il n'est pas moins évident que les rayons perpendiculaires OC, OD, élevés de part et d'autre de la droite AB, forment un même diamètre CD, puisque les *quatre* portions AC, CB, BD, DA, dans lesquelles la circonférence se trouvera partagée, sont des *quadrans*.

Le même mode de raisonnement peut être employé pour démontrer que — *Tous les angles droits sont égaux* (n° 78).

N° 125. Tout ce qui vient d'être dit (n°s 118 — 124) relativement aux angles au centre, est également applicable aux secteurs. — En effet, il est évident

1° Qu'à des arcs égaux correspondent des secteurs égaux;

2° Que par conséquent, à un arc double, triple... correspond un secteur double, triple...;

Et — 3° Qu'à un plus grand arc correspond un plus grand secteur.

De là il résulte, d'abord que

Les secteurs d'un même cercle [ou de cercles égaux] *sont proportionnels aux arcs correspondans*,

Et par suite, qu'en prenant le *quart de cercle* pour *unité de secteur*,

La mesure des secteurs est la même que la mesure des arcs (voyez le n° 122).

N° 126. *Autres* REMARQUES, *sur la division des angles et celle des arcs correspondans*. — Pour que la mesure ou l'évaluation des angles et des arcs puisse s'effectuer commodément, on divise l'angle droit et le quadrant en fractions d'une espèce déterminée, ce qui se fait de deux manières différentes.

Dans la première méthode, qui est la plus ancienne, on partage l'angle droit [que l'on désigne par 1^d] et le quadrant [que l'on désigne par 1^q] en 90 parties nommées *degrés*; on les écrit ainsi : 1°, 2°, 3°, etc. — Chaque degré se subdivise en

60 *minutes sexagésimales*, que l'on écrit ainsi : 1′, 2′, 3′, etc. — Chaque minute se subdivise en 60 *secondes sexagésimales*, que l'on écrit ainsi : 1″, 2″, 3″, etc. — Chaque seconde à son tour se subdivise en 60 *tierces* : 1‴, 2‴, 3‴, etc., etc.

Dans la division moderne, on partage l'angle droit et le quadrant en 100 *grades* que l'on désigne ainsi : 1^{gr}, 2^{gr}, 3^{gr}... ; chaque grade se subdivise en 100 *minutes centésimales*, chaque minute en 100 *secondes*, et ainsi de suite, comme dans la première méthode. On indique ces subdivisions de la même manière que les subdivisions sexagésimales ; mais la dénomination de *degré* ou de *grade*, appliquée à la division principale, suffit pour éloigner toute équivoque. — [On nomme aussi quelquefois *décigrades*, *centigrades*, *milligrades*...., les dixièmes, centièmes, millièmes.... du grade.]

N° 127. Chacune de ces divisions a des avantages qui lui sont propres. — Dans la première, par exemple, un plus grand nombre d'arcs sous-multiples du quadrant peuvent s'exprimer exactement en degrés, le nombre 360, qui exprime la quotité des degrés contenus dans la circonférence, ayant plus de diviseurs que le nombre 400, qui exprime la quotité des grades (*voyez* l'*Arithmétique*).

La seconde méthode, de son côté, a sur la première, l'avantage d'être en harmonie avec le système de numération moderne, d'être, par conséquent, exempte de l'inconvénient que présentent les nombres complexes, et par suite, de se prêter plus facilement au calcul. La réduction des fractions décimales d'*unité* d'angle ou d'arc, en degrés, minutes, secondes...., et de celles-ci en fractions décimales d'*unité*, s'y fait immédiatement. On apperçoit tout de suite, par exemple, que $0^{d},3682537$, ou $0^{q},3682537$, équivaut à $36^{gr}82'53''70'''$.

Dans la division moderne, les complémens et les supplémens des angles s'obtiennent comme les complémens arithmétiques, ce qui est encore un avantage de cette division. Ainsi $36^{gr}\,82'\,53''\,70'''$ a pour complément $63^{gr}\,17'\,46''\,30'''$ et pour supplément $163^{gr}\,17'\,46''\,30'''$.

N° 128. Au reste, il est facile de passer de l'une de ces divisions à l'autre : car, d'après ce qu'on vient de dire, le rapport du *degré* au *grade* étant celui de 10 *à* 9, ou bien, ce qui est la même chose, 10 *grades* valant 9 *degrés*, on peut en conclure que pour transformer des degrés en grades, il suffit, après avoir réduit les minutes et secondes sexagésimales en fraction décimale de degré, de multiplier par $\frac{10}{9}$ pour avoir le nombre de grades correspondant : la fraction décimale obtenue ainsi, présente, sans autre calcul, les minutes et secondes centésimales. Au contraire, pour transformer des grades en degrés, il faut multiplier par $\frac{9}{10}$, et réduire la partie fractionnaire en minutes, secondes, etc. C'est en opérant ainsi que l'on trouvera, par exemple, que $36^{gr}82'53''70'''$ [division centésimale] équivaut à $33°8'34''12'''$ [division sexagésimale], à *une tierce* près.

La division des arcs en degrés ou en grades est surtout employée dans la *Trigonométrie*, science qui se rattache à la *Géométrie*, et qui a pour but le calcul numérique des *élémens* des *triangles* (n° 74), c'est-à-dire le calcul des côtés et des angles qui entrent dans leur composition.

§ III. — *Problèmes sur les Angles.*

N° 129. PROBLÈME I. Fig. 78.

Fig. 78. *Étant donné un angle* AOB, *mener par un point* O' *pris sur une droite* O'A', *une autre droite* O'B' *qui fasse avec la première un angle égal à l'angle donné.*

SYNTHÈSE. — *Construction.* — 1° Du point O comme centre, et d'un rayon arbitraire OA, décrivons entre les côtés de l'angle O, un arc AB. — 2° Du point O' comme centre, et du même rayon, décrivons un arc indéfini A'B'. — 3° Prenons la distance [rectiligne] AB ; et avec cette distance comme rayon, décrivons du point A' comme centre un petit arc de cercle qui coupe le précédent en B'. — Menons la droite O'B'.

L'angle A'O'B' sera l'angle demandé.

En effet, si l'on mène AB et A'B', on aura deux cordes égales dans deux cercles de rayons égaux, OA, O'A'; les arcs correspondans à ces cordes seront donc égaux (n° 90, *récipr.* 1re); et par suite, les angles correspondans, AOB, A'O'B', le seront aussi (n° 119). Fig. 78.

Scolie 1er. — Le problème n'est complètement *déterminé* (n° 58), qu'autant que l'on indique comment doit être située la droite cherchée; sans quoi il y a *quatre* solutions.

Scol. 2. — L'angle donné peut être droit; dans ce cas, la construction précédente fournit la solution du problème suivant :

Par l'extrémité d'un segment de droite [qui ne peut être prolongé] *élever une perpendiculaire.*

N° 130. Problème II. Fig. 79.

Par deux points donnés, A, B, mener respectivement deux droites qui se coupent sur une troisième droite donnée MN, en faisant avec elle, de part et d'autre, des angles égaux, ACM, BCN. Fig 79.

Analyse. — Le point C étant le point d'intersection cherché, on aura

$$ACM = BCN;$$

et si l'on prolonge BC au-delà de MN en CA', on aura aussi

$$A'CM = BCN = ACM.$$

De plus, si l'on abaisse sur MN la perpendiculaire ADA', et que l'on prolonge cette perpendiculaire jusqu'à la rencontre de BCA' au point A', les deux droites CA, CA', considérées comme des obliques par rapport à la perpendiculaire CD, en seront également distantes : car la portion de figure ACA' a évidemment la droite CD pour *axe de symétrie* (n° 86). — Ainsi l'on aura $A'D = AD$.

Construction. — 1° Abaissons sur MN la perpendiculaire AD (n° 100); et prolongeons AD d'une *quantité* $DA' = DA$. — 2° et 3° : Menons les droites BCA' et AC.

AC et BC seront les droites demandées, conformément à *l'analyse*.

Scolie. — Le système des droites AC, BC, forme *le plus court chemin* pour aller de A en B en passant par un point de la droite MN :

En effet, pour tout autre point C′ pris sur MN, on aurait

$$BC' + C'A' > BA', \quad \text{ou} \quad > BC + CA';$$

d'où, à cause de $C'A' = C'A$ et de $CA' = CA$,

$$BC' + C'A > BC + CA;$$

C. Q. F. D.

N° 131. Problème III. Fig. 80.

Fig. 80. *Partager en deux parties égales un angle donné* AOB.

Synthèse. — *Construction.* — 1° Du sommet O comme centre, et d'un rayon quelconque OA, décrivons l'arc ACB, terminé aux deux côtés de l'angle, en A et en B. — 2° Marquons un point quelconque K à égale distance des points A et B. — 3° Menons OK.

Cette droite OK sera la bissectrice cherchée (n° 70).

En effet, si l'on mène la corde AB, la droite OK sera perpendiculaire sur son milieu (n° 85, *scol.* 1[er]). Par conséquent, cette droite partage l'arc ACB en deux parties égales (n° 88, *récipr.* 2), ainsi que l'angle correspondant AOB (n° 119).

Scolie. — Cette construction sert aussi à

1° *Partager en deux parties égales, un arc* ACB, ou *un secteur* OACB, ou *un segment* ACBD.

Par suite, au moyen d'applications successives de la construction précédente, on peut parvenir à

Partager un angle, ou un arc, ou un secteur [mais non un segment], *en* 4, 8, 16... *parties égales.*

C'est encore, d'après le *numéro* 115 (*scol., récipr.*), cette construction que l'on doit employer pour

2° *Décrire une circonférence qui touche trois droites données;*

Mais cette question ne sera traitée complètement que plus loin (*chap.* IV, n° 167), et c'est seulement comme exemple d'application du problème précédent (n° 131), que nous indi-

querons ici le cas particulier de *deux droites parallèles* Fig. 81.
(n° 71), AB, CD (fig. 81), *coupées par une transversale* (n° 72) EF, respectivement aux points M, N, [ce qui du reste, ne suppose nullement la théorie des parallèles qui doit faire l'objet du chapitre suivant].

Analyse *et construction.* — Il est facile de voir que l'on doit trouver *deux* solutions [ni plus ni moins], c'est-à-dire qu'il y aura *deux* cercles qui satisferont également à la question, situés, l'un d'un côté de la transversale MN, l'autre de l'autre.

Cela posé, le centre O de l'un de ces deux cercles doit être situé sur la bissectrice de l'angle AMN, et sur celle de l'angle MNC (n° 115, *scol.*); donc il se trouvera à leur intersection; et le rayon sera l'une des perpendiculaires [égales d'après le *numéro* 115] abaissées du point O sur l'une des trois droites proposées.

Le même moyen servira à trouver le second cercle O'. — Ou bien, on emploiera cette considération, que les droites MO', NO', sont respectivement perpendiculaires aux droites MO, NO (n° 112, *coroll.* 4).

N. B. — Voyez à la fin du volume, dans la *Note* A, la description et l'usage de la *fausse-équerre*, du *rapporteur*, du *graphomètre*, et du *vernier circulaire*.

CHAPITRE III.

DES PARALLÈLES.

§ Ier. — *Propriétés générales des Parallèles.*

N° 132. Nous avons dit (n° 71) que l'on nomme PARALLÈLES (*) des *droites qui, situées dans un même plan, ne se rencontrent pas, quelque loin qu'on les prolonge;* mais jusqu'à présent, nous ne savons pas s'il existe de pareilles lignes.

Or, il est facile de constater la possibilité de droites qui remplissent les conditions de la définition précédente. En effet, que l'on suppose par exemple, *dans un même plan, deux droites*
Fig.82. distinctes, AB, CD, (fig. 82), *perpendiculaires à une troisième* EF aux points respectifs M et N. Il est clair que ces deux perpendiculaires *ne sauraient se rencontrer*, quelque loin qu'on les prolonge : car si elles se rencontraient en un point O, il y aurait, de ce point, deux perpendiculaires, AB, CD, abaissées sur une même droite EF, ce qui est absurde (n° 82). Les deux perpendiculaires *sont* donc des droites *parallèles.*

Deux droites parallèles étant nécessairement dans un même plan d'après leur définition, déterminent ce plan (n° 11).—On le nomme *le plan des deux parallèles;* et nous appellerons BANDE la *portion de plan comprise entre* les *deux parallèles.*

N° 133. LEMME I. Fig. 83.

Fig.83. *Un angle* AOB, quelque petit qu'il puisse être, *n'est contenu dans un plan qu'un nombre limité de fois.*

En effet : supposons que l'on fasse tourner l'angle AOB autour de OB comme charnière (n° 44), de manière qu'il vienne

(*) Παράλληλοι : de *παρὰ, à côté;* et ἀλλήλοι, *l'un l'autre.*

se rabattre, sur son plan primitif, en BOC.—Supposons de même que l'on fasse tourner BOC autour de OC, de manière à former un troisième angle COD égal à chacun des deux premiers..... —*Et ainsi de suite*, en continuant toujours à retourner l'angle primitif successivement *sens dessus dessous.*

Cela posé, quelque petit que soit cet angle, en le répétant comme on vient de l'expliquer, un nombre suffisant de fois, nombre essentiellement *fini* qu'il serait possible d'assigner et qui est d'autant plus petit que l'angle AOB est plus grand, il est visible que l'on obtiendra bientôt une somme d'angles assez grande pour recouvrir entièrement le plan; *ce qui démontre la proposition* énoncée.

Autrement (voyez le n° 124) : — Si du sommet O comme centre et d'un rayon quelconque OA, on décrit une circonférence, l'arc total correspondant à la somme des angles, finira par égaler la circonférence entière lorsque chaque arc particl sera une partie aliquote de cette circonférence, et, dans le cas contraire, par surpasser la même circonférence. Or, comme la somme d'angles qui correspond à cette circonférence recouvre entièrement le plan (*voyez* le n° 120), on se trouve ainsi conduit à la même conséquence.

Scolie. —De là on peut conclure qu'un angle, quelque petit qu'il soit, surpasse en grandeur toute figure susceptible d'être contenue dans un plan un nombre indéfini de fois, que cette figure soit ou ne soit pas limitée de toutes parts;

Et de plus, l'angle lui-même contient cette figure un nombre indéfini de fois.

[Nous avons déjà fait usage de la propriété précédente au *numéro* 116.]

N° 134. LEMME II. Fig. 84.

Toute bande comprise entre deux parallèles, AB, CD, quel que soit leur écartement, *est contenue dans un plan un nombre infini de fois.* Fig. 84

En effet: faisons d'abord tourner la bande ABCD autour de CD comme charnière (n° 44), de manière qu'elle vienne se ra-

battre, sur son plan primitif, en CDA'B'. — Faisons de même tourner CDA'B' autour de A'B', de manière à former une troisième bande A'B'C'D' égale à chacune des deux premières. . . — *Et ainsi de suite.*

Remettons maintenant la bande ABCD dans sa position primitive; et retournons-la successivement *sens dessus dessous*, au-delà de AB, comme nous l'avions fait au-delà de CD : nous aurons d'autres bandes égales aux premières, AB*cd*, *cdab*, *abc'd'*, . . . etc.

Or, quel que soit l'*écartement* des deux parallèles, il est évident que le nombre des bandes égales que l'on pourra former ainsi, sera *infini* : c'est-à-dire qu'il est impossible de recouvrir entièrement le plan avec un nombre limité de ces bandes.

N° 135. LEMME III.

Toute bande comprise entre deux parallèles est moindre qu'un angle quelconque.

En effet, nous venons de voir — 1° qu'*Un angle n'est contenu dans un plan qu'un nombre limité de fois* (n° 133); — et au contraire — 2° qu'*Une bande y est contenue un nombre infini de fois* (n° 134) : — donc l'angle est plus grand que la bande (n° 133, *scol.*).

SCOLIE. — On peut même dire que
La bande est infiniment plus petite que l'angle;
ou que — *L'angle équivaut à une infinité de bandes* (n° 133, *scol.*).

N° 136. THÉORÈME I. Fig. 85.

Fig. 85. *Par un point donné* O — 1° *On peut toujours mener une parallèle à une droite donnée* AB, — et — 2° *On n'en peut mener qu'une.*

En effet : — 1° Par le point O l'on peut toujours à la fois, abaisser une perpendiculaire OP sur AB (n° 82), et élever, dans le plan ainsi déterminé (n° 12), une perpendiculaire sur OP (n° 81) : or cette seconde perpendiculaire est évidemment parallèle à AB (n° 132).

2° Pour que l'on pût mener à AB, par le point O, deux parallèles CD, EF, il faudrait que l'angle DOF pût être contenu dans la bande ABCD, ou l'angle COE dans la bande ABEF; — *Ce qui est absurde.*

COROLLAIRE 1er. — *Deux droites*, AB, CD (fig. 86), *respectivement parallèles à une troisième* EF [et supposées dans un même plan avec EF] *sont parallèles entre elles :* Fig.86.

Car si elles se rencontraient, on pourrait, par un même point, mener deux parallèles, AB, CD, à une même droite EF; — *Ce qui est absurde.*

Ainsi : — *Deux droites parallèles entre elles ont toutes leurs parallèles communes.*

Coroll. 2. — Si, par un point pris sur AB (fig. 84), on menait une droite quelconque [différente de AB], cette droite rencontrerait toutes les parallèles CD, A'B', C'D'........ *cd, ab, c'd'...* Fig.84.

N° 137. THÉORÈME II. Fig. 87.

Deux droites, AB, CD, *sont parallèles lorsqu'elles font avec une même transversale* (n° 72) EF [respectivement en deux points, M, N] *des angles alternes-internes égaux.* Fig.87.

Observons d'abord que deux angles alternes-internes, par exemple AMN et MND, ne peuvent être égaux entre eux sans que les deux autres angles alternes-internes, BMN, MNC, qui sont les supplémens respectifs des premiers (n° 112), ne soient aussi égaux entre eux (n° 111). Cela posé, admettons que les segmens indéfinis de droite, MA, NC, se rencontrent; et, dans cette hypothèse, faisons *pivoter* (n° 44) la portion de plan AMNC autour du point O milieu de MN, de manière que OM prenne la place de ON, et ON la place de OM. Alors, le segment indéfini MA prendra la position ND, et le segment NC la position MB, puisque, d'après l'hypothèse faite sur les angles, on a

angle AMN = *angle* MND, et *angle* BMN = *angle* MNC.

Or, les segmens indéfinis MA, NC, ne cessant pas de se rencontrer dans cette nouvelle position, il en résulte que les segmens MB, ND, avec lesquels ils coïncident maintenant chacun à chacun, se rencontreraient aussi ; et alors les droites AB, CD, auraient deux points communs ; — *Ce qui est absurde*.

N° 138. Théorème III. Fig. 88.

Fig. 88. *Deux droites*, AB, CD, *concourent* (n° 8) *lorsque les angles alternes-internes qu'elles font avec une transversale* EF [respectivement en deux points, M, N] *sont inégaux*.

En effet, si par le point N, par exemple, on mène la droite C'D' de manière que les angles AMN, MND', soient égaux, les droites AB, C'D', seront parallèles (n° 137) ; donc AB et et CD doivent se rencontrer (n° 136, 2°).

N° 139. Remarque. — Chacun des deux théorèmes précédens (n°s 137 et 138) est susceptible d'un énoncé beaucoup plus étendu.

Fig. 78. En effet, dans la *figure* 87, les angles AMN, MND, BME, CNF, d'une part, et les angles BMN, MNC, AME, DNF, d'autre part, étant égaux quatre à quatre, et chacun des quatre premiers étant supplémentaire de chacun des quatre derniers, il s'ensuit que le *théorème* II (n° 137) peut être présenté de la manière générale suivante :

Théor. II. — *Deux droites sont parallèles lorsque, étant coupées par une transversale, elles font avec cette dernière*,

ou — 1° *Des angles alternes-internes égaux*,

ou — 2° *Des angles alternes-externes égaux*,

ou — 3° *Des angles correspondans égaux*,

ou — 4° *Des angles internes d'un même côté supplémentaires*,

ou — 5° *Des angles externes d'un même côté supplémentaires* ;

Fig. 88. Et de même (fig. 88), le *théorème* III (n° 138) peut s'énoncer plus généralement comme il suit :

THÉOR. III. — *Deux droites concourent lorsque, étant coupées par une transversale, elles font avec cette dernière,*

ou — 1° *Des angles alternes-internes inégaux,*

ou — 2° *Des angles alternes-externes inégaux,*

ou — 3° *Des angles correspondans inégaux,*

ou — 4° *Des angles internes d'un même côté non supplémentaires,*

ou — 5° *Des angles externes d'un même côté non supplémentaires.*

Il faut avoir soin d'observer de plus, que dans le *théorème* III,

La rencontre a lieu du côté de la transversale où les angles internes forment une somme moindre que 2 DROITS.

Maintenant, ces deux théorèmes, ainsi généralisés, offrent plusieurs cas particuliers remarquables. Par exemple, la proposition que

Deux droites, menées dans un même plan perpendiculairement à une troisième, sont parallèles (n° 132),

Devient un cas particulier du *théorème* II.

De même, le *théorème* III fournit la proposition suivante :

Une perpendiculaire AB (fig. 89) *et une oblique* CD *menées à une même droite* EF [respectivement en deux points M, N] *doivent se rencontrer* [du côté de l'angle interne aigu MNC]. Fig. 89.

N. B. — Cette dernière proposition prouve d'ailleurs que le cas d'impossibilité relatif aux problèmes des *numéros* 102 (4°), 103, *et* 104, et signalé dans leur discussion, est en effet le seul auquel ils soient assujettis, comme nous l'avons avancé au *numéro* 102 (*N. B.*).

De même, le *théorème* III généralisé comme il vient de l'être, prouve que les bissectrices des deux angles internes de chaque côté de la transversale, se coupent toujours ; ce qui vérifie une assertion que nous avons émise au *numéro* 131, dans l'analyse du *problème* 2ᵉ du *scolie*.

N° 140. Réciproques *des deux théorèmes précédens.* — De plus, les *théorèmes* II *et* III se trouvant dans le cas de la remarque générale du *numéro* 51, il s'ensuit que *leurs réciproques sont vraies.*

Ainsi : — *Lorsque deux droites coupées par une transversale sont parallèles,* on peut affirmer, tout à la fois,

1° Que — *les angles alternes-internes*, ou *alternes-externes*, ou *correspondans, sont égaux deux à deux ;*

Et 2° que — *les angles internes* ou *externes d'un même côté, sont supplémentaires.*

Au contraire : — *Lorsque deux droites coupées par une transversale ne sont pas parallèles,* il est certain, tout à la fois,

1° Que — *les angles alternes-internes,* ou *alternes-externes,* ou *correspondans*, *sont inégaux ;*

Et 2° que — *les angles internes* ou *externes d'un même côté, ne sont pas supplémentaires ;*

Et de plus, il est clair qu'alors — *c'est* toujours *du côté du point d'intersection que les angles internes font la plus petite somme.*

La première des deux réciproques qui précèdent offre aussi un cas particulier remarquable, réciproque lui-même de la proposition du *numéro* 132 ; en voici l'énoncé :

Deux droites parallèles, AB, CD (fig. 82), *ont leurs perpendiculaires communes.*

A cause de l'importance de cette dernière proposition, il ne sera pas inutile d'en développer spécialement la démonstration suivante.

D'abord, si la droite EF [que l'on suppose dans le plan des deux parallèles] est perpendiculaire à AB, en M par exemple, elle ira rencontrer CD : sans quoi l'on pourrait, par un même point M, mener deux parallèles à la droite CD. — Secondement, la droite EF sera perpendiculaire à CD : car sans cela elle lui serait oblique ; et alors les droites AB, CD, étant l'une perpendiculaire et l'autre oblique à une même droite EF, se rencontreraient (n° 139) ; — *Ce qui est contraire à l'hypothèse.*

On conclut de la dernière proposition combinée avec celle du *numéro* 132, que

Les perpendiculaires à un système de droites parallèles, forment un second système de droites parallèles.

Et enfin, de la seconde réciproque générale résulte comme cas particulier cette proposition, que

Deux droites non parallèles ne sauraient avoir de perpendiculaires communes.

N° 141. THÉORÈME IV. Fig. 90.

Deux parallèles, AB, CD, *sont partout également distantes; — et réciproquement.* Fig 90.

D'abord, la ligne la plus courte que l'on. puisse mener d'un point, E ou G, donné sur la droite AB, à sa parallèle CD, est une perpendiculaire, EF ou GI, commune (n° 140) à ces deux droites : cette perpendiculaire mesure donc, pour les points E ou G, la distance des deux parallèles. Ainsi, la question revient à démontrer que les perpendiculaires EF, GI, sont égales.

Pour cela, par le point M, milieu de EG, élevons sur AB la perpendiculaire MN : elle ira rencontrer (n° 140) en un point N, la parallèle CD; rabattons BMND sur AMNC. Tous les angles de la figure étant droits, MG prendra la direction ME; et comme $MG = ME$, le point G tombera sur le point E. Ensuite GI prendra la direction EF, et NI la direction NF; donc le point I tombera en F : donc

$GI = EF$; *C. Q. F. D.*

RÉCIPROQUEMENT : — *Si deux droites sont partout également distantes, elles sont parallèles :*

Car alors elles ne sauraient se rencontrer.

Et d'ailleurs, comme deux points déterminent une droite (n° 8), on peut affirmer que

Deux droites sont parallèles lorsque deux points de l'une d'elles sont également distans de l'autre.

Scolie. — Tous les points qui sont à une distance donnée et du même côté d'une droite, se trouvent sur une même parallèle à la droite ; de plus, les points situés *de ce même côté* de la droite, sont en dedans ou en dehors des deux parallèles, suivant que leur distance à la droite est plus petite ou plus grande que la distance donnée.

Il est bon d'observer en outre, qu'une troisième parallèle menée à égale distance des deux premières, tient lieu de la bissectrice (n° 70) de l'angle de celles-ci (*voyez* le n° 115, *coroll.*).

Fig. 91. N° 142. REMARQUE.—Soient AB, CD (fig. 91), deux parallèles ; et supposons que d'un point quelconque O pris sur CD, on mène à AB la perpendiculaire OP et une série d'obliques, OR, OR′, OR″... : les points R, R′, R″... étant déterminés d'après cette *loi* : PR = PO, RR′ = RO, R′R″ = R′O...

Cela posé, la première oblique OR sera la bissectrice de l'angle POD : car on a POR = PRO (n° 117) = ROD (n° 140). De même, OR′ sera la bissectrice de ROD, OR″ la bissectrice de R′OD.... D'où il résulte que les angles DOP, DOR, DOR′, DOR″.... sont représentés par la série des nombres : $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$, et par conséquent peuvent devenir plus petits que tout angle donné, sans que la droite AB cesse pour cela d'être rencontrée par les obliques OR, OR′, OR″..., lesquelles deviennent plus grandes que toute ligne donnée, ainsi que les distances PR, PR′, PR″.... Par conséquent, les obliques OR, OR′, OR″,... se rapprochent indéfiniment de la droite CD qui est ainsi leur *limite* ; et par suite,

Les *Deux parallèles* AB, CD, peuvent être considérées comme deux droites qui *se rencontrent à l'infini en faisant entre elles un angle nul.*

§ II. — *Conséquences des propriétés des Parallèles.*

N° 143. THÉORÈME V. Fig. 92.

Fig. 92. *Lorsque deux droites*, AB, CD, *se coupent, leurs perpendiculaires respectives*, MN, PQ, *se coupent aussi.*

En effet, si MN et PQ étaient parallèles, AB et CD leur étant à la fois perpendiculaires (n° 140), seraient aussi parallèles (n° 137) ; — *Ce qui est contraire à l'hypothèse.*

Scolie. — Le problème du *numéro* 102 (3°) est toujours possible quand les *trois* points donnés ne sont pas en ligne droite (*voyez* le *N. B.* du n° 102).

Digitized by Google

N° 144. Théorème VI. Fig. 93-95.

Deux angles sont égaux ou supplémentaires lorsqu'ils ont les côtés parallèles, chacun à chacun.

Il peut se présenter *trois* cas :

1° Les angles, AOB, A'O'B', peuvent avoir les côtés dirigés chacun à chacun dans le même sens (fig. 93).—Dans ce cas, le côté A'O', par exemple, [prolongé s'il est nécessaire] rencontrera le côté OB en un point C; et l'on aura, par la propriété des angles correspondans (n° 140), Fig. 93.

$$AOB = A'CB, \quad A'CB = A'O'B;$$

d'où
$$AOB = A'O'B':$$

Donc — *Deux angles sont égaux lorsque les côtés de l'un sont parallèles aux côtés de l'autre et dirigés dans le même sens, chacun à chacun.*

2° Les angles, AOB, A'O'B', peuvent avoir les côtés dirigés chacun à chacun en sens contraire (fig. 94). — Dans ce cas, soit OA" le prolongement de OA, et OB" le prolongement de OB : on aura Fig. 94.

$$AOB = A''OB'' \text{ (n° 114), et } A''OB'' = A'O'B' \text{ (n° 144; 1°)};$$

d'où
$$AOB = A'O'B':$$

Donc — *Deux angles sont égaux lorsque les côtés de l'un sont parallèles aux côtés de l'autre et dirigés en sens contraires, chacun à chacun.*

3° Enfin, supposons le côté O'A' dirigé dans le sens de OA et O'B' dans le sens contraire de OB (fig. 95). — Alors, soit prolongé *un* quelconque des *quatre* côtés : soit, par exemple, OA" le prolongement de OA : les angles AOB et A"OB seront supplémentaires (n° 112) ; mais celui-ci est égal à A'O'B' (n° 144, 1° ou 2°); donc AOB et A'O'B' sont supplémentaires : Fig. 95.

Donc — *Deux angles sont supplémentaires lorsque les côtés de l'un sont parallèles aux côtés de l'autre, chacun à chacun, mais non dirigés à la fois dans le même sens ou en sens contraires.*

Ainsi, la proposition est complètement démontrée.

N° 145. THÉORÈME VII. Fig. 96.

Deux angles sont égaux ou supplémentaires lorsqu'ils ont les côtés perpendiculaires chacun à chacun.

Fig. 96. Considérons d'abord deux angles *aigus*, AOB, A'OB'; et supposons, de plus, qu'ils aient même sommet.

Dans cette hypothèse, on aura

AOB = 1 *droit* — A'OB, et A'OB' = 1 *droit* — A'OB;

d'où A'OB' = AOB.

Maintenant, les deux droites OA', OB', prolongées de toutes parts, ne peuvent former que quatre angles, dont l'un, A'OB', est déjà reconnu égal à AOB; un second, *a'Ob'*, opposé au précédent, égale donc aussi AOB; enfin les deux autres, A'O*b'*, *a'*OB', adjacens à A'OB', et par conséquent supplémentaires de celui-ci, le sont par suite de AOB.

Ainsi la proposition énoncée est déjà démontrée pour deux angles qui ont même sommet.

Secondement, considérons un angle O, ou plus généralement les *quatre* angles formés par deux droites A'*a'*, B'*b'*, qui se coupent en un point O; et comparons ces quatre angles à un angle isolé A"O"B" dont les côtés soient respectivement perpendiculaires à ces droites. Pour cela menons, par le point O, les droites OA et OB parallèles aux droites O"A" et O"B", chacune à chacune, et de plus, dirigées, à partir du point O, dans le même sens que O"A" et O"B" le sont à partir du point O". Les angles AOB et A"O"B" seront égaux (n° 144). Mais AOB et A'OB' sont nécessairement, d'après ce qui précède, égaux ou supplémentaires (n° 140); donc A"O"B" et A'OB' sont aussi égaux ou supplémentaires; ce qui complète la démonstration.

SCOLIE. — Le théorème précédent présente, comme cas particulier, cette proposition que l'on peut vérifier facilement :

Si d'un point pris dans l'intérieur d'un angle donné, on abaisse des perpendiculaires sur ses côtés ou sur leurs prolongemens, l'angle formé par ces perpendiculaires sera le supplément de l'angle donné.

N° 146. REMARQUE *sur les deux théorèmes précédens.*—Dans la démonstration du dernier théorème, ce qui est relatif à l'égalité revient à dire que les deux angles dont il s'agit sont égaux parce que, augmentés ou diminués à la fois d'un même angle, ils donnent pour résultat commun, un angle droit. Or, comme la proposition serait également vraie pour tout autre résultat, il s'ensuit que ce même théorème, ainsi que le précédent, ne sont que deux cas particuliers d'une proposition beaucoup plus générale.

Soit en effet un angle AOB (fig. 96) : si on le fait *pivoter* (n° 44) autour de son sommet, dans son plan, il y prendra successivement une infinité de positions différentes, et entre autres les *quatre* positions remarquables indiquées par la figure : il deviendra d'abord [si l'on peut s'exprimer ainsi] perpendiculaire [A'OB'] à sa première position, puis opposé [*aOb*], puis une seconde fois perpendiculaire [*a'Ob'*], et enfin il reprendra sa position primitive [AOB]. Or dans ces quatre positions remarquables, ainsi que dans toutes les positions intermédiaires, l'angle AOB conservera constamment la même valeur. Fig 96.

N° 147. REMARQUE *sur les théories précédentes.* — On a vu (n° 139) que lorsque deux parallèles, AB, CD (fig. 87), sont coupées par une transversale EF, il en résulte quatre couples d'angles correspondans égaux entre eux. Dire que les angles AMF, CNF, par exemple, sont égaux, c'est dire qu'ils peuvent se superposer (n° 3), ou bien qu'ils correspondent à des arcs égaux (n° 119) : cela se conçoit bien. Cependant au premier abord, il paraîtrait s'ensuivre que la partie CNF est égale au tout AMF. Fig. 87.

Pour résoudre cette espèce de paradoxe, il suffit de se rappeler les deux lemmes qui ont été établis précédemment dans les *numéros* 133 et 134, ainsi que leurs conséquences (n° 135). Il s'ensuit en effet, que le rapport de l'angle AMF, ou de l'angle CNF, à la bande ABDC, ou à sa moitié AMNC, est *infiniment grand*; ou bien que le rapport de la bande à l'angle est *infiniment petit*, c'est-à-dire *nul*; ou bien enfin, comme nous l'avons déjà dit (n° 135), que l'angle contient une infinité de bandes. D'où il suit nécessairement que la bande ne forme pas une quantité comparable à l'angle, ou mieux, que la bande et l'angle forment deux espèces différentes de grandeurs dont la première doit être considérée comme nulle et entièrement négligée en comparaison de la seconde (*).

(*) En d'autres termes, l'*aire* de la bande (*voyez* ci-après le *chap.* IV du *liv.* II) est une quantité *infinie du premier ordre*, parce qu'elle a une longueur infinie et une largeur finie ; tandis que l'aire de l'angle est une quantité *infinie du second ordre*, parce que ses deux dimensions sont infinies (*voyez* la *note* de la *page* 3). Or, de même qu'une quantité entièrement finie doit être négligée vis-à-vis d'une quantité infinie (*voyez* le n° 116), de même aussi une quantité infinie du premier ordre doit être négligée vis-à-vis d'une quantité infinie du second ordre ou d'un ordre supérieur.

C'est là ce qui explique en particulier comment tous les angles droits peuvent être égaux entre eux (n° 78, 2°), c'est-à-dire pourquoi,

Par quelque point d'un plan que l'on mène deux droites perpendiculaires entre elles, ces droites partagent toujours le plan en quatre portions égales.

§ III. — *Des Parallèles considérées dans le Cercle. — Mesure des Angles Excentriques.*

N° 148. THÉORÈME VIII. Fig. 97.

Fig 97. *Deux tangentes*, ST, UV, *menées aux extrémités d'un même diamètre* AF, *sont parallèles ; — et réciproquement.*

En effet, ces deux tangentes ne sont autre chose que des perpendiculaires à une même droite (n°s 89 et 139).

Réciproquement :— Deux tangentes parallèles ont nécessairement leurs points de contact situés aux extrémités d'un même diamètre : car les rayons qui aboutissent à ces deux points, étant à la fois perpendiculaires aux deux tangentes, doivent être les prolongemens l'un de l'autre (n° 140 ; et n° 82, 2°).

Fig. 81. — [Tel est, par exemple, le cas de la *figure* 81 (voyez le n° 131, *scolie*, 2°).]

N° 149. THÉORÈME IX. Fig. 97.

Fig. 97. *Deux parallèles interceptent sur la circonférence des arcs égaux.*

Il peut se présenter *trois* cas :

1° Si les parallèles sont deux sécantes, BC, DE, le diamètre qui leur est perpendiculaire coupera la circonférence en deux points, A, F, également distans, d'une part, des points B et C, et d'autre part, des points D et E (n° 88). On aura donc :

$$arc\ AB = arc\ AC \quad \text{et} \quad arc\ AD = arc\ AE ;$$

d'où

$$arc\ BD = arc\ CE.$$

2° Si, des deux parallèles, l'une est tangente, ST ou UV, et l'autre sécante, BC, en leur menant par le centre, une perpendiculaire AOF, cette droite passera par le point de tangence (n° 89, *récipr.* 2), A ou F, et coupera d'ailleurs l'arc BAC ou BFC en deux parties égales (n° 88, *récipr.* 1re); Fig. 97.
donc $AB = AC$, ou $FB = FC$.

3° Enfin, si les parallèles sont deux tangentes, ST, UV, la droite AF qui passe par les points de tangence est un diamètre (n° 148, *récipr.*); et alors les arcs ABDF, ACEF, égaux à la demi-circonférence, sont égaux entre eux.

La *réciproque* de cette proposition, que l'on démontrerait aisément par la réduction à l'absurde, serait la suivante :

1° Si deux arcs égaux [d'un même cercle] n'ont aucune extrémité commune, les droites qui lient deux à deux une extrémité de l'une à une extrémité de l'autre *sans se couper dans l'intérieur du cercle*, sont parallèles ;

2° Si deux arcs égaux ont *une* extrémité commune, la droite qui joint les extrémités non communes est parallèle à la tangente menée par l'extrémité commune ;

3° Enfin, si deux arcs égaux ont leurs *deux* extrémités communes, les tangentes menées par ces extrémités sont parallèles ; et alors chacun des deux arcs est une demi-circonférence (n° 148, *récipr.*).

N° 150. Définitions. — Par opposition à la dénomination d'*angle au centre*, on appelle *angle excentrique*, tout angle, APB (fig. 98 — 109), dont les côtés coupent ou touchent la circonférence, et dont le sommet est placé ailleurs qu'au centre, ce qui peut avoir lieu de *trois* manières principales et bien distinctes : l'angle pouvant avoir son sommet sur la circonférence même (fig. 98 — 104), ou entre le centre et la circonférence (fig. 106), ou hors du cercle (fig. 107, 108, et 109). Fig. 98 — 109.

Parmi les angles excentriques, deux espèces surtout sont à considérer : l'*angle inscrit* APB (fig. 98 — 104), qui a son sommet sur la circonférence et dont les côtés sont des cordes ; et l'*angle circonscrit* APB (fig. 105 et 109), dont les côtés sont des tangentes.

Si l'on considère un angle inscrit APB (fig. 102 et 103), et que l'on retranche de la circonférence entière, l'arc AP'B com- Fig. 102 et 103.

Fig. 102 et 103. pris entre les côtés de cet angle, l'arc restant APB, ainsi que le segment correspondant, sera *l'arc*, ou *le segment, auquel l'angle* APB *est* dit *inscrit*. — De même, l'angle AP'B est dit *inscrit à l'arc* ou *dans le segment* AP'B.

Fig. 105. Quant à l'angle circonscrit APB (fig. 105), nous appellerons *corde de contact* de cet angle, la corde qui joint les points de tangence, A, B, de ses côtés, avec la circonférence.

N° 151. Théorème X. Fig. 98—101.

Fig. 98 — 101. *Tout angle inscrit* APB *est la moitié de l'angle au centre* AOB *qui correspond au même arc* AB [compris entre ses côtés].

En effet, supposons d'abord que l'un des côtés, PB (fig. 98), passe par le centre; et menons le diamètre MON parallèle à la corde AP. Les angles MOB, PON, qui en résulteront, seront égaux à l'angle proposé APB (n° 140). De plus l'arc PN étant, d'une part égal à l'arc AM (n° 149), et d'autre part égal à l'arc MB (n° 119), les arcs AM et MB, et par suite les angles AOM et et MOB, seront égaux entre eux; donc l'angle MOB, ou son égal APB, est moitié de l'angle AOB. *C.Q.F.D.*

Si aucun des deux côtés ne passe par le centre, l'angle est la somme (fig. 99) ou la différence (fig. 100) de deux angles, APC, BPC, dont un côté PC passe par le centre; et comme on a alors

$$APC = \tfrac{1}{2} AOC \quad \text{et} \quad BPC = \tfrac{1}{2} BOC,$$

il en résulte encore, dans les deux cas,

$$APB = \tfrac{1}{2} AOB.$$

N. B.—On peut considérer comme *limite* des angles inscrits, un *angle*, APB (fig. 101), *formé par une tangente* AA' *et une corde* PB qui se coupent au point de tangence; et *le théorème est également vrai* pour un pareil angle.

Si la corde proposée était un diamètre, la propriété énoncée serait évidente. Supposons donc le cas contraire; et menons le diamètre POC et le rayon OB: l'angle APC étant

droit (n° 89), vaudra la demi-somme des angles supplémentaires POB, BOC ; or, on sait déjà que BPC $=\frac{1}{2}$ BOC : Fig. 101.

donc APB $=\frac{1}{2}$ POB.

Ce que nous venons de dire pour l'angle aigu APB est applicable à l'angle obtus A'PB supplémentaire du premier : c'est-à-dire que l'angle A'PB est aussi moitié de l'angle [plus grand que deux droits] correspondant à l'arc PKCB plus grand que la demi-circonférence (n° 120).

COROLLAIRE 1er. — *L'angle inscrit dans un segment est aigu* (APB, fig. 102), *ou obtus* (AP'B, même fig.), *ou droit* (APB *ou* AP'B, fig. 103), *suivant que le segment est supérieur, ou inférieur, ou égal à un demi-cercle ; — et réciproquement* (n° 51). Fig. 102 et 103.

COROLL. 2. — *Tous les angles*, APB, AP'B, AP"B.... (fig. 104), *inscrits dans le même segment* APP'P"B, *sont égaux, ainsi que les angles limites*, BAL, ABK, *que forme* [du côté opposé à ce segment] *sa base* AB *avec les tangentes*, AL, BK, *menées à ses extrémités*. Fig 104.

Scolie. — On nomme *arc*, ou *segment*, *capable d'un angle* donné APB (fig. 104), un arc, ou un segment, APB, tel que tous les angles susceptibles d'y être inscrits sont égaux à l'angle APB.

N° 152. THÉORÈME XI. Fig. 105.

Tout angle circonscrit APB *est supplémentaire de l'angle au centre* AOB *qui correspond au même arc* [c'est-à-dire dont les côtés passent par les points de tangence, A, B]. Fig. 105.

Pour le démontrer, décrivons une seconde circonférence sur OP comme diamètre ; cette circonférence passera par les points A, B (n° 151, *coroll.* 1er), puisque les angles OAP, OBP, sont droits (n° 89). Alors, les angles AOB, APB, inscrits dans deux arcs dont la somme compose la circonférence entière AOBP, seront supplémentaires (n° 151).

COROLLAIRE. — *Les angles circonscrits à des arcs égaux, sont égaux.*

Fig. 105. *Scolie.* — La droite OP étant un *axe de symétrie* de la figure (n° 86),

Les tangentes issues d'un même point P, et déterminées de longueur, PA, PB, *sont égales.*

N° 153. REMARQUE *sur la mesure des angles excentriques.*— Il résulte de ce théorème, qu'en prenant toujours pour unité d'arc, l'arc correspondant à l'unité d'angle (n° 122),

Fig. 98 — 100. *Tout angle inscrit* APB (fig. 98, 99, et 100) *a la même mesure* (n° 122) *que la moitié de l'arc* AB *compris entre ses côtés;*

Et son supplément API a la même mesure que la moitié du reste de la circonférence.

Fig. 101. Cette proposition est applicable à tout angle, APB ou A'PB (fig. 101), formé par une tangente AA' et une corde PB.

La mesure la plus naturelle d'un angle étant celle d'un arc de cercle décrit de son sommet comme centre et compris entre ses côtés (n° 122), la nouvelle mesure que nous venons d'indiquer ne doit être considérée que comme secondaire. Elle est cependant très utile dans un grand nombre de circonstances, pour évaluer plus facilement les angles, et pour les comparer plus commodément entre eux. — Il en est de même des suivantes.

Fig. 106. *Tout angle* APB (fig. 106) *formé par deux cordes,* AC, BD [qui se coupent dans le cercle], *a la même mesure que la demi-somme des arcs,* AB, CD, *compris entre ses côtés.*

En effet, si l'on mène par le point D la corde DE parallèle à PA, il en résultera un angle EDB égal à l'angle proposé APB, et qui aura même mesure que la demi-somme des arcs AB et AE, ou ce qui est la même chose (n° 149), des arcs AB et CD.

C. Q. F. D.

Pareillement, l'angle APD, égal à l'angle EDF formé par la corde ED [parallèle à AC] et le prolongement DF de la corde BD, a même mesure que la demi-somme des arcs DE, DC, et CB, ou DE, EA, et CB, ou plus simplement, que la demi-somme des arcs AD et BC.

Tout angle APB *formé par deux sécantes* (fig. 107), *ou par* Fig. 107 — 109.
une sécante et une tangente (fig. 108), *ou par deux tangentes* [angle circonscrit] (fig. 109) [le sommet de l'angle étant, dans les trois cas, extérieur au cercle], *a la même mesure que la demi-différence des arcs,* AEB, CD (fig. 107), ou AEB, CB (fig. 108), ou AEB, AB (fig. 109), *compris entre ses côtés.*

En effet, si l'on mène parallèlement à PA, par ce point D (fig. 107) la corde DE, ou par le point B (fig. 108 et 109) la corde BE, il en résultera un angle EDB (fig. 107) ou EBG (fig. 108 et 109), correspondant à APB, et ayant même mesure que la moitié de AEB moins la moitié de AE; et comme AE est égal à CD (fig. 107), ou à CB (fig. 108), ou à AB (fig. 109), il en résulte la proposition énoncée.

Quant à l'angle API (fig. 107, 108; et 109) supplément de APB, on déduit facilement de ce qui précède, qu'il a même mesure que l'arc CD plus la demi-somme des arcs extérieurs AC, BD (fig. 107), ou l'arc CB plus la moitié de l'arc AC (fig. 108), ou enfin l'arc AB (fig. 109), ce qui est conforme au *théorème* XI (n° 152).

§ IV. — *Problèmes qui dépendent de la théorie des Parallèles.*

N° 154. PROBLÈME I. Fig. 110.

Par un point C *donné hors d'une droite* AB, *mener une parallèle à cette droite.* Fig. 110.

ANALYSE. — Soit CD la parallèle cherchée. — Si l'on mène une transversale quelconque CE, on aura des angles alternes-internes, CEB, ECD, égaux entre eux (n° 140).

1re *Construction.* — 1° Menons une droite du point C à un point quelconque E de la droite AB. — 2° Du point E comme centre, et d'un rayon égal à EC, décrivons un arc CF coupant AB en F. — 3° Du point C comme centre, et du même rayon CE, décrivons un arc ED. — 4° Du point E comme centre et d'un rayon égal à la corde de l'arc CF (n° 90), décrivons un

Fig. 110. petit arc de cercle qui coupe l'arc ED eu un point D. — 5° Menons la droite CD.

CD est la parallèle demandée (*voyez* les nos 137 et 119).

2e *Constr.* — On peut aussi résoudre le problème en
Fig. 90. abaissant (n° 100) du point donné F (fig. 90) sur la droite donnée AB, la perpendiculaire EF; et élevant (n° 99) par le même point, sur cette perpendiculaire, une autre perpendiculaire CFD qui sera la parallèle cherchée.

Scolie 1er. — *Réciproquement :* — En combinant la *première* construction ci-dessus avec celles des *numéros* 99 et 100, on peut résoudre, d'une autre manière, ce problème du *numéro* 129 (*scol.* 2.) :

Élever une perpendiculaire à un segment de droite, par son extrémité, lorsque le segment ne peut être prolongé :

Il suffit en effet, pour cela, de mener, par un point quelconque, une perpendiculaire à la droite proposée; puis, par l'extrémité de celle-ci, une parallèle à la perpendiculaire.

Scol. 2. — On peut encore, quand on sait mener une parallèle,
Fig. 111. *Déterminer* la grandeur de *l'angle de deux droites*, AB, CD (fig. 111), *que l'on ne peut prolonger jusqu'à leur point de concours.*

Pour cela, par un point A pris à volonté sur l'une, AB, des deux droites proposées, on mène une parallèle AE à l'autre droite CD [ce qui peut se faire, comme on vient de le voir, sans prolonger ces droites] : l'angle BAE est égal à l'angle cherché (n° 140).

N° 155. Problème II. Fig. 90.

Fig. 90. *Une droite* AB *étant donnée, lui mener à une distance donnée* MN, *une parallèle.*

Deux parallèles étant partout également distantes, on peut, pour résoudre le problème : — Élever, par les points quelconques, E, G, de AB, les perpendiculaires EF, GI, égales entre elles et à la longueur MN : la droite CFID menée par les points F, I, sera la droite cherchée.

Digitized by Google

Ou bien : — Par un point quelconque E de AB élever la perpendiculaire EF égale à MN; puis, par le point F, élever sur EF la perpendiculaire CFD : ce sera la parallèle demandée. Fig. 90.

Scolie. — Lorsque l'énoncé ne spécifie pas dans quelle *région* du plan (n° 13), par rapport à la droite donnée, la distance doit être comptée et la parallèle menée, il y a *deux* solutions.

N° 156. PROBLÈME III. Fig. 112.

Par un point C *donné hors d'une droite* AB, *mener une autre droite qui fasse avec la première un angle donné.* Fig. 112.

Construction. — 1° Par un point quelconque D pris sur AB, menons une droite DE qui fasse avec AB un angle égal à l'angle donné (n° 129). — 2° Menons CF parallèle à DE (n° 154).

CF sera la droite demandée.

En effet, etc.... (n° 140).

Scolie 1er. — Ce problème a *deux* solutions quand on ne précise pas la position de la droite demandée.

Scol. 2. — On peut également, au moyen d'une parallèle auxiliaire, résoudre le *problème* II (n° 100) : on ramène ainsi la question à la résolution du *problème* I (n° 99).

N° 157. PROBLÈME IV. Fig. 113.

Décrire, sur un segment de droite donné AB, *un arc capable d'un angle donné* C (n° 151, *scol.*). Fig. 113.

ANALYSE. — ACB étant supposé l'arc demandé, l'angle ACB a même mesure que la moitié du reste ADB de la circonférence (n° 151). — Supposons que par le point A, on mène à cette circonférence une tangente MAN : cette tangente fera avec AB deux angles supplémentaires, dont l'un, BAM, aura aussi même mesure que la moitié de ADB (151, *N. B.*), et sera par conséquent égal à l'angle donné.

Construction. — 1° Menons par le point A, une droite MAN qui fasse avec AB un angle MAB égal à l'angle donné (n° 129).

Fig. 113. — 2° Décrivons une circonférence qui touche MN en A et qui passe par le point B (n° 103).

L'arc ACB [situé dans l'angle supplémentaire BAN] sera, d'après *l'analyse*, l'arc demandé.

Scolie 1er. — Le second segment ADB donné par la même construction, est capable du supplément BAN de l'angle donné.

Scol. 2. — Si l'angle donné est droit, l'arc cherché est une demi-circonférence dont la droite donnée est le diamètre. Le centre se trouvant au milieu de cette droite, la construction de la droite MN devient inutile ; et le problème rentre dans celui du *numéro* 102 (1°).

Scol. 3. — On a ainsi un nouveau moyen de résoudre le problème du *numéro* 106, c'est-à-dire : de

Fig. 114. *Mener une tangente à un cercle* OA (fig. 114), *par un point extérieur.*

Pour cela : — 1° Sur OT comme diamètre décrivons une circonférence (n° 102, 1°). — 2° Au point d'intersection A des deux circonférences, menons dans le cercle donné, le rayon OA. — 3° Menons la droite TA.

Cette droite sera la tangente cherchée.

En effet, l'angle TAO est droit ; etc.... (n° 89).

La *discussion* de cette construction ne peut offrir de difficulté après la discussion que nous avons donnée pour le même problème, au *numéro* 106.

N° 158. PROBLÈME V. Fig. 115.

Fig. 115. *Déterminer un point* D, *connaissant les angles que font entre elles trois droites qui le lient à trois points donnés*, A, B, C.

Il suffit de décrire, sur *deux* des trois droites données, sur AC et BC par exemple, des arcs respectivement capables des deux angles donnés ADC, BDC (n° 157). Le second point d'intersection, D, de ces deux arcs, sera le point cherché.

On pourrait également décrire, sur la troisième droite AB, l'arc capable de l'angle ADB. Cet arc devrait passer par le point D, ce qui fournit une *vérification*, ou une *rectification*, de la solution déjà obtenue.

N° 159. Problème VI. Fig. 116 et 117.

Mener une droite tangente à deux cercles donnés, OT, *ot*. Fig. 116 et 117.

Analyse. — Soit T*t* une tangente commune aux deux cercles : cette tangente sera perpendiculaire aux rayons OT, *ot* (n° 89). Si du point O, centre du plus grand cercle, et d'un rayon OG égal à la différence (fig. 116) ou à la somme (fig. 117) des deux rayons donnés, on décrit une circonférence OG, et que du point o, centre du plus petit cercle, on mène une parallèle à T*t*, cette parallèle sera tangente au cercle OG.

Construction. — 1° Du centre O du plus grand des deux cercles [on peut également employer le plus petit], et d'un rayon égal à la différence (fig. 116) ou à la somme (fig. 117) des deux rayons donnés, décrivons une circonférence OG. — 2° Du centre o du petit cercle menons des tangentes, oG, oG', au cercle OG (n° 106), [on marquons simplement les points de tangence, G, G']. — 3° Menons les rayons OG, OG'; et prolongeons-les jusqu'à la rencontre de la circonférence OT, en T, T'. — 4° Menons, dans le plus petit cercle, des rayons *ot*, *ot'*, parallèles à OG, OG' (n° 154). — 5° Menons les droites T*t*, T'*t'*.

Ces droites sont les tangentes cherchées, d'après *l'analyse*.

Discussion. — Lorsque les deux cercles donnés sont extérieurs l'un à l'autre, il y a *quatre* solutions. — Quand ces cercles se touchent extérieurement, il n'y a plus que *trois* tangentes, parce que deux d'entre elles se confondent en une seule passant par le point de contact des deux cercles. — Quand les deux cercles se coupent, il y a seulement *deux* solutions. — Il n'y en a plus qu'*une* lorsque les deux cercles se touchent intérieurement. — Enfin le problème est *impossible* lorsque les cercles sont intérieurs l'un à l'autre.

Dans le cas particulier où les deux cercles donnés seraient égaux, les tangentes extérieures s'obtiendraient en élevant des diamètres perpendiculaires à la ligne des centres (n° 99), et menant des droites par les extrémités de ces diamètres.

N. B. — Voyez à la fin du volume, dans la *Note* A, ce qui est relatif à la *construction des parallèles* au moyen de l'*équerre* et de la *fausse-équerre*.

CHAPITRE IV.

DU TRIANGLE.

---

§ Ier. — *Propriétés générales des Triangles.*

N° 160. Conformément à ce qui a déjà été dit (nos 73 et 74) relativement aux polygones en général, on peut considérer un *triangle* [ou *trilatère*], soit comme un *système de trois droites* qui se coupent deux à deux en trois points, A, B, C
Fig. 118 (fig. 118), soit comme la *portion de plan* (fig. 119) *circons-*
et 119. *crite par* ces *trois droites*, qui sont les *côtés* du triangle.

La suite fera voir que les propriétés des polygones en général, quel que soit le nombre de leurs côtés, se ramènent toujours à celles du triangle, qui est lui-même le plus simple des polygones (n° 74). — De là résulte la nécessité de faire une étude particulière et approfondie de cette figure.

Le lemme établi dans le *numéro* 80 semble conduire à cette conséquence, que la possibilité de l'existence d'un triangle ayant pour côtés *trois* droites données, dépend de *six* conditions; mais ces conditions se réduisent évidemment à *une seule* consistant en ce que

Le plus grand des trois côtés doit être moindre que la somme des deux autres.

Et *réciproquement*, il serait facile, si cela était nécessaire, de prouver par la théorie de l'intersection des cercles (*voyez* le n° 98, *récipr.* 3°) que — *Si cette condition est remplie* [et toutes les autres s'ensuivent] *l'existence du triangle est possible.*

De plus, il résulte encore du *lemme* démontré dans le *numéro* 116, que

Un triangle a toujours au moins deux angles aigus :

Car, si l'un de ses angles est droit ou obtus, chacun des deux autres, devant être moindre que l'angle supplémentaire adjacent au premier, est nécessairement aigu. — Et par conséquent

Un triangle ne saurait avoir à la fois, ni deux angles droits, ni deux angles obtus, ni un angle droit et un angle obtus.

N° 161. Un triangle est dit *acutangle, rectangle*, ou *obtusangle*, suivant que *le plus grand* de ses trois angles est aigu, droit, ou obtus.

Dans le triangle rectangle (fig. 120), le côté AC opposé à Fig. 120. l'angle droit B prend le nom d'*hypoténuse* (*) ; les deux autres sont les *côtés de l'angle droit*.

Maintenant si, au lieu de considérer la valeur des angles, c'est aux grandeurs relatives des côtés que l'on a le plus particulièrement égard, le triangle reçoit encore d'autres qualifications :

Il est dit *scalène* (**) (fig. 119, 120, 121) lorsque ses *trois côtés*, Fig. 119 comparés deux à deux, sont *inégaux* : — c'est le cas général ; — 121.

Il est dit *isocèle* (***) (fig. 122) lorsque *deux* de ses *côtés*, AC, Fig. 122. BC, sont *égaux* [le troisième, AB, étant généralement inégal aux deux premiers] ;

Enfin le triangle est *équilatéral* (n° 75) s'il a ses trois côtés égaux (fig. 123) : — le triangle équilatéral étant un cas parti- Fig. 123. culier du triangle isocèle, doit jouir de toutes les propriétés de ce dernier ; mais la réciproque *n'est pas vraie* (n°s 35 et 52).

N° 162. Dans tout triangle ABC (fig. 119 et 121), la dis- Fig. 119 et 121. tance CD d'un *quelconque* C des trois *sommets* (n° 73) au côté opposé AB, se nomme *hauteur* du triangle ; ce côté AB prend le nom de *base*, et alors, les deux autres sont dits les *côtés latéraux*. Un côté quelconque du triangle peut être pris pour base [cependant, lorsque le triangle est isocèle, on considère ordinairement comme base, le côté qui diffère des deux autres en longueur] ; et aux divers côtés considérés comme bases correspondent des hauteurs généralement différentes. — Bien que chacun des trois points A, B, C, soit un sommet (n° 73), cependant on appelle plus particulièrement *sommet du triangle*, le sommet C de l'angle opposé au côté que l'on considère comme base ; cet angle prend alors le nom d'*angle au sommet*, et les deux autres, A, B, celui d'*angles à la base*.

(*) *Sous-tendante.* — De ὑπὸ, *sous*, et τείνω, *tendre*.

(**) De σκαληνὸς, *boiteux*. (***) De ἴσος, *égal* ; et σκέλος, *jambe*.

Deux triangles ont même hauteur lorsqu'ils ont leurs bases sur une même droite et leurs sommets sur une même parallèle à cette droite (n° 141), — ou bien encore lorsque, les bases étant parallèles, le sommet de chacun se trouve sur la base de l'autre ou sur son prolongement.

La hauteur correspondante à un côté pris pour base, n'est autre chose que la longueur de la perpendiculaire abaissée sur ce côté, du sommet opposé: laquelle peut tomber dans
Fig. 119 —121. l'intérieur du triangle (fig. 119), ou se confondre avec l'un des côtés (fig. 120), ou enfin tomber à l'extérieur (fig. 121).

Or, il est facile de déduire de ce qui précède, que le premier cas arrive lorsque les angles à la base sont tous deux aigus, le second quand l'un de ces angles est droit, enfin le troisième quand l'un d'eux est un angle obtus : et c'est alors celui dont le sommet est le plus voisin du pied de la perpendiculaire.

N° 163. THÉORÈME I. Fig. 124.

Fig. 124. *La somme des angles d'un triangle quelconque* ACB *est égale à* 2 DROITS.

Prolongeons l'un des côtés, AB par exemple, de manière à former l'angle extérieur CBD; puis, dans cet angle, menons BE parallèle à AC. Nous aurons ainsi

$$CBE = ACB, \quad \text{et} \quad EBD = CAB \ (\text{n}^\circ\ 140);$$

d'où $ABC + BCA + CAB = ABC + CBE + EBD = 2$ *droits*.

COROLLAIRE 1er. — *Tout angle d'un triangle est le supplément de la somme des deux autres.*

COROLL. 2. — *Dans un triangle rectangle, les angles aigus sont complémentaires.*

COROLL. 3. — *Si deux angles d'un triangle sont, chacun à chacun, égaux à deux angles d'un autre triangle, les deux triangles sont équiangles entre eux.*

SCOLIE 1er. — *Chaque angle extérieur d'un triangle est égal à la somme des deux angles intérieurs non adjacens au premier* (voyez le n° 116).

Scol. 2. — De ce théorème on peut aussi conclure ce qui a été dit plus haut (n° 160), que

Un triangle ne peut avoir qu'un seul angle droit ou obtus.

Digitized by Google

On en conclut également [comme ci-dessus (n° 162)] que chaque *hauteur* du triangle tombe dans l'intérieur (fig. 119), ou se confond avec l'un des côtés (fig. 120), ou tombe à l'extérieur (fig. 121), suivant que les angles à la base sont tous deux aigus, ou que l'un de ces angles est droit, ou obtus; et de plus, que dans ce dernier cas, l'angle obtus est celui dont le sommet est le plus voisin du pied de la perpendiculaire. Fig. 119 — 121.

N° 164. THÉORÈME II. Fig. 46.

1° *Lorsque deux côtés*, AE, BE, *d'un triangle* ABE, *sont égaux, les angles opposés sont égaux;* Fig. 46.

2° *Lorsque deux côtés* AF, BF, *d'un triangle* ABF, *sont inégaux, au plus grand côté* BF *est opposé un plus grand angle.*

Par le point C, milieu du troisième côté AB, supposons d'abord qu'on élève une perpendiculaire. — Cela fait :

1[er] *Cas :* — Les deux côtés AE, BE, étant égaux, la perpendiculaire élevée au point C passera par le sommet E (n° 85); et alors les angles A et B seront égaux (n° 84). — (*Voyez* aussi le n° 117.)

2[e] *Cas :* — Puisque l'on a BF > AF, la perpendiculaire coupera BF en un point E (n° 85, *scol.* 2.); et alors, en menant

AE, on aura *angle* BAE = *angle* ABE;
et par conséquent *angle* BAF > *angle* ABF.

Réciproque évidente (n° 51) : — 1° Lorsque deux angles d'un triangle sont égaux, les côtés opposés sont égaux;

2° Lorsque deux angles d'un triangle sont inégaux, au plus grand angle est opposé un plus grand côté.

SCOLIE 1[er]. — Le premier cas du théorème précédent et de sa réciproque étant celui du triangle isocèle, il en résulte que

Dans un triangle isocèle ABC (fig. 122), *les angles*, A, B, *opposés aux côtés égaux, sont égaux; — et réciproquement*, etc. Fig. 122.

Il s'ensuit encore, que

Le triangle isocèle est une figure symétrique (n°86) *ayant pour axe la droite qui joint le milieu* D *de la base avec le sommet ;*

Et que par conséquent : — *Cette droite partage le triangle en deux triangles rectangles égaux*, ayant pour hypoténuses respectives les deux côtés égaux.

La théorie des obliques, combinée avec la proposition du *numéro* 49, et appliquée au cas du triangle isocèle, donne encore lieu, comme dans le *numéro* 88 (*scol.* 1er), à plusieurs propositions que l'on peut résumer comme il suit.

Dans un triangle isocèle :

1° La droite qui partage en deux parties égales l'angle du sommet, est perpendiculaire sur le milieu de la base ;

2° La droite menée du sommet au milieu de la base, partage en deux parties égales l'angle du sommet, et tombe perpendiculairement sur la base ;

3° La perpendiculaire abaissée du sommet sur la base, partage en deux parties égales l'angle du sommet, ainsi que la base ;

4° La perpendiculaire élevée sur le milieu de la base, partage en deux parties égales l'angle du sommet.

Et *réciproquement* : — Un triangle est isocèle :

1° Si la droite qui partage en deux parties égales un des angles de ce triangle, passe par le milieu du côté opposé ;

ou — 2° Si une pareille droite est perpendiculaire sur le côté opposé ;

ou — 3° Si la droite menée d'un sommet au milieu du côté opposé partage l'angle du sommet en deux parties égales ;

ou — 4° Si une pareille droite est perpendiculaire sur le côté opposé ;

ou — 5° Si la perpendiculaire abaissée du sommet d'un angle sur le côté opposé, partage cet angle en deux parties égales ;

ou — 6° Si une pareille droite passe par le milieu du côté opposé ;

ou enfin — 7° Si la perpendiculaire élevée sur le milieu d'un côté passe par le sommet opposé.

Fig. 123. SCOL. 2. — *Un triangle équilatéral* (fig. 123) *est en même temps équiangle ;*

ET RÉCIPROQUEMENT : — *Un triangle équiangle est en même temps équilatéral.*

Le triangle équilatéral est donc un *triangle régulier* (n° 75). Fig. 123.
— Chacun de ses angles a pour valeur les $\frac{2}{3}$ d'UN *droit* (n° 163), ou 60°, ou 66^{gr} $\frac{2}{3}$. Cette circonstance que présente l'angle du triangle équilatéral, de contenir un nombre exact de degrés tandis qu'il ne peut s'exprimer que par un nombre fractionnaire de grades, est assez importante dans un grand nombre de cas, et pourrait motiver, jusqu'à un certain point, la préférence que l'on accorde souvent à la division sexagésimale sur la division centésimale.

Le triangle équilatéral a trois axes de symétrie (n° 86) : — ce sont les droites menées des sommets, A, B, C, de chaque angle, aux milieux, A', B', C', des côtés respectivement opposés. — Ces trois axes se coupent en un point O que l'on nomme ordinairement le *centre* du triangle équilatéral, et qui est également distant, d'une part, de ses trois sommets, et de l'autre, de ses trois côtés.

SCOL. 3. — *Dans un triangle quelconque, au plus grand ou au plus petit des trois côtés est opposé le plus grand ou le plus petit des trois angles ; — et réciproquement.*

Ainsi — 1° *Dans un triangle rectangle* (fig. 120), *l'hypoténuse* AC *est le plus grand des trois côtés ;* Fig. 120.

Et — 2° *Dans un triangle obtusangle* ABC (fig. 121), *le plus grand côté est celui qui est opposé à l'angle obtus* B. Fig. 121.

N° 165. THÉORÈME III. Fig. 125.

Dans un triangle rectangle ABC, *le milieu de l'hypoténuse* BC *est également distant des trois sommets.* Fig. 125.

En effet, puisque l'angle droit, A, est égal à la somme des deux angles aigus, B, C, menons une droite AD qui partage cet angle droit en deux parties, BAD, CAD, dont la première soit égale à B : la seconde sera nécessairement égale à C. Le triangle ABC se trouvera donc ainsi partagé (n° 164, *récipr.*) en deux triangles isocèles, DAB, DAC, ayant pour sommet commun le point D, et pour bases respectives AB, AC ; d'où il résulte, d'abord que le point D ainsi déterminé sera le milieu

de l'hypoténuse, et ensuite, que ce point sera également distant des trois sommets; *C. Q. F. D.*

SCOLIE. — *Dans un triangle rectangle, la droite menée du sommet de l'angle droit au milieu de l'hypoténuse, partage le triangle en deux triangles isocèles* ayant respectivement pour bases les deux côtés de l'angle droit.

COROLLAIRE. — *Si, du milieu de l'hypoténuse, comme centre, et d'un rayon égal à la moitié de cette hypoténuse, on décrit un cercle, sa circonférence passera par les trois sommets;* et elle aura l'hypoténuse pour diamètre.

RÉCIPROQUE. — *Lorsque dans un triangle* ABC, *le milieu* D *d'un côté* BC *est également distant des trois sommets, le triangle est rectangle;* — [et ce côté en est l'hypoténuse].

Fig. 125. En effet, d'après l'hypothèse, les distances AD, BD, CD, étant égales, les angles BAD, ABD, sont égaux (n° 164), ainsi que les angles CAD, ACD; d'où il résulte que

$$BAC = ABC + ACB,$$

et que par conséquent BAC est un angle droit (n°s 163 *et* 161). — *Donc*, etc.

N° 166. THÉORÈME IV. Fig. 126.

Fig. 126. *Dans tout triangle* ABC, *les perpendiculaires élevées sur les milieux des côtés, concourent en un même point.*

Considérons deux de ces perpendiculaires, A'O et B'O, menées respectivement par les milieux des côtés BC et AC: elles se coupent (n° 143), en un point O également distant des trois sommets (n° 85); donc (n° 49) la perpendiculaire abaissée du point O sur le troisième côté AB tombe sur le milieu C' de ce côté: *donc*, etc.

COROLLAIRE 1er. — Le point O étant également distant des trois sommets du triangle, si de ce point, comme centre, et d'un rayon égal à la distance $OA = OB = OC$, on décrit un cercle, sa circonférence passera par les trois sommets, et sera circonscrite (n° 75) au triangle. Ainsi

A tout triangle on peut circonscrire un cercle, Fig. 126.
Ou bien — *Tout triangle est inscriptible* à un cercle.

COROLL. 2. — Le point O est le *seul* qui soit également distant des trois sommets du triangle.

Donc — *Trois points, non situés en ligne droite, déterminent* complètement *une circonférence de cercle* [ce qui est conforme à ce qu'on a déjà dit au *numéro* 93. — *Voyez* aussi les *numéros* 102 (3° et *N.B.*), et 143 (*scol.*)].

COROLL. 3. — *Le centre d'un cercle est le seul point de son plan qui soit également distant de trois points de sa circonférence.*

Scolie. — Le centre du cercle circonscrit à un triangle peut se trouver dans l'intérieur de ce triangle, ou sur l'un des côtés, ou à l'extérieur. Nous avons déjà prouvé dans le *numéro* 165, que le second cas a lieu quand le triangle est rectangle; et il résulte d'ailleurs plus généralement du *numéro* 151 (*coroll.* 1er), que le centre du cercle circonscrit est intérieur ou extérieur au triangle, ou situé sur l'un des côtés, suivant que ce triangle est acutangle ou obtusangle, ou rectangle.

N° 167. THÉORÈME V. — Fig. 127.

Dans tout triangle ABC, *les droites qui partagent les angles en deux parties égales, concourent en un même point.* Fig. 127.

Considérons deux de ces droites, AO, BO : elles se coupent en un point O situé *dans l'intérieur* du triangle, et également distant des trois côtés (n° 115); donc la droite menée de ce point au sommet C partage l'angle C en deux parties égales : *donc*, etc.

COROLLAIRE 1er. — Le point O étant également distant des trois côtés du triangle, si l'on abaisse de ce point les perpendiculaires OA′, OB′, OC′, respectivement sur les trois côtés BC, AC, AB, ces perpendiculaires seront égales; d'où il résulte

Fig. 127. qu'en décrivant un cercle du point O comme centre et d'un rayon égal à OA' = OB' = OC', sa circonférence touchera les trois côtés respectivement aux points A', B', C' (n° 89), et sera par conséquent inscrite au triangle (n° 74).

Ainsi — *A tout triangle on peut inscrire un cercle*,

Ou bien — *Tout triangle est circonscriptible* au cercle.

Coroll. 2.—Le point O est le *seul* point *intérieur* au triangle ABC, qui soit également distant de ses trois côtés ;

Donc — *Un cercle est complètement déterminé quand on sait qu'il est inscrit à un triangle.*

Scolie. — On peut prouver de la même manière, que chaque droite Fig. 128 qui partage en deux parties égales l'un des angles d'un triangle ABC (fig. 128), passe par le point de concours des droites qui partagent en deux parties égales les supplémens des deux autres angles. D'où il résulte que, du chacun des trois nouveaux points de concours, *a*, *b*, *c*, comme centre, on peut décrire une circonférence qui touche à la fois l'un des côtés du triangle et les prolongemens des deux autres.— Les trois cercles ainsi obtenus sont dits *ex-inscrits* au triangle.

Deux quelconque des quatre centres sont toujours en ligne droite avec un des sommets. De plus, chacune des droites qui lient les centres de deux des cercles ex-inscrits, avec un sommet du triangle, est perpendiculaire à la droite qui lie ce même sommet avec le centre du cercle intérieur.

§ II. — *De l'Égalité des Triangles.*

N° 168. Lemme. Fig. 129.

Fig. 129 *Si deux droites déterminées de longueur* AB, CD, *se coupent en un point* I *situé entre leurs extrémités, et qu'on lie ces extrémités par deux autres droites*, AC, DB, *de manière à former deux triangles*, IAC, IDB, *opposés par un sommet* I, *la somme des deux dernières droites est toujours moindre que celle des deux premières.*

En effet, on a les inégalités

$$AC < AI + IC$$

et

$$DB < DI + IB;$$

ajoutons-les membre à membre, en observant que Fig. 129.

$$AI + IB = AB$$

et $$DI + IC = DC:$$

nous en tirerons cette autre inégalité

$$AC + DB < AB + DC;$$

C. Q. F. D.

N° 169. Théorème VI. Fig. 130.

Deux triangles, ABC, A′B′C′, *sont égaux lorsqu'ils ont les trois côtés égaux chacun à chacun*, $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $BC = B'C'$. Fig. 130.

Appliquons le côté A′B′ sur son égal AB, et le triangle A′B′C′ sur le plan ABC, de manière que les côtés égaux *se correspondent* [c'est-à-dire que le point A′ soit sur le point A, le point B′ sur le point B, et le point C′ du même côté de AB que le point C]. Je dis que, par suite de ce mouvement, les deux triangles coïncideront. Car pour cela, les conditions nécessaires et suffisantes sont, qu'après la superposition des côtés AB, A′B′, les droites AC et A′C′, BC et B′C′, considérées deux à deux, aient la même direction; et c'est aussi ce qui arrivera.

Supposons en effet que cela n'ait pas lieu : dans cette hypothèse, quelque côté de l'un des deux triangles, par exemple le côté A′C′ du triangle A′B′C′, aura pris une direction intérieure à l'autre triangle ABC : [et le même raisonnement peut être fait pour B′C′, pour AC, et pour BC]. Alors le point C′ tombera, ou *dans* le triangle ABC, en D, ou *sur* le côté BC, en E, ou bien enfin *hors* du triangle, en F.

Dans le *premier* cas, on aura (n° 80) :

$$AD + DB < AC + CB,$$

ou, en substituant à la place de AD et de BD leurs valeurs respectives A′C′ et B′C′,

$$A'C' + C'B' < AC + CB;$$

Fig. 130. ce qui est absurde, puisque l'on a, par hypothèse,

$$A'C' = AC \quad \text{et} \quad C'B' = CB.$$

Dans le *deuxième* cas, on aura

$$BE < BC, \quad \text{ou} \quad B'C' < BC;$$

ce qui est également contraire à l'hypothèse.

Enfin, dans le *troisième* cas, on aura de même (n° 168):

$$AC + BF < AF + BC,$$

ou bien $AC + B'C' < A'C' + BC$;

ce qui est absurde, comme ci-dessus.

Donc enfin, le point C′ tombera sur le point C, et par conséquent les deux triangles se confondront. *C. Q. F. D.*

Scolie. — *Un triangle est déterminé par ses trois côtés.*

N° 170. Théorème VII. Fig. 131.

Fig. 131. *Deux triangles sont égaux lorsqu'ils ont deux côtés égaux chacun à chacun*, $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, *ainsi que l'angle compris par ces côtés*, $A = A'$.

Appliquons le côté A′B′ sur son égal AB, et le triangle A′B′C′ sur le plan ABC, de manière que les côtés et les angles égaux se correspondent (n° 169): l'angle A′ étant égal à l'angle A, le côté A′C′ prendra la direction AC; et comme $A'C' = AC$, le point C′ tombera sur le point C: donc les deux triangles coïncideront.

Scolie. — *Un triangle est déterminé par deux côtés et l'angle compris.*

N° 171. Remarque *sur les deux théorèmes précédens.* — Les démonstrations de ces deux théorèmes prouvent en même temps la proposition suivante:

Fig. 130 et 131. *Lorsque deux côtés*, AB, AC (fig. 130 et 131), *d'un triangle* ABC *sont égaux chacun à chacun à deux côtés*, A′B′, A′C′, *d'un autre triangle* A′B′C′ [de manière que l'on ait $AB = A'B'$, $AC = A'C'$], *suivant que l'angle* A *compris par les premiers*

est égal (fig. 131), *ou supérieur* (fig. 130), *à l'angle* A' *compris par les derniers, le troisième côté* BC *du premier triangle est égal ou supérieur au troisième côté* B'C' *du second triangle.* Fig. 130 et 131.

Il suffit en effet, pour démontrer directement cette proposition, d'appliquer au premier cas [A = A'] le raisonnement du *numéro* 170, et dans le second [A > A'], d'imiter le raisonnement du *numéro* 169 — (*).

La *réciproque* de cette proposition est *évidente* d'après le *numéro* 51, et elle comprend visiblement le *théorème* VI, que l'on peut, de cette manière, faire dériver du *théorème* VII.

N° 172. Théorème VIII. Fig. 131.

Deux triangles sont égaux lorsqu'ils ont un côté égal (**), AB = A'B', *adjacent à des angles égaux chacun à chacun,* A = A', B = B'. Fig. 131.

Appliquons le côté A'B' sur son égal AB, et le triangle A'B'C' sur le plan ABC, de manière que les angles égaux se correspondent (n° 169) : l'angle A' étant égal à l'angle A, le côté A'C' prendra la direction AC; et l'angle B' étant égal a l'angle B, le côté B'C' prendra la direction BC. Le point C', se trouvant ainsi à la fois sur AC et sur BC, coïncidera avec le point C, et les deux triangles se confondront.

Scolie 1er. — *Un triangle est déterminé par un côté et les angles adjacens.*

Scol. 2. — On peut dire encore, que

Deux triangles sont égaux lorsqu'ils ont un côté égal, ainsi que l'angle opposé et l'un des angles adjacens :

Car, dans cette hypothèse, les angles adjacens sont nécessairement égaux chacun à chacun (n° 163).

(*) Nous engageons les élèves à reprendre en particulier la démonstration des propositions du *numéro* 171, qui sont fort importantes par elles-mêmes.

(**) Cette locution, quoique inexacte, est employée à cause de sa brièveté. Les énoncés de la plupart des théorèmes de ce paragraphe donneraient lieu à des remarques analogues.

N° 173. Théorème IX. Fig. 132.

Fig. 132. *Deux triangles sont égaux lorsqu'ils ont deux côtés égaux chacun à chacun*, AB=A'B', BC=B'C', *ainsi que l'angle opposé à l'un des deux*, A=A', *pourvu que l'angle*, C, C', *opposé au second côté, soit de même espèce* dans les deux triangles, c'est-à-dire aigu, ou droit, ou obtus à la fois.

Appliquons le côté A'B' sur son égal AB, et le triangle A'B'C' sur le plan ABC, de manière que les côtés et les angles égaux se correspondent (n° 169) : l'angle A' étant égal à l'angle A, le côté A'C' prendra la direction AC.

Quant au côté B'C', il faut distinguer *deux cas :* ou ce côté est perpendiculaire à A'C', ou il lui est oblique.

1° Si B'C' est perpendiculaire à A'C', BC est aussi perpendiculaire à AC, d'après l'hypothèse. Or, comme on ne peut abaisser, d'un même point B, deux perpendiculaires à une même droite AC, il s'ensuit que le point C' tombera sur le point C : donc les deux triangles coïncideront.

2° Si au contraire B'C' est oblique sur A'C', alors BC est aussi oblique sur AC. Dans ce cas, soit BD la perpendiculaire à AC menée par le point B : la droite B'C' sera susceptible de prendre deux positions, BC, Bc, également distantes de la perpendiculaire BD. Mais des deux angles ACB, AcB, l'un est nécessairement aigu et l'autre obtus (n° 117) ; donc si les angles C, C', sont de même espèce, le point C' tombera sur le point C : et ainsi les deux triangles se confondront encore.

N. B. — Il faut remarquer cependant, que la droite B'C' ne sera pas toujours susceptible de prendre deux positions opposées à l'angle A comme nous venons de le supposer. Elle n'en aurait qu'une si A et A' étaient obtus ou droits ; et elle n'en aurait qu'une encore si, ces angles étant aigus, on avait

$$AB\ [=A'B'] < BC\ [=B'C']$$ (*Voyez* le n° 84).

Scolie 1er. — *Un triangle est déterminé par deux côtés et l'angle opposé à l'un des deux, pourvu* toutefois *que l'on connaisse l'espèce de l'angle opposé au second côté.*

Scol. 2. — Comme l'équivoque à laquelle est soumis le théorème précédent, a lieu seulement lorsque l'angle donné est opposé au plus petit des deux côtés donnés, on peut affirmer que

Deux triangles sont égaux lorsqu'ils ont deux côtés égaux chacun à chacun, ainsi que l'angle opposé au plus grand de ces deux côtés ;

D'où il résulte que

Un triangle est complètement déterminé par deux côtés et l'angle opposé au plus grand des deux.

N° 174. Remarque *sur les quatre théorèmes précédens.* — Bien que, dans la composition d'un triangle quelconque, il entre toujours *six choses* principales ou *six élémens*, savoir *trois côtés* et *trois angles*, cependant, pour être assuré qu'il y a égalité entre deux triangles, il n'est pas nécessaire que l'on sache *à priori* que les *six* élémens de l'un sont égaux aux *six* élémens de l'autre, chacun à chacun : *trois* de ces égalités partielles suffisent en général pour entraîner l'égalité totale des deux triangles ; mais il faut pour cela que quelques autres conditions soient remplies.

La première condition est, qu'au nombre des trois données communes, *il se trouve au moins un côté*. Il est facile de voir que *les trois angles ne suffisent pas* : car si, dans un triangle quelconque ABC (fig. 133), on mène à l'un des côtés BC une parallèle B'C', le triangle AB'C' qui en résultera, sera équiangle avec le premier à cause de l'égalité des angles correspondans, B et B', C et C'. Fig. 133.

En second lieu, il est nécessaire que *les angles égaux* soient à la fois *opposés* ou *adjacens aux côtés égaux*.

Nous avons vu d'ailleurs (n° 173) que, si les élémens communs aux deux triangles sont deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux, l'angle opposé à l'autre côté doit être de même espèce dans les deux triangles, mais qu'au surplus, cette restriction n'est pas toujours nécessaire.

N° 175. Remarque *sur les triangles symétriques.* — On sait qu'il y a, pour les figures planes, *deux* sortes d'égalité, ou *deux* modes de superposition (n° 43), lesquels n'ont point été distingués dans les théorèmes précédens. Les trois élémens communs aux deux triangles peuvent donc, dans les diverses hypothèses que nous avons faites (n°s 169, 170, 172, et 173), être disposés, pour chacun d'eux, de la même manière ou d'une manière absolument inverse; et suivant que l'un ou l'autre des *deux* cas aura lieu, la superposition des deux triangles se fera *directement* ou *inversement* (n° 45).

De plus, comme il n'y a évidemment que *deux manières* de disposer entre eux les trois côtés d'un triangle, puisque chacun

de ces trois côtés est toujours consécutif de chacun des deux autres, il s'ensuit, d'abord que

Deux triangles symétriques entre eux (n° 43) *ont* nécessairement *leurs côtés égaux chacun à chacun mais inversement disposés*;

Et ensuite que

Deux triangles respectivement symétriques d'un troisième sont toujours nécessairement égaux entre eux et *directement superposables.*

N° 176. REMARQUE *sur le triangle isocèle.* — On a vu dans le *numéro* 164 que le triangle isocèle est une figure symétrique par rapport à la droite (n° 86) qui joint son sommet au milieu de sa base. Il en résulte que deux triangles isocèles égaux sont susceptibles à la fois des deux modes de superposition [directe et inverse]; et l'on conçoit que, par suite, les propositions relatives au triangle isocèle peuvent être déduites, comme corollaires, des théorèmes relatifs à l'égalité des triangles en général.

C'est ainsi que du *théorème* VI (n° 169), ou du *théorème* VII (n° 170), on peut conclure directement cette proposition (n° 164), que

Fig. 134. *Dans tout triangle isocèle* ABC (fig. 134), *les angles*, B, C, *opposés aux côtés égaux*, AC, AB, *sont égaux.*

En effet, si l'on retourne le triangle ABC de manière qu'il prenne la position A'C'B' inverse de la première, les deux triangles ABC, A'C'B', pourront être considérés, soit comme ayant les trois côtés égaux chacun à chacun, savoir :

$$BC = C'B', \quad AB = A'C', \quad \text{et} \quad AC = A'B';$$

soit comme ayant deux côtés égaux chacun à chacun : $AB = A'C'$, $AC = A'B'$, comprenant le même angle $A = A'$; donc ils seront égaux de telle manière que l'on aura

$$C' = B, \quad B' = C, \quad \text{ou simplement}, \quad B = C.$$

Pareillement, du *théorème* VIII (n° 172) on peut conclure que,

Si deux angles, B, C, *d'un triangle* ABC, *sont égaux, les côtés* AC, AB, *opposés à ces angles, sont égaux;* — et que par conséquent — *le triangle est isocèle.* Fig. 134.

En effet, les deux triangles ABC, A'C'B', ont un côté égal, BC = C'B', adjacent à des angles égaux chacun à chacun, B = C', C = B', d'où résulte

AB = A'C' et AC = A'B', ou simplement, AB = AC.

N° 177. Remarque *sur le triangle rectangle.* — Puisque, dans un pareil triangle, un angle aigu détermine toujours le second, on peut conclure, comme cas particulier du *théorème* VIII (n° 172) [en supposant droits les angles C et C' de la *figure* 131], que Fig. 131.

Deux triangles rectangles sont égaux lorsqu'ils ont chacun à chacun l'hypoténuse égale et un angle aigu égal [outre l'angle droit].

Il est d'ailleurs facile de voir *à priori* que si, en faisant coïncider les hypoténuses ainsi que les angles aigus que l'on suppose égaux [A et A' par exemple], les angles droits ne coïncidaient pas, on pourrait abaisser, d'un même point B, deux perpendiculaires sur une même droite AC; — *Ce qui est absurde.*

De même, en supposant droits les angles A et A' dans le *théorème* IX (n° 173) et dans la *figure* 132, on peut conclure de ce théorème, que Fig. 132.

Deux triangles rectangles sont égaux lorsqu'ils ont, chacun à chacun, l'hypoténuse égale et un second côté égal.

C'est d'ailleurs ce que l'on peut voir d'une autre manière en observant que si, après avoir superposé les côtés égaux AB et A'B', ainsi que les angles droits A et A', les hypoténuses ne coïncidaient pas, on pourrait, d'un même point B, mener à la droite AC, et d'un même côté de la perpendiculaire, deux obliques égales.

Nous engageons les élèves, en raison de l'importance de ces divers cas particuliers, à en reprendre directement la démonstration.

§ III. — *Conséquences de la Théorie des Triangles, relatives au Cercle.*

N° 178. Théorème X. Fig. 135 et 136.

Fig. 135 et 136. *La plus grande et la plus petite droite que l'on puisse mener à une circonférence* OA, *d'un point* I [différent du centre] *intérieur* (fig. 135) *ou extérieur* (fig. 136), *sont les distances*, IA, IB, *de ce point aux extrémités du diamètre* AB *qui y passe.*

Soit IC (fig. 135 et 136) une droite quelconque qui ne passe pas par le centre, et menons le rayon OC. — Cela posé :

1° Si le point I est intérieur au cercle (fig. 135), nous aurons

$$IC < OC + OI, \text{ ou } IC < OA + OI, \text{ ou } IC < IA;$$
$$IC > OC - OI, \text{ ou } IC > OB - OI, \text{ ou } IC > IB:$$

Ainsi les distances *maximum* et *minimum* du point I à la circonférence, sont *les deux portions du diamètre* AB mené par ce point;

2° Si le point I est extérieur au cercle (fig. 136), nous aurons

$$IC < OI + OC, \text{ ou } IC < OI + OA, \text{ ou } IC < IA;$$
$$IC > OI - OC, \text{ ou } IC > OI - OB, \text{ ou } IC > IB:$$

Ainsi les distances *maximum* et *minimum* du point I à la circonférence, sont encore *les distances comptées sur le diamètre* qui passe par ce point.

C. Q. F. D.

N° 179. Théorème XI. Fig. 135 et 136.

Si, par un point I intérieur ou extérieur à une circonférence [mais différent du centre], on mène le diamètre AB et différentes droites, IC, IC', ID...., terminées d'une part au point I et d'autre part à la circonférence :

1° *Deux droites*, IC, IC'; *dont les extrémités*, C, C', *sont à des distances égales de chaque extrémité*, A ou B, *du diamètre, sont égales;*

2° *Deux droites*, IC, ID, *dont les extrémités*, C, D, *sont à des distances inégales de chaque extrémité du diamètre, sont inégales.*

1° Plions la figure le long du diamètre AB.: les points C et C' se confondront puisque AC = AC': donc IC = IC'.

2° Supposons BC > BD; et menons les rayons OC, OD : nous aurons deux triangles IOC, IOD, qui, outre le côté commun IO, donneront

OC = OD, et *angle* IOC > *angle* IOD (n° 90, *récipr.* 2);

d'où résulte (n° 171) IC > ID.

Scolie. — Il faut remarquer, conformément au résultat précédent, que la plus longue de deux droites quelconques est celle dont l'extrémité est la plus rapprochée du point A auquel aboutit la distance *maximum*, tandis que la plus courte des deux est celle dont l'extrémité est la plus rapprochée du point B auquel correspond la distance *minimum*. Fig. 135 et 136.

De plus, chacune des droites IC, ID, coupe la circonférence en un second point, *c*, *d*; et il est facile de voir qu'à la plus longue des deux distances IC, ID, correspond la plus petite des distances opposées I*c* ou I*d*. — Si le point I est intérieur au cercle, la même droite donnera deux distances égales lorsqu'elle sera perpendiculaire au diamètre; et si le point I est extérieur, les deux distances seront égales lorsque la droite, de sécante qu'elle était, deviendra tangente (n° 21). — D'où il suit encore, que

Deux tangentes issues d'un même point, sont égales (voyez le n° 152, *scol.*).

Les *réciproques* du théorème précédent sont évidentes (n° 51).

N° 180. Théorème XII. Fig. 137.

La plus courte distance d'une circonférence OA *à une droite extérieure* GI *est* la portion AP de *la perpendiculaire abaissée du centre sur la droite*, comprise entre les deux lignes proposées. Fig. 137.

En effet, [comme il ne s'agit évidemment que de comparer des distances rectilignes (n° 5)], soit CD la droite menée d'un point quelconque C de la circonférence OA à un point quelconque D de la droite GI. Je dis que la distance CD ne sera pas la plus courte entre les deux lignes proposées si elle ne satisfait aux deux conditions suivantes:

1° Sa direction doit passer par le centre O; sans quoi, menons la droite DMO, coupant la circonférence au point M: et nous aurons DM < DC (n° 178);

2° Elle doit être perpendiculaire à GI; sans quoi, abaissons sur GI la perpendiculaire CQ: et nous aurons CQ < CD (n° 83).

Donc, si l'on suppose abaissée la perpendiculaire OP du centre O sur la droite GI, que l'on nomme P le pied de cette perpendiculaire, et A, B, ses points d'intersection avec la circonférence, la plus petite AP, des distances AP, BP, sera évidemment la distance *minimum* des deux lignes proposées.

Scolie. — Quant à la distance BP, elle est le *maximum* des distances rectilignes perpendiculaires des divers points de la circonférence OA à la droite GI.

N° 181. THÉORÈME XIII. Fig. 54 et 58.

Fig. 54 et 58. *Lorsque deux circonférences n'ont aucun point commun, la plus grande et la plus petite droite que l'on puisse mener d'un point de l'une à un point de l'autre, sont toujours, chacune, une portion de la ligne des centres.*

Fig. 58. Soient, par exemple, les deux circonférences OA, O'A' (fig. 58), dont la seconde est intérieure à la première. Supposons que A et B, A' et B', soient les points d'intersection respectifs de la ligne des centres avec chacune des deux circonférences, de telle sorte que les points O', A', A, soient situés du même côté de O, et par suite les points O, B', B, du même côté de O'. Dans cette hypothèse, je dis que AA' est le *minimum* de toutes les droites que l'on peut mener entre les deux circonférences, et que BA' est, au contraire, le *maximum* des droites que l'on peut mener d'un point de l'une à un point de l'autre.

Pour le prouver, faisons voir d'abord qu'une droite CC', terminée de part et d'autre aux deux circonférences, en deux points, C, C', qui ne sont pas sur la ligne des centres, ne saurait être ni la plus grande, ni la plus petite des droites que l'un peut mener de l'une des courbes à l'autre.

En effet, en menant, par le point C et par le centre O', la droite CMO'N qui coupe la circonférence O'A' aux deux points M et N, nous aurons (n° 178) :

$$CM < CC' \quad \text{et} \quad CN > CC';$$

d'où il résulte que CC' n'est ni un *maximum*, ni un *minimum*.

Or, il est clair que l'on aura toujours à faire un raisonnement pareil tant que les deux points C et C' ne seront pas sur la ligne des centres; et le même mode de démonstration est également applicable, soit à deux circonférences intérieures (fig. 58), soit à deux circonférences extérieures l'une à l'autre (fig. 54).

Fig. 54 et 58. *Scolie.* — Il ne s'agit plus que de comparer les quatre droites AA', AB', BA', et BB'; or, on reconnaît sans difficulté que, dans la *figure* 58, AA' est la plus petite des quatre, et BA' la plus grande; et que dans la *figure* 54, c'est AA', portion de la ligne des centres, comprise entre les circonférences, qui est le *minimum*, et BB' le *maximum*, de leurs distances rectilignes.

Fig. 59. Dans le cas particulier où les deux circonférences sont concentriques (fig. 59), le *maximum* de leurs distances rectilignes est la somme de leurs rayons, et le *minimum* en est la différence. — Cette plus courte distance des deux circonférences est la *largeur* de la *couronne circulaire* (n° 93) qu'elles comprennent entre elles; elle peut être comptée dans la direction d'un rayon quelconque, aussi bien que la distance *maximum*.

Dans tous les cas, la plus petite de toutes les droites que l'on peut mener entre les deux circonférences, est nécessairement un *minimum absolu*, c'est-à-dire que cette plus courte droite est aussi la plus courte de toutes les lignes quelconques que l'on peut mener entre ces deux courbes.

§ V. — *Problèmes.*

N° 182. PROBLÈME I. Fig. 124.

Étant donnés deux angles d'un triangle, déterminer le troisième. Fig. 124.

1re *Construction.* — Par deux points quelconques, A,B, d'une droite AB, menons deux autres droites, AC, BC, qui fassent deux angles CAB, CBA, respectivement égaux aux deux angles donnés (n° 129). La somme de ces angles devant nécessairement être moindre que 2 *droits* (n° 163), les droites AC, BC, se rencontreront (n° 139) en un point C, en faisant un angle ACB égal au troisième angle du triangle (n° 163, *coroll.* 3).

2e *Constr.* — Par un point B pris sur une droite quelconque ABD, menons deux droites BC, BE, qui fassent avec les segmens de droite BA, BD, des angles ABC, DBE, respectivement égaux aux deux angles donnés (n° 129). L'angle CBE, supplément de la somme des deux angles donnés (n° 112, *coroll.* 1er), sera l'angle cherché.

N° 183. PROBLÈME II. Fig. 138.

Étant donnés les trois côtés d'un triangle, construire le triangle. Fig. 138.

Construction. — 1° Prenons, sur une droite indéfinie, une longueur AB égale à l'un des côtés donnés. — 2° Du point A comme centre, et d'un rayon AC égal au second côté donné, décrivons un arc de cercle. — 3° Du point B comme centre, et d'un rayon égal au troisième côté donné, décrivons un autre arc de cercle qui coupera le premier en C [si le triangle est possible]. — 4° Menons les droites AC, BC.

Le triangle ABC sera le triangle demandé (*voyez* le n° 169).

Scolie. — Pour que le triangle soit possible, il faut que les deux arcs de cercle décrits des points A et B comme

Fig. 138. centres, se coupent; et pour cela, il faut que le côté AB soit plus petit que la somme des deux autres, et plus grand que leur différence (n° 99). Or, si ces conditions sont remplies, comme les arcs se couperont en deux points C, C′, il y aura deux triangles ABC, ABC′, symétriques par rapport à AB, qui satisferont à la question. — Mais nous reviendrons plus loin (n° 187) sur cette remarque, et nous la généraliserons.

N° 184. Problème III. Fig. 138.

Étant donnés deux côtés d'un triangle et l'angle compris, contruire le triangle.

Construction. — 1° Prenons une droite AB égale à l'un des côtés donnés. — 2° Faisons sur cette droite un angle BAC égal à l'angle donné (n° 129); et prenons sur la droite AC une grandeur AC égale au second côté donné. — 3° Menons BC.

Le triangle ABC sera le triangle demandé (*voyez* le n° 170).

Scolie. — Le triangle est toujours possible.

N° 185. Problème IV. Fig. 138.

Étant donnés un côté et deux angles d'un triangle, construire le triangle.

Les angles donnés peuvent être, ou les deux angles adjacens au côté donné, ou bien, l'un adjacent et l'autre opposé à ce côté. Mais comme, d'après le *numéro* 182, les trois angles sont connus dès que deux d'entre eux sont donnés (n° 163), on peut supposer que les deux angles donnés sont les angles adjacens au côté donné : nous opérerons dans cette hypothèse.

Contruction. — 1° Prenons une droite AB égale au côté donné. — 2° Par les points A et B menons des droites qui fassent avec AB deux angles respectivement égaux aux angles donnés (n° 129); et soit C leur point d'intersection.

Le triangle CAB sera le triangle demandé (*voyez* le n° 173).

Scolie 1er. — Le problème sera toujours possible quand les deux angles donnés feront une somme moindre que 2 *droits*.

Scol. 2. — Si les deux angles qui doivent être adjacens au côté donné formaient une somme égale à *un droit*, le triangle demandé serait un triangle rectangle ayant pour hypoténuse le côté donné; et alors le problème pourrait être présenté ainsi :

Étant donnés l'hypoténuse d'un triangle rectangle et l'un de ses angles aigus, construire le triangle.

Construction. — 1° Prenons une droite AB (fig. 139) égale au côté donné. — 2° Par le point A [ou B] menons une droite AK qui fasse avec AB un angle égal à l'angle donné. — 3° Du point B abaissons sur AK la perpendiculaire BD (n° 100). — Etc. Fig. 139.

N° 186. Problème V. Fig. 139.

Étant donnés deux côtés d'un triangle et l'angle opposé à l'un d'eux, construire le triangle.

Construction. — 1° Prenons une droite AB égale à celui des deux côtés donnés qui doit être adjacent à l'angle donné A. — 2° Par le point A menons une droite indéfinie AK faisant avec AB un angle égal à l'angle donné (n° 129). — 3° Du point B comme centre, et d'un rayon égal à l'autre côté donné [celui qui doit être opposé à l'angle donné], décrivons une circonférence qui coupera généralement [si le triangle est possible] la droite AK en deux points C et *c*. — 4° Menons BC, B*c*.

Les deux triangles ABC, AB*c*, satisferont également à la question si les points C et *c* sont situés sur AK même et non sur son prolongement (*voyez* le n° 173).

Discussion. — 1er *Cas*. — Supposons que l'*angle* A soit *aigu*. — Le triangle serait *impossible* si le côté donné BC était moindre que la perpendiculaire BD abaissée du point B sur AK : car alors l'arc de cercle décrit du point B comme centre, ne

Fig. 139. rencontrerait pas AK. — Si BC est égal à cette perpendiculaire, les points C, c, se confondront avec le point D : par conséquent l'arc de cercle touchera AK en D; et il n'y aura qu'*une* solution. Le triangle sera rectangle en C [ou D]. — Enfin, si BC est plus grand que la perpendiculaire, il y aura deux points d'intersection; mais les deux triangles qui en résulteront ne satisferont à la question que si les points C et c sont du même côté de A, c'est-à-dire si AB > BC.

2° *Cas.* — Supposons que l'*angle* A soit *droit.* — Le problème peut alors s'énoncer ainsi :

Étant donnés l'hypoténuse d'un triangle rectangle et un second côté, construire le triangle.

Ce triangle ne sera possible que si AB < BC; et cette condition supposée remplie, il y aura *deux* points d'intersection qui donneront pour résultat, deux triangles rectangles symétriques entre eux.

3° *Cas.* — Supposons l'*angle* A *obtus.* — Dans ce cas, il n'y aura encore de solution que si AB < BC; et la solution sera *unique.*

N° 187. Remarque *sur les quatre problèmes précédens.* — Dans les quatre problèmes qui précèdent, c'est toujours sur un premier côté AB que s'effectue la construction du triangle. Or, il y a *quatre* manières de disposer les *données* du triangle par Fig. 140. rapport à la droite AB, comme le montre la *figure* 140; d'où il résulte que, si l'on veut avoir égard à la disposition de ces données, le nombre des solutions de la question sera *généralement* de *quatre*, et pourra même aller jusqu'à *huit* dans le *problème* v (n° 186). Mais d'abord, le nombre des solutions essentiellement différentes se trouvera réduit *de moitié* si l'on considère que la droite AB partage la figure en deux parties égales ou symétriques (n° 43); et ensuite, les solutions restantes seront encore symétriques deux à deux par rapport à une seconde droite menée perpendiculairement par le milieu de AB. Enfin, il pourra même n'y avoir en tout

qu'*une seule* solution, ce qui arrivera si le triangle à construire doit être un triangle isocèle ayant pour sommet le point C. Fig. 140.

[*Voyez* la *remarque* du n° 174.]

Si l'on se proposait de—*Construire un triangle, étant donnés ses trois angles* seulement, — le problème serait *indéterminé* (n° 174). On pourrait alors prendre un côté tout-à-fait arbitrairement, et construire le triangle sur ce côté, comme dans le *numéro* 185. Au moyen de ce triangle, on obtiendrait ensuite facilement tous ceux qui satisfont aux mêmes conditions : il suffirait pour cela de mener des parallèles à l'un des côtés.

Quand on sait d'avance que le triangle doit être isocèle ou rectangle, cette connaissance équivaut à une donnée ; et il n'en faut plus que deux autres pour déterminer le triangle.

Ainsi, un *triangle isocèle* peut être construit lorsque l'on connaît :

1° *Deux côtés inégaux avec l'espèce de chacun* [base ou côté latéral] ;

2° *Un côté et un angle avec l'espèce de chacun* [angle au sommet ou à la base, etc.].

De même, un *triangle rectangle* peut être construit lorsque l'on connaît :

1° *Les deux côtés de l'angle droit* (n° 184) ;
2° *Un côté de l'angle droit et un angle aigu* (n° 185) ;
3° *L'hypoténuse et un angle aigu* (n° 185) ;
4° *L'hypoténuse et un côté de l'angle droit* (n° 186).
[*Voyez* les *numéros* 174 — 177.]

Il est facile de voir que le troisième et le quatrième cas des triangles rectangles peuvent se résoudre au moyen du cercle, en décrivant une demi-circonférence sur l'hypoténuse donnée comme diamètre (n° 102, 1°), et menant par l'une des extrémités de ce diamètre, une corde qui satisfasse à la seconde condition exigée.

N° 188. PROBLÈME VI.

Circonscrire une circonférence à un triangle donné.

Ce problème n'est autre que celui dont nous avons indiqué la construction au *numéro* 102 (3°). — Et d'après les *numéros* 93 et 166, quelles que soient celles des trois perpendiculaires que l'on emploie dans la construction, la circonférence obtenue sera la même.

On peut énoncer le problème plus généralement, en proposant de faire passer une circonférence par trois points donnés; alors le problème devient impossible quand les trois points sont en ligne droite (*voyez* les n°s 87; 82, 2°; *et* 102, 3°); et ce cas d'impossibilité est d'ailleurs le seul (n° 143, *scol.*).

N° 189. PROBLÈME VII.

Inscrire une circonférence à un triangle donné.

Le centre du cercle cherché se trouve à l'intersection des droites qui partagent les angles du triangle en deux parties égales; et le rayon est la distance de ce point aux trois côtés (*voyez* les n° 167, *coroll.* 1er et 2°).

Au lieu de la dernière question, on peut proposer, plus généralement, de

Décrire une circonférence qui touche trois droites données :

Et alors il y a *quatre* solutions quand les trois droites données forment un triangle, et qu'on les suppose indéfiniment prolongées : car, outre le cercle inscrit *intérieurement* au triangle, on doit obtenir encore les *trois* cercles *ex-inscrits* (n° 167, *scol.*). — Le nombre des solutions se réduit à *deux* lorsque, des trois droites proposées, deux sont parallèles (*voyez* le n° 131, *scolie*, 2°; et 148, *récipr.*). — Enfin, le problème serait évidemment *impossible* si les droites étaient toutes trois parallèles entre elles.

N° 190. Problème VIII. Fig. 141.

Par l'extrémité A *d'un segment de droite* AB *qui ne peut être prolongé, élever une perpendiculaire à cette droite.* Fig. 141.

Analyse. — Soit AC la perpendiculaire cherchée. — En liant, par une droite, un point quelconque B de AB avec un point quelconque C de AC, on formera un triangle rectangle CAB dans lequel le milieu D de l'hypoténuse sera également distant des trois sommets A, B, C (n° 165); et par conséquent la circonférence décrite du point D comme centre avec le rayon DA, passera par ces trois sommets.

2° *Construction* (voyez la 1re au n° 129, *scol.* 2). — 1° D'un point quelconque D pris hors de la droite AB, comme centre, et du rayon DA, décrivons un arc de cercle qui coupe la droite AB en un second point B. — 2° Menons la droite BD qui coupe cet arc en un second point C. — 3° Menons la droite AC.

Cette droite est la perpendiculaire cherchée.

En effet, etc.... (*Voyez* le n° 165, *récipr.*).

Scolie. — En renversant cette construction, on en tire encore un autre moyen de résoudre le *problème* du *numéro* 100. — Ainsi, pour abaisser du point C une perpendiculaire sur AB, on pourra prendre d'abord une longueur arbitraire [qui toutefois doit être, *à vue d'œil,* plus grande que la moitié de la perpendiculaire cherchée]; puis, après avoir doublé cette longueur, on marquera, au moyen du compas, sur la droite AB, un point B dont la distance au point C soit égale à la double longueur obtenue. On aura facilement le milieu D de cette droite, puisque sa moitié n'est autre que la droite arbitraire. Alors, du point D comme centre, et du rayon DC [= DB], on décrira une demi-circonférence qui coupera la droite donnée en un second point A : ce point sera le pied de la perpendiculaire cherchée.

Ce moyen de résolution serait surtout avantageux si la droite donnée ne pouvait être prolongée commodément que dans un seul sens, parce qu'alors Fig. 62. les points A et B de la *figure* 62 (*probl.* du n° 100, 1re *constr.*), ne pouvant être pris assez distans l'un de l'autre, ne se distingueraient pas suffisamment.

Bien plus, s'il arrivait que ces deux points se confondissent en un seul dans la construction, c'est-à-dire si l'arc AFB (fig. 62) touchait la droite MN, le point de tangence serait bien, à la vérité, le pied cherché de la perpendiculaire; mais il faut observer que, d'après la définition de la tangente au cercle (n° 21), le point de tangence, ou le point commun à la courbe et à sa tangente, doit être, en réalité, considéré comme une petite corde dont la longueur, appréciable aux sens, est fort supérieure à la largeur que conservent encore les lignes dans nos constructions grossières; d'où il résulte qu'*Un point est toujours mal déterminé quand il ne l'est que par un contact*; et par conséquent, *On doit éviter avec soin ce mode de détermination.*

Le même inconvénient se reproduit dans l'intersection de deux lignes sous un petit angle : cette intersection, au lieu d'être un point nettement déterminé, est une petite droite dont la longueur surpasse très sensiblement la largeur, laquelle est toujours supposée négligeable.

Mais il n'en est plus de même quand un point est déterminé, soit par l'intersection d'une droite avec une circonférence qui a son centre *sur* cette droite ou tout *près* d'elle, soit par les intersections de deux droites perpendiculaires entre elles ou très peu inclinées l'une sur l'autre. Alors, la *trace* obtenue n'a d'autre étendue visible, que la pointe du compas ou la largeur ordinaire des lignes : largeur que l'on convient de négliger, ainsi que nous l'avons déjà dit.

CHAPITRE V.

DU QUADRILATÈRE.

§ Ier — *Du Quadrilatère en général.*

N° 191. Nous savons déjà (n° 74) que l'on nomme QUADRILATÈRE [ou *quadrangle*], le *polygone de quatre côtés*, c'est-à-dire le *système de quatre droites* indéfinies qui se coupent deux à deux, ABE, ADF, BCF, ECD (fig. 142), ou bien la *portion de plan circonscrite par quatre droites* limitées. Fig. 142.

Dans ce dernier sens le *quadrilatère* est dit *simple*, et il y en a de *trois* espèces (fig. 143): le quadrilatère *convexe*, ABCD, qui a tous ses angles saillans, le quadrilatère *concave*, AECF, ayant un angle rentrant C, et le quadrilatère *biconcave*, BECDF, formé de deux triangles opposés, BEC, CDF. Fig. 143.

Ces trois espèces de quadrilatères se trouvent comprises dans le quadrilatère considéré sous le premier point de vue [à moins cependant qu'au nombre des quatre côtés il ne se trouve des parallèles] : c'est pourquoi, par opposition, on nomme le système des *quatre* droites, un *quadrilatère complet.*

Chaque quadrilatère simple a *deux* diagonales (n° 74).

Ces diagonales sont AC, BD, pour le quadrilatère ABCD (Fig. 142 et 143); elles sont toutes deux intérieures. — Le quadrilatère AECF a une diagonale intérieure AC, et une extérieure EF. — Enfin les deux diagonales, BD, EF, du quadrilatère BECDF, sont extérieures. — Les diagonales intérieures d'un quadrilatère simple le décomposent toujours en deux triangles; de plus, elles peuvent en être des axes de symétrie. Fig. 142 et 143.

Un quadrilatère complet a *trois* diagonales, lesquelles, prises deux à deux, ne sont autres que celles des quadrilatères simples dont il présente la réunion.

N° 192. Le quadrilatère simple convexe est celui dont on a le plus souvent occasion de s'occuper, et dont on est toujours

censé parler, à moins d'indication contraire. Dans cette espèce de quadrilatère, on nomme *côtés opposés*, deux côtés qui n'ont aucune extrémité commune : tels sont, dans le quadrilatère
Fig. 143. ABCD (fig. 143), d'une part AB, DC, et d'autre part AD, BC. On nomme de même, *angles opposés*, les angles A, C, ou B, D, qui n'ont aucun côté commun.

Lorsqu'un quadrilatère convexe est isolé sur un plan, il suffit, pour le distinguer, d'employer les lettres placées aux sommets de deux angles opposés, comme AC, ou BD; mais en général on énonce toutes les lettres.

Il y a plusieurs variétés remarquables de quadrilatères convexes; nous les examinerons particulièrement après avoir démontré un théorème sur les quadrilatères convexes en général.

On pourrait établir, sur l'égalité et la détermination des quadrilatères, plusieurs théorèmes analogues à ceux que nous avons établis pour les triangles (nos 169, 170, 172, 173); mais nous ne nous y arrêterons pas, devant donner plus loin, pour les polygones d'un nombre quelconque de côtés, des théorèmes dont les premiers ne sont que des cas particuliers. Observons seulement que le nombre des côtés donnés doit être au moins égal à *deux ;* car si l'on prend un quadrilatère, et que l'on fasse mouvoir un de ses côtés parallèlement à lui-même, sans changer la position ni la grandeur du côté opposé et des angles adjacens à celui-ci, on obtiendra une série de quadrilatères qui seront tous différens, bien qu'ayant un côté commun et tous leurs angles égaux et disposés de la même manière chacun à chacun.

N° 193. THÉORÈME I. Fig. 143.

La somme des angles d'un quadrilatère convexe ABCD, *est égale à* 4 DROITS.

Cette proposition résulte évidemment de ce que la somme des angles du quadrilatère n'est autre chose que la somme des

angles des triangles dans lesquels chaque diagonale, AC ou BD, le décompose (nos 191 et 163). Fig. 143.

Scolie. — La proposition est également vraie pour le quadrilatère concave AECF, si l'on considère la somme des angles ACE, ACF, comme formant l'angle C du quadrilatère (n° 120).

Quant au quadrilatère biconcave, puisqu'il est composé de deux triangles opposés, on pourrait encore, à la rigueur, et sous ce point de vue, regarder la proposition comme vraie à son égard.

Corollaire. — Lorsque deux angles d'un quadrilatère sont droits, les deux autres sont supplémentaires. Si de plus les angles droits sont opposés, il est facile de déduire du théorème démontré au *numéro* 165, que le quadrilatère est inscriptible dans un cercle qui aurait pour diamètre la diagonale opposée aux deux angles droits; mais cette proposition n'est qu'un cas particulier d'une autre plus générale que nous démontrerons plus loin (n° 208).

§ II. — *Du Parallélogramme.*

N° 194. On nomme PARALLÉLOGRAMME (*), un *quadrilatère*, MNOP (fig. 144), *dont les côtés opposés sont parallèles deux à deux.* — Deux côtés opposés quelconques du parallélogramme, par exemple MN, OP, se nomment les *bases*, et leur perpendiculaire commune AB est la *hauteur.* Fig. 144.

Un parallélogramme est déterminé par deux côtés adjacens et l'angle compris ; d'où il résulte que

Deux parallélogrammes sont égaux lorsqu'ils ont un angle égal compris entre des côtés égaux chacun à chacun.

N° 195. THÉORÈME II. Fig. 144.

Dans tout parallélogramme MNOP, *les angles opposés sont égaux deux à deux ; — et réciproquement.*

Des propriétés des parallèles coupées par une transversale

(*) De παράλληλοι, *parallèles* (voyez *page* 100) ; et γραμμαί, *lignes.*

Fig. 144. (n° 140) il résulte que, dans tout parallélogramme, deux angles adjacens à un même côté sont supplémentaires : ainsi par exemple

$$M + N = 2 \text{ droits}, \quad \text{et} \quad N + P = 2 \text{ droits};$$

d'où il résulte que

$$M = P, \quad \text{et par suite} \quad N = O.$$

Réciproquement : — Si les angles opposés d'un quadrilatère convexe sont égaux deux à deux, la figure est un parallélogramme.

En effet, la somme des quatre angles valant 4 *droits* (n° 193), il s'ensuit que les angles adjacens à un même côté sont supplémentaires : donc les côtés opposés sont parallèles deux à deux (n° 139).

Scolie. — *Dans tout parallélogramme, les angles adjacens à un même côté sont supplémentaires.*

D'où il résulte qu'à moins d'avoir tous ses angles droits, le parallélogramme a toujours un couple d'angles aigus opposés et un couple d'angles obtus également opposés.

N° 196. Théorème III. Fig. 144.

Dans tout parallélogramme MNOP, *les côtés opposés sont égaux deux à deux.*

En effet, menons la diagonale ON : nous formerons ainsi deux triangles MNO, PON, ayant un côté commun ON; de plus, l'angle MNO = NOP, et l'angle MON = ONP (n° 140); donc les deux triangles sont égaux (n° 172) : donc MN = OP; et de même MO = NP.

Scolie 1er. — Ce théorème s'énonce encore de la manière suivante :

Les portions de parallèles comprises entre parallèles sont égales ;

Le théorème que — *Deux parallèles sont partout également distantes* (n° 141) — en est un cas particulier.

SCOL. 2. — *Chaque diagonale d'un parallélogramme le partage en deux triangles égaux.* Fig. 144.

N° 197. THÉORÈME IV. Fig. 144.

Si les côtés opposés d'un quadrilatère, MNOP, *sont égaux deux à deux, ce quadrilatère est un parallélogramme.*

En effet, en menant la diagonale ON, on forme deux triangles égaux entre eux comme ayant les côtés égaux chacun à chacun (n° 169) : donc l'angle MNO = NOP : donc MN est parallèle à OP (n° 137). De même l'angle MON = ONP : donc MO et NP sont parallèles.

Donc la figure est un parallélogramme (n° 194).

N° 198. THÉORÈME V. Fig. 144.

Si deux côtés opposés, MN, OP, *d'un quadrilatère* MNOP, *sont égaux et parallèles, ce quadrilatère est un parallélogramme.*

La diagonale ON détermine deux triangles, MON, ONP, qui sont égaux comme ayant un angle égal compris entre des côtés égaux chacun à chacun (n° 170) : en effet, MN et OP étant parallèles, les deux angles MNO et NOP sont égaux (n° 140) ; de plus, MN=OP, et ON est commun. Il résulte de là que l'angle MON=ONP; d'où il suit que MO et NP sont aussi parallèles (n° 137). — *Donc*, etc.

Corollaire. — Dans tout parallélogramme, la droite qui joint les milieux de deux côtés parallèles, est égale et parallèle aux deux autres.

Scolie. — Les deux derniers théorèmes sont *réciproques* du précédent et réciproques entre eux.

N° 199. THÉORÈME VI. Fig. 145.

Les diagonales d'un parallélogramme, MNOP, *se coupent mutuellement en deux parties égales; — et réciproquement.* Fig. 145.

Soit I le point d'intersection des deux diagonales; les deux triangles MIN, PIO, sont égaux comme ayant un côté égal,

Fig. 145. MN = OP (n° 196), adjacent à des angles égaux chacun à chacun (n° 172) : donc

$$MI = IP, \quad \text{et} \quad NI = IO.$$

Réciproquement : — Si les diagonales d'un quadrilatère se coupent mutuellement en deux parties égales, la figure est un parallélogramme.

En effet : de MI = IP et NI = IO l'on déduit que les triangles MIN, PIO, sont égaux comme ayant un angle égal [l'angle en I] compris entre des côtés égaux chacun à chacun (n° 170) :

donc MN = OP; et de même MO = NP.

Scolie 1er. — Les diagonales d'un parallélogramme le décomposent en deux couples de triangles opposés égaux.

Scol. 2. — A moins que tous les angles du parallélogramme ne soient des angles droits (n° 195, *scol.*), ses diagonales sont inégales; la plus grande est opposée à son angle obtus, et la plus petite à son angle aigu (n° 171).

Scol. 3. — Le point I (fig. 145) se nomme le *centre* du parallélogramme.

Ce point jouit de la propriété d'être le milieu de toute droite qui y passe en se terminant au contour du parallélogramme en deux points, G, K, des côtés opposés, MN, OP; et de plus, cette droite GIK partage alors le parallélogramme en deux quadrilatères égaux. En effet, les triangles IGN, IKO, par exemple, ont un côté égal, IN = IO, adjacent à deux angles égaux chacun à chacun; d'où IG = IK, ce qui démontre la première partie de la proposition. En second lieu, GN = KO et GM = KP, ce qui, vu l'égalité des angles opposés du parallélogramme proposé, rend superposables [directement (n° 43)] les deux quadrilatères GNPK et KOMG.

§ III. — *Du Rectangle.*

Fig. 146. N° 200. On nomme Rectangle, un *quadrilatère*, MNOP (fig. 146), *dont tous les angles sont droits.* — La possibilité d'une pareille figure est évidente (n° 140); et il résulte de la réciproque du *théorème* II (n° 195) qu'elle n'est qu'une variété

du parallélogramme : elle jouit donc de toutes les propriétés du parallélogramme; [mais la réciproque n'est pas vraie]. Fig. 146.

Dans un rectangle, les côtés adjacens à ceux que l'on a pris pour base, sont égaux à la hauteur (n° 141).

Deux rectangles sont égaux lorsqu'ils ont même base et même hauteur.

N° 201. THÉORÈME VII. Fig. 146.

Les diagonales d'un rectangle, MNOP, *sont égales.*

En effet, comparons les deux triangles OMN, PNM : ils ont un angle égal [l'angle droit $M = N$]; de plus, $MO = NP$, et MN est commun : donc les deux triangles sont égaux (n° 170);

et $$MP = NO.$$

Réciproquement : — Si les diagonales d'un quadrilatère MP se coupent mutuellement en parties égales et sont égales, ce quadrilatère est un rectangle.

En effet : il résulte de l'hypothèse, que les quatre triangles qui composent le quadrilatère, sont isocèles; d'ou il suit que chaque diagonale partage cette figure en deux triangles rectangles (n° 165, *récipr.*).

Scolie 1er. — Les diagonales d'un rectangle se coupent en quatre parties égales, et décomposent la figure en quatre triangles isocèles égaux deux à deux, ayant leur sommet commun au centre (n° 199, *scol.* 3) du rectangle, et tous leurs côtés latéraux égaux entre eux. — On peut en conclure le scolie suivant :

SCOL. 2. — *Tout rectangle est inscriptible* à un cercle construit sur les diagonales comme diamètres.

SCOL. 3. — *Un rectangle a deux axes de symétrie :* — ce sont les droites menées par les milieux des côtés opposés.

§ IV. — *Du Losange.*

Fig. 147. N° 202. On nomme LOSANGE ou RHOMBE(*), un *quadrilatère*, MNOP (fig. 147), *dont tous les côtés sont égaux entre eux.* — Il est facile de voir qu'une pareille figure peut exister ; et d'après le *numéro* 197, ce n'est encore qu'une variété du parallelogramme dont elle partage les propriétés [mais non pas réciproquement].

Deux losanges sont égaux lorsqu'ils ont un côté égal et un angle égal.

N° 203. THÉORÈME VIII. Fig. 147.

Les diagonales d'un losange MNOP *se coupent à angle droit.*

En effet : dans les deux triangles MIO, MIN, on a (n° 199)

$$MO = MN, \quad IO = IN,$$

et de plus MI est commun ; donc les deux triangles sont égaux (n° 169) ; donc l'angle MIO = MIN : *donc*, etc.

Réciproquement : — Si les diagonales d'un quadrilatère se coupent en parties égales et à angle droit, la figure est un losange.

En effet : chaque diagonale partage alors le quadrilatère en deux triangles isocèles (*voyez* le n° 164, *récipr.* 4°).

Scolie. — Les diagonales d'un losange le décomposent en quatre triangles rectangles égaux entre eux, ayant tous le sommet de leur angle droit au centre du losange.

En effet : chaque diagonale du losange le partage en deux triangles isocèles dont elle est la base commune, et se trouve elle-même partagée en deux parties égales (n° 199) par l'autre

---

(*) De cette expression dérive celle de *rhomboïde* que l'on emploie quelquefois pour désigner le *parallelogramme* : — Ῥόμβος .. ὃ ἰσόπλευρον (τῶν τετραπλεύρων σχημάτων),... ῥομβοειδὲς δὲ... ὃ οὔτε ἰσόπλευρον... οὔτε ὀρθογώνιον : — *Le rhombe est celui* [des quadrilatères] *qui a tous ses côtés égaux ; le rhomboïde n'a ni* [tous] *ses côtés égaux ni ses angles droits* — (EUCLIDE, Livre I, *défin.* 32 et 33).

diagonale, qui lui est ainsi perpendiculaire; et de là résulte la proposition énoncée (*voyez* le n° 164.) Fig. 147.

Scol. 2. — *Tout losange est circonscriptible* à un cercle décrit du même centre (n° 199, *scol.* 3), sur un diamètre égal à la distance des côtés opposés.

Scol. 3. — *Un losange a deux axes de symétrie* qui ne sont autres que ses deux diagonales.

§ V. — *Du Carré.*

N° 204. On nomme Carré, un *quadrilatère* (fig. 148) *dont tous les côtés sont égaux et les angles droits.* — Le carré est donc un *quadrilatère régulier* (n° 75), dont la possibilité est suffisamment prouvée par tout ce qui précède. Fig. 148.

Ainsi, d'après sa définition, le carré doit jouir à la fois, des propriétés du parallélogramme en général, et en particulier de celles du rectangle et de celles du losange.

Il s'ensuit que les diagonales du carré sont égales (n° 201); qu'elles se coupent en parties égales (n° 199) et à angle droit (n° 203); et enfin qu'elles décomposent la figure en quatre triangles rectangles isocèles égaux entre eux (*scolies* des *mêmes* n°ˢ); — *et réciproquement*, un quadrilatère qui possède toutes ces propriétés, est nécessairement un carré.

Le carré est inscriptible et circonscriptible; — ses deux diagonales sont deux diamètres du cercle circonscrit, et les droites qui joignent deux à deux les milieux des côtés opposés sont deux diamètres du cercle inscrit. — Ces *quatre* diamètres forment autant d'*axes de symétrie* de la figure, qui ne peut en avoir d'autres.

Deux carrés sont égaux lorsqu'ils ont un côté égal.

§ VI. — *Du Trapèze.*

N° 205. Le Trapèze(*) est *un quadrilatère*, MNOP (fig. 149), *dont deux côtés* seulement, MN, OP, *sont parallèles*, les deux Fig. 149.

(*) De τράπεζα, *table*.

Fig. 149. autres allant concourir en un point R situé hors du quadrilatère. — Les deux côtés parallèles se nomment les *bases* du trapèze ; le plus grand des deux, OP, est dit la *grande base*, et l'autre MN, est dit la *petite base ;* les côtés restans sont les *côtés latéraux ;* et la perpendiculaire AB commune aux deux bases est la *hauteur* du trapèze. Il est facile de voir que les angles adjacens à la grande base forment toujours une somme moindre que 2 *droits ; et vice versâ* pour la petite base ; et que les angles adjacens à un même côté latéral sont supplémentaires (n° 140).

Le *trapèze* est dit *rectangle* lorsque l'un des côtés latéraux est perpendiculaire aux bases. — Il est *isocèle* lorsque les deux côtés latéraux sont égaux entre eux ; et alors, la droite qui joint les milieux des bases, leur est perpendiculaire ; de plus, cette droite étant alors un axe de symétrie, le trapèze est encore dit *symétrique* en raison de cette circonstance. On reconnaît sans peine que les perpendiculaires élevées sur les milieux des côtés latéraux, concourent en un point de l'axe ; d'où il résulte que

Le trapèze symétrique est inscriptible (n° 75).

Chaque diagonale, MP ou NO (fig. 149), d'un trapèze, le décompose en deux triangles dont chacun a pour base l'une de ses bases, et même hauteur que lui. — On peut encore considérer la même figure, non plus comme la somme, mais comme la différence de deux triangles, MNR, OPR, dont chacun aurait pour base l'une des bases du trapèze, et dont le sommet commun serait le point de concours des côtés latéraux.

Si ce point de concours des côtés latéraux s'éloignait indéfiniment (n° 142), le trapèze dégénérerait en parallélogramme. Cette dernière sorte de figure peut donc être, à juste titre, considérée comme cas particulier ou comme *limite* du trapèze ; d'où il résulte que les propriétés du trapèze existent également, avec quelques modifications particulières, dans le parallélogramme [mais non réciproquement]. Cependant, nous avons cru devoir étudier le parallélogramme avant de parler du trapèze, parce que la marche inverse eût occasioné quelques longueurs.

N° 206. Théorème IX. Fig. 150.

Dans tout trapèze MNOP, *la droite* CD *qui joint les milieux*, C, D, *des côtés latéraux*, MO, NP, *est* — 1° *parallèle aux bases*, — 2° *également distante de chacune d'elles*, — et — 3° *égale à leur demi-somme*. Fig. 150.

Par le point C, milieu de MO, menons AB parallèle à NP. Il en résultera [si l'on prolonge MN] deux triangles MCA, OCB, égaux entre eux (n° 172), comme ayant un côté égal MC = OC, et les angles adjacens égaux chacun à chacun; d'où CA = CB.

Maintenant, dans le parallélogramme AP, les points C, D, étant les milieux des deux côtés AB, NP, il s'ensuit que la droite CD est égale et parallèle aux deux autres côtés, AN, BP (n° 198, *coroll.*); et de plus, qu'elle en est également distante.

Enfin, de ce que CD = AN = BP, on conclut

$$CD = \tfrac{1}{2}(AN + BP) = \tfrac{1}{2}(AM + MN + OP - OB);$$

et puisque AM = OB, il s'ensuit

$$CD = \tfrac{1}{2}(MN + OP).$$

Scolie. — Si le trapèze *dégénérait* en parallélogramme (n° 205), on aurait MN = OP; d'où CD = MN = OP (*voyez* le n° 198, *coroll.*).

§ VII. — *Du Quadrilatère Inscriptible.*

N° 207. Théorème X. Fig. 151.

Dans tout quadrilatère inscriptible ABCD, *la somme des angles opposés, pris deux à deux, est égale à* 2 droits. Fig. 151.

En effet, les arcs qui correspondent respectivement à deux angles inscrits opposés, c'est-à-dire, les arcs compris respectivement entre les côtés de deux angles opposés du quadrilatère, forment en somme la circonférence entière. Or chaque angle inscrit étant moitié de l'angle au centre qui corres-

Fig. 151. pond au même arc (nº 151), il s'ensuit que ces angles opposés, s'ils avaient leur sommet au centre du cercle, correspondraient à des arcs dont la somme formerait une demi-circonférence : donc ces angles sont supplémentaires.

Scolie. — Nous avons déjà fait implicitement usage de ce théorème pour démontrer celui du *numéro* 152.

Nº 208. THÉORÈME XI. Fig. 152.

Fig. 152. RÉCIPROQUEMENT : — *Un quadrilatère est inscriptible lorsque les angles opposés y forment, deux à deux, une somme égale à* 2 DROITS.

En effet, soit ABCD un quadrilatère dans lequel on suppose

$$A + C = B + D = 2 \text{ droits}.$$

Par trois des sommets, A, B, C, faisons passer une circonférence (nº 166, *coroll.* 1er); et supposons que le point D lui soit, par exemple, intérieur. Cela posé, prolongeons AD [ou CD] jusqu'à la rencontre de la circonférence, en D′, et menons CD′ : nous aurons, en vertu du théorème direct (nº 207) :

$$ABC + AD'C = 2 \text{ droits};$$

mais nous avons déjà, par hypothèse,

$$ABC + ADC = 2 \text{ droits};$$

d'où il résulterait

$$ADC = AD'C; \qquad \text{Ce qui est absurde (nº 116).}$$

Même raisonnement si le point D′ était extérieur à la circonférence.

Donc le quadrilatère AC est inscriptible.

§ VIII. — *Du Quadrilatère Circonscriptible.*

Nº 209. THÉORÈME XII. Fig. 153.

Fig. 153. *Dans tout quadrilatère circonscriptible* GIKL, *les côtés opposés, pris deux à deux, forment des sommes égales.*

En effet, dans tout angle circonscrit (nº 150), les côtés [compris entre le sommet et les points de tangence respectifs], étant égaux (nº 152, *scol.*), il en résulte ces égalités :

$$1^{\circ}\quad AI = IB, \; \ldots . GA = DG;$$

$$2^{\circ}\quad KC = BK, \; \ldots . CL = LD.$$

Or, la somme des premiers membres n'est autre chose que la somme de deux côtés opposés, GI + KL, et de même, la somme des seconds membres se réduit à IK + LG, somme des deux autres côtés : *donc*, etc.

N° 210. Théorème XIII. Fig. 154.

Réciproquement : — *Un quadrilatère est circonscriptible lorsque les côtés opposés, pris deux à deux, y forment des sommes égales.* Fig 154.

Soit GIKL un quadrilatère dans lequel on suppose

$$GI + KL = IK + LG.$$

Dans cette hypothèse, la figure ne saurait être un parallélogramme sans être en même temps un losange, cas qui a déjà été traité spécialement (n° 203, *scol.* 2). Ce cas étant donc excepté, il y aura toujours au moins deux côtés opposés, par exemple GI, KL, qui iront concourir en un point R, de manière à former, avec un troisième côté IK, un triangle RIK dont le quadrilatère fasse partie. Cela posé, inscrivons un cercle à ce triangle (n° 167, *coroll.* 1er), et supposons que le quatrième côté GL du quadrilatère, ne touchant pas la circonférence, lui soit, par exemple, extérieur. Dans cette hypothèse, menons la tangente G'L' parallèle à GL, de manière à former le quadrilatère circonscrit G'IKL' : nous aurons alors, en vertu du théorème direct,

$$G'I + KL' = IK + L'G';$$

or, ce résultat est contradictoire avec l'hypothèse, puisque l'on a, d'une part,

$$GI + KL > G'I + KL',$$

tandis que, d'autre part, LG étant nécessairement la petite base du trapèze GL' (n° 205), on a encore

$$LG < L'G'.$$

Même raisonnement pour le cas où le côté GL couperait la circonférence.

Donc enfin le quadrilatère GK est circonscriptible.

§ IX. — *Problèmes sur le Quadrilatère.*

N° 211. Problème I. Fig. 155.

Par un point C *donné hors d'une droite* AB, *mener une parallèle à cette droite.* Fig. 155.

Synthèse. — 3e *Construction* (voyez les *deux* 1res au n° 154). — 1° Menons la droite CD rencontrant AB en un point quelconque D. — 2° Du point D comme centre, et d'un rayon

Fig. 155. égal à DC, décrivons un petit arc de cercle qui coupe AB en E. — 3° Des points C et E comme centres, et du même rayon DC déjà employé, décrivons deux autres arcs de cercle qui se coupent en F. — 4° Menons CF.

CF sera la parallèle demandée, puisque la figure DECF est un losange; etc. (n° 202).

N. B. — On pourrait employer un parallélogramme quelconque au lieu d'un losange, en prenant des rayons inégaux.

N° 212. PROBLÈME II. Fig. 156.

Étant donnés les quatre côtés d'un quadrilatère [avec leur disposition], *et l'angle compris par deux côtés consécutifs, construire la figure.*

Fig. 156. *Construction.*— 1° Faisons d'abord un angle MOP égal à l'angle donné (n° 129); et prenons des longueurs OM, OP, respectivement égales aux côtés qui doivent comprendre cet angle. — 2° Des points M et P, comme centres, et de rayons respectivement égaux aux deux autres côtés, décrivons deux arcs de cercle qui se couperont en un point N [si le problème est possible]. — 3° Menons MN, PN.

Le quadrilatère ainsi obtenu satisfera évidemment aux conditions de la question — (*voyez* le n° 192).

Discussion. — Les arcs qui ont les points M et P pour centres respectifs se coupent généralement en deux points, N, N'. — Si ces deux points se trouvent tous deux dans l'intérieur de l'angle MOP, il y aura *deux* solutions : dans l'une des deux, l'angle [N] opposé à l'angle donné O, sera saillant; dans l'autre, l'angle [N'] opposé à O, sera rentrant. — Si la somme des rayons MN et PN était égale à MP, le quadrilatère *dégénérerait* en triangle. — Enfin la question serait tout-à-fait *absurde* si ces rayons formaient une somme moindre que MP.

Scolie 1er. — On obtient, comme pour les triangles, des solutions symétriques, en échangeant entre eux les côtés OM et OP.

Scol. 2. — On pourrait proposer la construction d'un quadrilatère dont on donnerait 3 côtés et les 2 angles compris, ou 2 côtés et les 3 angles adjacens, ou les 4 côtés et une diagonale, etc. — Dans tous les cas, il faut au moins 2 longueurs, c'est-à-dire *deux* côtés (n° 192), ou *un* côté et *une* diagonale.

N° 213. PROBLÈME III.

Étant donnés les deux côtés consécutifs d'un parallélogramme et l'un de ses angles, construire la figure.

Même marche que pour le problème précédent (n° 212), avec cette restriction toutefois, que des deux solutions généralement fournies par les points N, N', la première seule est admissible.

Discussion. — La figure sera un rectangle si l'angle est droit; elle sera un losange si les deux côtés sont égaux ; elle sera un carré si ces deux hypothèses ont lieu à la fois.

Dans le cas général, on peut avoir deux parallélogrammes symétriques ; mais il n'y a pas de solution double pour le rectangle, le losange, et le carré, parce que ces figures sont à elles-mêmes leurs symétriques (*voyez* les nos 200 — 204).

SCOLIE. — On peut généraliser le problème précédent, en proposant de

Construire un parallélogramme, étant données 3 *quantités prises parmi ces élémens : côtés, diagonales, angle du parallélogramme, angle des diagonales, angle d'une diagonale avec un côté....*

Nous ne faisons qu'indiquer ces questions aux élèves qui veulent s'exercer.

CHAPITRE VI.

DES POLYGONES.

§ Ier. — *Des Polygones en général.*

N° 214. Nous avons déjà donné (nos 73 et 74) la définition des POLYGONES (*) en général, et nous avons traité (*chap.* IV), du *triangle* ou polygone de *trois* côtés, et (*chap.* V) du quadrilatère ou polygone de *quatre* côtés. Les polygones étant ordinairement classés d'après le nombre de leurs côtés, les deux espèces précédentes se trouvent en être les plus simples. Viennent ensuite :

le *pentagone* ou polygone de *cinq* côtés,
l'*hexagone*, ... *six* . . ,
l'*heptagone*, ... *sept* . . ,
l'*octogone*, ... *huit* . . ,
l'*ennéagone*, ... *neuf* . . ,
le *décagone*, ... *dix* . . ,
l'*endécagone*, ... *onze* . . ,
le *dodécagone*, ... *douze*. . .

Au-delà de douze côtés, les polygones ne reçoivent plus de noms particuliers, excepté celui de *quinze* côtés, que l'on nomme *pentédécagone*; les autres se désignent simplement par l'énonciation du nombre de leurs côtés.

N° 215. Avant de commencer la théorie générale des polygones, nous avons encore à expliquer diverses dénominations qui y sont relatives.

Fig. 34. Ainsi, un polygone [fermé] est dit *convexe* (fig. 34) lorsqu'il n'existe aucune droite [autre que ses côtés] qui puisse

(*) De πολύς, *multiple*; et γωνία, *angle*.

avoir avec son périmètre plus de deux points communs, ou, ce Fig. 34.
qui revient au même, lorsque aucun de ses côtés, même indéfiniment prolongé, ne peut rencontrer le reste de ce périmètre ; de sorte que la figure se trouve ainsi tout entière dans une des deux régions (n° 13) du plan, déterminées par chacun des côtés pris en particulier.—Au contraire, un polygone est dit *concave* Fig. 35.
(fig. 35) lorsqu'il ne présente pas ce caractère.—*Tout triangle est* nécessairement *convexe.*

On reconnaît encore les polygones convexes [autres que le triangle] à leurs diagonales qui sont toutes intérieures, tandis qu'il y en a toujours quelqu'une extérieure dans les polygones concaves : telles seraient, par exemple, celles qui, dans la *figure* 35, lieraient deux à deux les points **C et E, A et I,** etc.

Il résulte nécessairement de là, que

Deux polygones convexes se confondent lorsqu'ils ont les mêmes sommets :

Car s'il en était autrement, quelque côté de l'un des deux polygones serait une diagonale par rapport à l'autre, ce qui implique contradiction avec ce qui vient d'être dit.

N° 216. On distingue dans un polygone [fermé] deux sortes d'angles, les *angles saillans* et les *angles rentrans.* — Un angle est dit *saillant,* tel que BAL (fig. 35), ou *rentrant,* tel que CDE, suivant que le triangle déterminé par les extrémités [B, A, L, ou C, D, E] des deux côtés qui comprennent cet angle, appartient à *l'intérieur* ou à *l'extérieur* du polygone.

C'est pourquoi l'on nomme ordinairement *angle extérieur* d'un polygone, chacun des deux angles BA*l*, *b*AL, adjacens à un angle saillant BAL.

On peut encore, pour mieux caractériser les angles saillans et les angles rentrans, considérer deux côtés consécutifs d'un polygone, supposés terminés à leur point d'intersection, comme formant ainsi deux angles différens, l'un moindre que 2 *droits*, et l'autre plus grand : [celui-ci serait composé de l'angle opposé au premier et de ses deux adjacens (*voyez le* n° 120)]. Cela posé, *l'angle du polygone* sera *saillant* ou *rentrant*, suivant qu'il sera *plus petit* ou *plus grand* que 2 *droits* ; et au contraire, dans les mêmes circonstances, le second des deux angles sera plus grand ou plus petit que 2 *droits*.

Digitized by Google

Un triangle a nécessairement ses trois angles saillans ; et généralement, il est facile de voir que

Un polygone fermé ne peut avoir moins de trois angles saillans.

Par suite de ce qui précède, on peut dire encore qu'un polygone est *convexe* s'il n'a que des angles saillans, et qu'il est *concave* s'il a un ou plusieurs angles rentrans.

[Au reste, nous reviendrons, par la suite, sur cette manière de distinguer la convexité et la concavité des figures.]

N° 217. De même que l'on peut, en menant une diagonale, décomposer en deux triangles, un quadrilatère simple [de première ou de seconde espèce (n° 191)] ; de même aussi l'*On peut* toujours *décomposer en triangles un polygone d'un nombre quelconque de côtés.* [On suppose que le contour ne *se croise* pas comme celui du quadrilatère simple de la troisième espèce.]

Fig. 157—159. La décomposition d'un polygone ABCDE (fig. 157, 158, et 159) en triangles peut toujours se faire de plusieurs manières.

Le moyen le plus simple de l'opérer lorsque ce polygone est
Fig 157. convexe, consiste à mener, par l'un des sommets, A (fig. 157), des diagonales à tous les autres [excepté les deux sommets, B, E, consécutifs du premier] : le polygone se trouve alors partagé en autant de triangles, *moins deux*, qu'il a de côtés, puisqu'en prenant le point A pour sommet commun de tous les triangles, chaque côté du polygone, à l'exception des deux extrêmes AB et AE, sert de base à un triangle.

Au lieu de mener ainsi des diagonales par l'un des sommets,
Fig. 158. on peut, par un point M (fig. 158) pris sur un côté AB et entre ses deux extrémités, mener des droites à tous les autres sommets C, D, E. Alors, le polygone se trouve partagé en autant de triangles, *moins un*, qu'il a de côtés.

Enfin, l'on peut encore décomposer en triangles un polygone convexe [et quelquefois même un polygone concave], en me-
Fig. 159. nant, par un point intérieur quelconque, O (fig. 159), des

droites à tous les sommets : le polygone se trouve ainsi partagé en autant de triangles qu'il a de côtés. [Il est bien clair, d'ailleurs, que les deux méthodes précédentes ne sont, au fond, que des cas particuliers de cette dernière.] Fig. 159.

Quant aux polygones concaves (fig. 160), on aperçoit sans peine, qu'au moyen d'un nombre suffisant de diagonales intérieures menées convenablement par les sommets des angles rentrans, on peut toujours partager ces sortes de polygones en polygones convexes : les polygones concaves sont donc aussi décomposables en triangles. Fig. 160.

Deux polygones, ABCDE, A'B'C'D'E' (fig. 161), sont évidemment égaux lorsqu'ils sont composés d'un même nombre de triangles égaux chacun à chacun et assemblés de la même manière : car, si l'on fait coïncider deux à deux, comme cela est possible d'après l'hypothèse, les triangles égaux ABC et A'B'C', ACD et A'C'D', ADE et A'D'E', les polygones ABCDE et A'B'C'D'E' par suite, coïncideront aussi. — *Réciproquement*, deux polygones égaux peuvent toujours se décomposer en un même nombre de triangles égaux chacun à chacun et assemblés de la même manière : car, si l'on commence par faire coïncider les deux polygones égaux, il sera impossible de décomposer l'un sans décomposer l'autre en même temps et de la même manière. — Il est d'ailleurs évident que deux polygones égaux ont tous leurs côtés et tous leurs angles égaux chacun à chacun, ainsi que leurs diagonales, etc. Fig. 161.

Au reste, la décomposition en triangles n'est pas la seule dont un polygone est susceptible. Soit, par exemple, ABCDEFGI (fig. 162) un polygone, et AE une droite quelconque menée d'un point à un autre de son périmètre. Abaissons des sommets B, C, D..., sur AE, les perpendiculaires *Bb*, *Cc*, *Dd*... : par ce moyen, le polygone se trouvera décomposé en trapèzes et en triangles rectangles. — Cette décomposition est souvent employée dans la Géométrie pratique. Fig. 162.

N° 218. THÉORÈME I.

La somme des angles intérieurs d'un polygone convexe est égale à autant de fois 2 DROITS *qu'il y a d'unités dans le nombre des côtés diminué de* DEUX.

En effet, si de l'un des sommets on mène des diagonales à
Fig. 157. tous les autres (fig. 157), le polygone se trouvera décomposé en autant de triangles, *moins deux*, qu'il a de côtés (n° 217); or, la somme des angles du polygone étant égale à la somme des angles de ces triangles, et la somme des angles de chaque triangle étant égale à 2 *droits*, il s'ensuit que la somme des angles du polygone est égale à autant de fois 2 *droits*, qu'il a de côtés moins *deux*. *C. Q. F. D.*

Scolie 1[er]. — En prenant l'*angle droit* pour *unité* (n° 109), on peut énoncer la même proposition de la manière suivante :

Pour avoir la somme des angles intérieurs d'un polygone convexe, il faut doubler le nombre des côtés et retrancher 4 *du résultat;* ce qui fait $(2n - 4)$ [angles *droits*] pour un polygone de n côtés.

Présenté de cette manière, le théorème peut se démontrer plus directement par la décomposition du polygone en triangles qui auraient un point intérieur pour sommet commun
Fig. 159 (n° 217, fig. 159).

Scol. 2. — Le théorème précédent, ainsi que le *scolie* 1[er], sont également applicables aux polygones concaves, en attribuant aux angles rentrans, les valeurs plus grandes que *deux droits* qui leur appartiennent, comme nous l'avons expliqué plus haut (n° 216).

Scol. 3. — Pour connaître la valeur de chaque angle d'un polygone équiangle, il faut diviser par le nombre des angles, la somme énoncée dans le théorème. Ainsi, dans le *quadrilatère* équiangle, chaque angle vaut *un droit*, ou simplement 1; dans le *pentagone* équiangle, chaque angle vaut $\frac{6}{5}$; dans l'*hexagone* équiangle, chaque angle vaut $\frac{4}{3}$; etc.—Pour un polygone équiangle de n côtés, la formule générale est $2\left(\frac{n-2}{n}\right)$, ou $\left(2-\frac{4}{n}\right)$. Cette valeur de l'angle croît avec le nombre des côtés, puisque le terme soustractif $\frac{4}{n}$ diminue à mesure que n augmente.

N° 219. THÉORÈME II. Fig. 163.

Dans un polygone convexe quelconque ABCDE, si l'on prolonge tous les côtés dans un même sens (*), *la somme des angles extérieurs* (n° 216), *e*AB, *a*BC, *b*CD, *c*DE, *d*EA, qui en résultent, *est égale à 4* DROITS. Fig. 163.

En effet, on a
$$eAB + BAE = 2,$$
$$aBC + CBA = 2,$$
$$bCD + DCB = 2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

d'où il résulte que la somme de tous les angles du polygone, augmentée de la somme des angles extérieurs, est égale à autant de fois 2 *droits* qu'il y a de côtés dans le polygone. Ainsi, la somme totale surpasse la somme des angles du polygone, de 4 *droits* (n° 167, *scol.* 1er) : donc la somme des angles extérieurs est égale à 4 *droits*.

SCOLIE. — Si, changeant la signification attribuée précédemment (n° 216) à la dénomination d'*angles extérieurs*, on convenait maintenant d'appeler ainsi ceux qu'on obtient en retranchant de 4 *droits*, chacun des angles du polygone [que ces derniers fussent d'ailleurs saillans ou rentrans], le théorème précédent serait remplacé par celui-ci :

La somme des angles extérieurs d'un polygone fermé quelconque, est égale à autant de fois 2 DROITS *que le polygone a de côtés plus* DEUX ;

Ou bien [l'angle droit étant pris pour unité (n° 109)] :

Pour avoir la somme des angles extérieurs d'un polygone fermé quelconque, il faut doubler le nombre des côtés, et ajouter 4 *au résultat.*

Ces derniers énoncés ont, sur celui que nous avons donné en tête du présent *numéro*, l'avantage d'être applicables aux polygones concaves aussi bien qu'aux polygones convexes.

(*) Cette expression, *dans le même sens*, signifie que, si l'on faisait *le tour* du polygone en suivant, par exemple, l'ordre A, B, C, D..., il faudrait, avant de changer de direction pour passer d'un côté, AB, BC..., au suivant, BC, CD...., prolonger toujours *de la même manière*, c'est-à-dire toujours *en avant* [ou même toujours *en arrière*], le côté que l'on quitte, AB*a*, BC*b* ...

N° 220. THÉORÈME III.

Deux polygones convexes sont égaux lorsqu'ils ont tous leurs côtés [pris dans le même ordre] *égaux chacun à chacun, ainsi que leurs angles correspondans, à l'exception de trois* [pour chacun].

On démontre facilement que les deux polygones sont superposables, comme on l'a fait au *numéro* 169 pour un théorème relatif aux triangles, lequel n'est qu'un cas particulier de celui-ci.

N° 221. THÉORÈME IV.

Deux polygones de n *côtés sont égaux lorsqu'ils ont* (n — 1) *côtés consécutifs* [pris dans le même ordre], *égaux chacun à chacun, ainsi que les* (n — 2) *angles compris entre ces côtés.*

Démonstration par la superposition, comme celle du théorème analogue relatif aux triangles, *numéro* 170.

N° 222. THÉORÈME V.

Deux polygones de n *côtés sont égaux lorsqu'ils ont* (n — 2) *côtés consécutifs égaux chacun à chacun, ainsi que les angles qu'ils font entre eux et avec les deux autres côtés.*

Voyez, de même, le *numéro* 172.

N° 223. REMARQUE *sur les deux théorèmes précédens.*—En général, pour qu'un polygone de n côtés soit déterminé, il faut connaître ($2n$—3) des $2n$ *élémens* distincts [côtés et angles] (*voyez* le n° 174) qui le constituent; mais ces ($2n$ — 3) élémens ne peuvent être pris arbitrairement, et doivent satisfaire à certaines conditions que l'on ne saurait exposer ici. Nous nous bornerons à faire observer, — 1° que chaque côté du polygone doit être moindre que la somme de tous les autres; — 2° que, d'après le *théorème* 1 (n° 218), les n angles ne peuvent comp-

ter que pour $(n-1)$ élémens ; — et 3° que ces élémens doivent être disposés d'une manière donnée.

Il existe, pour la détermination des polygones, une autre méthode qu'il est utile de connaître. Elle consiste à donner la distance mutuelle de *deux* sommets, A, B (fig. 34), et leurs distances respectives à tous les autres, C, D, E..., ainsi que la disposition de ceux-ci. On connaît de cette manière, les trois côtés de chacun des triangles ABC, ABD, ABE..., ce qui suffit pour les déterminer. La construction du polygone dépend alors de la connaissance de 3 de ses côtés et de $2(n-3)$ diagonales : en tout $(2n-3)$ lignes. Fig. 34.

On arriverait au même résultat en décomposant le polygone en triangles par des diagonales menées de l'un des sommets. On aurait ainsi à considérer $(n-2)$ triangles dont le premier exige 3 données et les autres chacun 2, ce qui fait $[3+2(n-3)]$ ou $(2n-3)$ données, comme précédemment.

Il en serait de même pour la décomposition du polygone en triangles qui auraient leur sommet commun, soit sur l'un des côtés, soit en un point intérieur : dans ce dernier cas par exemple, il y a n triangles ; le premier exige 3 données, les $(n-2)$ suivans chacun 2, et le dernier n'en exige aucune : cela fait en tout $[3+2(n-2)]$ ou $(2n-1)$ données, au nombre desquelles se trouvent comprises deux distances nécessaires à la détermination du point intérieur qui est étranger à l'objet principal de la question ; en retranchant ces deux données, on a encore pour résultat $(2n-3)$.

N° 224. Théorème VI. Fig. 160.

Lorsqu'une portion de plan est recouverte par un assemblage de polygones quelconques [convexes ou concaves], *le nombre des polygones* [P] *plus le nombre des sommets* [S] *forment une somme égale au nombre des côtés* [C] *augmenté d'un* : c'est à dire que l'on a toujours Fig. 160.

$$P+S=C+1.$$

Il est d'abord évident que cette formule est vraie quand $P=1$, c'est-à-dire quand il n'y a qu'un polygone.

Ensuite si, au premier polygone on en réunit un second, P deviendra égal à 2 ; C représentera le nombre total des côtés des deux polygones,

diminué du nombre des côtés communs; et de même S représentera le nombre total des sommets des deux polygones, diminué du nombre des sommets communs. Or, l'augmentation de C sera plus grande d'*une unité*, que l'augmentation de S, puisque le nombre des sommets communs surpasse nécessairement d'*une unité* le nombre des côtés communs. Donc la formule est encore vraie pour 2 polygones.

On prouverait de même que la formule est vraie pour 3 polygones, pour 4, etc. — Ainsi elle est vraie généralement.

[*Voyez*, sur ce sujet, un *Mémoire* de M. CAUCHY dans le 16e cahier du *Journal de l'Ecole Polytechnique*, tome IX, *page* 77.]

N° 225. REMARQUE *sur la convexité des polygones.* — Après avoir fixé (nos 215 et 216) les conditions de la convexité des polygones, nous avons examiné dans ce chapitre, les principales propriétés des polygones pour lesquels ces conditions se trouvent remplies. Mais on peut donner plus d'extension et de généralité à la première définition que nous avons adoptée dans tout ce qui précède.

Pour cela, rappelons d'abord que toute droite indéfinie partage un plan qui la contient en deux moitiés superposables que nous avons nommées *régions* (n° 13). Cela posé, admettons que l'on prolonge indéfiniment,
Fig. 164 et 165. dans les deux sens, l'un des côtés AB (fig. 164 et 165) d'un polygone quelconque; il arrivera de ces deux choses l'une: ou bien les deux côtés AM, BN, consécutifs du côté AB, seront situés, par rapport à ce dernier, dans la même région du plan (fig 164), ou bien ils se trouveront, l'un dans une des deux régions, et l'autre dans la seconde (fig. 165). Or, il résulte toujours de la même définition, que le polygone est convexe quand le premier cas a lieu pour tous les côtés [sans en excepter un seul], supposés prolongés indéfiniment, et au contraire que le polygone est concave lorsque quelqu'un de ses côtés se trouve dans le second cas.

Maintenant, en considérant les polygones, non plus comme des portions de plans (n° 74), mais comme des lignes brisées (n° 73), il arrive que le caractère assigné ci-dessus aux polygones convexes, peut appartenir à des polygones dont les côtés *s'entre-croiseraient* en un ou en plusieurs points, comme
Fig. 166. dans la *figure* 166. C'est pourquoi M. POINSOT (*Journal de l'École Polytechnique*, 10e cahier, tome IV, *page* 16 et *suiv.*) regarde ces sortes de lignes comme des polygones convexes *d'un ordre supérieur*, ceux que nous avons considérés jusqu'à présent étant alors des polygones convexes *du premier ordre*. — On voit que dans ce genre de figure, une ligne droite peut rencontrer le système des divers côtés en plus de deux points, ou bien qu'un côté prolongé peut rencontrer le reste du contour, circonstances qui ne sauraient avoir lieu dans les polygones convexes du premier ordre.

Il est facile de voir d'ailleurs que ce qui précède s'applique aux polygones ouverts aussi bien qu'aux polygones fermés.

§ II. — *Des Polygones réguliers.*

N° 226. Nous avons vu (n° 75) que l'on nomme *polygone régulier*, tout polygone qui est en même temps *équilatéral et équiangle*. Dans le triangle, ces deux conditions ne peuvent pas être remplies l'une sans l'autre : on est donc sûr qu'un triangle est régulier, dès que l'on sait, *ou* qu'il est équilatéral, *ou* qu'il est équiangle (n° 164, *scol.* 2). Mais il n'en est pas de même quand le polygone a plus de trois côtés : ainsi, le losange proprement dit (n° 202) est équilatéral sans être équiangle, et le rectangle en général (n° 200) est équiangle sans être équilatéral ; le carré (n° 204) seul, parmi les quadrilatères, satisfait aux deux conditions à la fois.

Outre le triangle régulier et le quadrilatère régulier, que nous connaissons déjà, nous obtiendrions encore l'hexagone régulier en réunissant, autour d'un même point O (fig. 167), *six* triangles réguliers, puisque l'angle de cette dernière figure vaut $\frac{2}{3}$ (n° 164) ou *le sixième de quatre* angles droits. Fig. 167.

On nomme *ligne polygonale régulière*, un polygone ouvert, *équilatéral* et *équiangle* à la fois (n°ˢ 73, 74, et 75). — Il faut observer qu'une ligne brisée régulière peut bien n'être pas susceptible de faire partie d'un polygone régulier fermé.

Un polygone régulier ne pouvant avoir d'angles rentrans, *est nécessairement convexe.*

N° 227. LEMME. Fig. 167.

Il existe des polygones réguliers d'un nombre quelconque de côtés [plus grand que *deux*].

En effet, concevons, tout autour d'un même point O, un nombre *quelconque* d'angles égaux entre eux et sous-multiples de 4 *droits* [hypothèse qui est toujours admissible]. Puis prenons, sur leurs côtés, des distances OA, OB, OC,..... égales entre elles ; et menons AB, BC, CD... — Tous les triangles ainsi formés seront isocèles, et de plus égaux entre eux comme ayant un angle égal compris entre des côtés égaux

Fig. 167. (n° 170). L'ensemble de tous ces triangles formera donc un polygone, ABCDEF, qui aura, d'abord tous ses côtés égaux, et ensuite tous ses angles égaux comme composés de parties égales, et qui, par conséquent, sera régulier.

Scolie. — Le lemme précédent peut encore être énoncé comme il suit :

On peut composer un polygone régulier d'un nombre quelconque de côtés, par l'assemblage de triangles isocèles égaux entre eux et ayant un sommet commun.

Alors, ce lemme a pour *réciproque* le théorème suivant :

N° 228. Théorème VII. Fig. 167.

Tout polygone régulier ABCDEF *est décomposable en autant de triangles isocèles égaux entre eux qu'il a de côtés ;* — [De plus, ces triangles ont pour sommet commun un point qui est également distant, d'une part de tous les sommets du polygone, et d'autre part de tous ses côtés.]

En effet, menons des droites qui partagent respectivement en deux parties égales les angles A, B, C, D... du polygone ; nous obtenons ainsi une série de triangles qui ont respectivement pour bases les côtés AB, BC, CD... ; or, 1° tous ces triangles sont isocèles, puisque les angles A, B, C,... étant égaux, leurs moitiés sont aussi égales ; et 2° les mêmes triangles sont égaux entre eux puisqu'ils ont un côté égal ainsi que les angles adjacens à ce côté.

Comme d'ailleurs ces triangles sont contigus deux à deux, il s'ensuit nécessairement qu'ils ont leurs sommets en un même point O intérieur au polygone : ce qui prouve d'abord que le polygone est l'ensemble de tous les triangles. Et ensuite, ce point est, d'une part, également distant des sommets de ce polygone, et d'autre part, également distant de ses côtés.

Scolie 1er. — Le point O s'appelle le *centre* du polygone régulier. — Quand le nombre des côtés est pair, il est facile de

démontrer, par un raisonnement analogue à celui du *numéro* 199 (*scol.* 3), relatif au parallélogramme, que toute droite qui passe par le centre, y est partagée en deux parties égales, et partage elle-même le polygone en deux parties directement superposables; et telle est généralement la signification propre du mot *centre.* — Quand le nombre des côtés est *impair*, la même chose n'a plus lieu; aussi n'est-ce que par une extension peut-être abusive, que dans ces sortes de polygones, le point O porte encore le nom de *centre.* Fig. 167.

Chacune des droites égales entre elles OA, OB, OC,..., est un *rayon du polygone;* et si du centre O l'on abaisse des perpendiculaires, OM, ON, ... sur les côtés, chacune de ces perpendiculaires égales entre elles prendra le nom d'*apothème.*

On peut nommer *triangle intégrant* du polygone chacun des triangles isocèles égaux, AOB, BOC, COD....., déterminés par les *rayons* du polygone, conjointement avec ses côtés, et qui composent la figure. — Quant aux apothèmes, au lieu de décomposer le polygone en triangles, ils le décomposent en quadrilatères égaux [qui sont, de plus, symétriques (nº 86) et inscriptibles (nºˢ 151, *coroll.* 1ᵉʳ; et 208)].

Toute *ligne polygonale régulière* a aussi un *centre*, un *rayon*, un apothème. Elle jouit donc, sous ce rapport, des mêmes propriétés que les polygones réguliers.

Scol. 2. — Chaque rayon prolongé indéfiniment, ainsi que chaque apothème prolongé indéfiniment, forme dans les polygone réguliers, un axe de symétrie. Quand le nombre des côtés est pair, les rayons sont opposés deux à deux ainsi que les apothèmes; et quand le nombre des côtés est impair, chaque rayon est opposé à un apothème *et vice versâ:* donc, dans tous les cas,

Le nombre des axes de symétrie d'un polygone régulier est égal à celui de ses côtés.

Scol. 3. — Chacun des angles égaux formés par deux rayons consécutifs, se nomme *l'angle au centre* du polygone régulier; chaque angle formé par deux apothèmes consécutifs a la même

valeur : cette valeur est $\frac{4}{n}$ angles *droits* pour le polygone de n côtés. [Lorsque l'angle au centre d'une ligne polygonale régulière n'est pas sous-multiple de 4 *droits*, cette ligne ne fait pas partie d'un polygone régulier fermé (*voyez* le n° 226).] Quant à *l'angle* même *du polygone*, c'est-à-dire l'angle de deux côtés consécutifs, il est supplémentaire de l'angle au centre : il vaut donc $\left(2-\frac{4}{n}\right)$ ou $2\left(\frac{n-2}{n}\right)$ angles *droits*, comme on l'a vu précédemment (n° 218, *scol.* 3).

Scol. 4. — Un polygone régulier est déterminé quand on connaît 1° son espèce, c'est-à-dire le nombre de ses côtés, et 2° la longueur de l'un des côtés : car, avec ces données, chaque triangle intégrant du polygone est déterminé.

Ainsi — *Deux polygones réguliers sont égaux quand ils ont un côté égal et un angle égal.*

N° 229. Théorème VIII. Fig. 168.

Fig. 168. *A tout polygone régulier* ABCD.... *on peut circonscrire un cercle.*

En effet, les *rayons* du polygone régulier, OA, OB, OC, OD.., sont tous égaux entre eux (n° 228, *scol.* 1er); donc si, du *centre* O et d'un rayon OA, on décrit une circonférence, cette circonférence passera par tous les points A, B, C, D..... : donc le polygone est *inscriptible* (n° 75).

Scolie. — L'angle du polygone inscrit se nomme *angle à la circonférence.*

N° 230. Théorème IX. Fig. 168.

A tout polygone régulier ABCD.... *on peut inscrire un cercle.*

En effet, les *apothèmes* OM, ON, OP.... sont tous égaux entre eux (n° 228) : donc, si du même *centre* O et d'un rayon OM on décrit une circonférence, elle passera par tous les points M, N, P....; et de plus elle touchera tous les côtés AB, BC, CD,... (n° 89) : donc le polygone est *circonscriptible* (n° 75).

SCOLIE 1[er] *sur ces deux théorèmes.* — Les réciproques ne sont pas vraies, c'est-à-dire que tout polygone inscriptible ou circonscriptible n'est pas pour cela un polygone régulier : tel est, par exemple, le cas du triangle en général (n[os] 166 *et* 167).

Scol. 2. — Les droites OA, OM, OB, ON, OC...., qui partagent le polygone en triangles égaux, partagent le cercle inscrit et le cercle circonscrit en secteurs respectivement égaux. Fig. 168.

Scol. 3. — Le rayon du cercle circonscrit n'est autre que celui du polygone ; le rayon du cercle inscrit se confond avec l'apothème ; et enfin le centre du polygone est aussi le centre commun des deux cercles. — Pour obtenir ce centre, il suffit de faire passer des perpendiculaires par les milieux de deux côtés [non opposés] du polygone, ou de tracer les bissectrices de deux de ses angles, *ou*, *etc.*

N° 231. THÉORÈME X. Fig. 169.

Si une circonférence ABCD... *est partagée en parties égales, et que, par les points de division consécutifs,* A, B, C, D..., *on mène des cordes, le polygone inscrit formé par ces cordes, sera régulier.* Fig. 169.

En effet : d'abord, les côtés du polygone seront égaux, comme sous-tendant des arcs égaux ; ensuite ses angles seront égaux, comme moitiés d'angles [au centre] égaux (n° 151) : donc ce polygone sera régulier (n° 75).

N° 232. THÉORÈME XI. Fig. 169.

Si une circonférence ABCD.... *est partagée en parties égales, et que, par les points de division consécutifs,* A, B, C, D .., *on mène des tangentes, le polygone circonscrit* MNPQ... *formé par ces tangentes, sera régulier.*

En effet, d'une part, les angles M, N, P.... seront égaux comme circonscrits à des arcs égaux (n° 152, *coroll.*); et, d'autre part, les côtés MN, NP, PQ..., seront aussi égaux comme doubles des tangentes égales AM, MB, BN, NC, CP, PD.... Donc le polygone MNPQ... sera régulier.

Scolie.— La construction des polygones réguliers se ramène à la division de la circonférence en parties égales.

N° 233. Remarque *sur les polygones étoilés.* — Au lieu de joindre par des cordes, les points de division *consécutifs*, comme on l'a fait dans le *théorème* x (n° 231) [il y a une observation semblable pour le *théorème* xi (n° 232)], on peut ne joindre ces points que *de deux en deux, de trois en trois*, etc... On obtient ainsi des polygones réguliers *du second ordre, du troisième ordre*... (voyez le n° 225), que l'on comprend sous la dénomination générale de *polygones étoilés*.

Fig. 170 —178. Les *figures* 170 à 178 offrent les exemples les plus simples de ces sortes de polygones.

Fig. 170. Ainsi la *figure* 170 représente le *pentagone du second ordre.* — C'est le plus simple des polygones étoilés, et il n'y a point d'autre pentagone possible après celui du premier ordre.

Fig. 171. La *figure* 171 représente l'*hexagone du second ordre*, si l'on peut appeler ainsi une ligne discontinue qui n'est autre chose qu'un système de deux triangles équilatéraux entrelacés. — C'est du reste le seul hexagone possible après celui du premier ordre.

Fig. 172 et 173. Les *figures* 172, 173, représentent les *heptagones du second* et *du troisième ordre*. — Ce sont les seuls heptagones étoilés possibles.

Fig. 174 et 175. Enfin, les *figures* 174, 175, représentent les *octogones du second* et *du troisième ordre*, les seuls possibles, et dont le premier n'est autre chose qu'un système de deux carrés.

Il est bon d'observer que l'on obtient les polygones réguliers du second ordre en prolongeant les côtés de ceux du premier, puis les polygones du troisième ordre en prolongeant les côtés de ceux du second,.... ; et ainsi de suite (*voyez* le *Mémoire* de M. Poinsot, déjà cité au n° 225).

Fig. 176 — 178. Nous ferons observer encore, que l'on peut, à la rigueur, considérer certains systèmes de *deux* (fig. 176), de *trois* (fig. 177), de *quatre* (fig. 178)... *diamètres*, comme représentant respectivement, le *quadrilatère du second ordre*, l'*hexagone du troisième*, l'*octogone du quatrième*, etc. — On pourrait même, sous ce point de vue, considérer un *diamètre unique* comme un *polygone de deux côtés* qui se confondent.

§ III. — *Problèmes sur les Polygones, et en particulier sur les Polygones Réguliers.*

N° 234. Problème Ier.

Construire un polygone égal à un polygone donné.

Pour résoudre cette question, on décomposera le polygone donné en triangles, ou bien en trapèzes et en triangles (n° 217); ou bien encore, on fixera la position des sommets au moyen de diagonales menées des extrémités d'un côté à tous les autres sommets (n° 223). — Cela fait, la question se réduit à quelqu'un des problèmes des *numéros* 183 — 186, *ou* 212.

On peut encore opérer en menant, par les sommets du polygone donné ABCDE (fig. 179), des droites parallèles et égales entre elles, AA′, BB′, CC′, DD′, EE′ : les extrémités A′, B′, C′, D′, E′, seront les sommets d'un polygone égal au polygone donné. Fig. 179.

On aurait un polygone symétrique du polygone donné, si, au lieu de mener des parallèles égales, AA′, BB′, CC′..., on abaissait des perpendiculaires A*a*, B*b*, C*c*... (fig. 48), sur une droite quelconque MN menée dans le plan du polygone donné, et que l'on prît sur ces perpendiculaires, de l'autre côté de la droite MN, des distances *a*A′=A*a*, *b*B′=B*b*, *c*C′=C*c*, etc. Fig. 48.

N° 235. Problème II. Fig. 169 et 180.

Étant donné un polygone régulier ABCDEF *inscrit à un cercle, circonscrire un polygone régulier du même nombre de côtés.* Fig. 169 et 180.

1re *Construction.* — On mène des tangentes (n° 105) par les sommets A, B, C,... (fig. 169) du polygone donné; et l'on obtient ainsi le polygone demandé MNPQRS. Fig. 169

2e *Constr.* — On prolonge tous les apothèmes jusqu'à leur rencontre avec la circonférence, en T, U, V, X, Y, Z (fig. 180); puis, par ces derniers points, on mène des tangentes. Fig. 180

Scolie. — Dans ces deux constructions (fig. 169 et 180), les points M, N, P.... se trouvent respectivement sur les prolongemens des droites OA, OB, OC....; et de plus, dans la se- Fig. 169 et 180.

Fig. 180. conde, les côtés du polygone cherché sont parallèles, chacun à chacun, aux côtés correspondans du polygone donné, dont ils sont tous également distans.

N° 236. PROBLÈME III. Fig. 169 et 180.

Fig. 169 et 180. *Étant donné un polygone régulier* MNPQRS *circonscrit à un cercle, inscrire un polygone régulier du même nombre de côtés.*

Fig. 169. 1re *Construction* (fig. 169). — En menant des droites AB, BC, CD...., entre les points de tangence consécutifs, on formera le polygone demandé ABCDEF (n° 231).

Fig. 180. 2e *Constr.* (fig. 180). — Par les points A, B, C...., où les rayons OM, ON, OP...., coupent la circonférence, on mènera les droites AB, BC, CD....

Scolie. — Comme *ci-dessus* (n° 235, *scol.*).

N° 237. PROBLÈME IV.

Étant donné un polygone régulier inscrit ou circonscrit à un cercle, inscrire ou circonscrire un polygone régulier d'un nombre de côtés double ou sous-double.

Pour avoir un polygone régulier d'un nombre de côtés double, on partage en deux parties égales chacun des arcs compris entre les points de division consécutifs (n° 131, *scolie*, 1°); et par les nouveaux points de division conjointement avec les anciens, on mène des cordes (n° 231) ou des tangentes (n° 232).

Pour avoir un polygone régulier d'un nombre de côtés sous-double, on prend les points de division seulement de deux en deux. — [Il faut alors évidemment, que le polygone donné soit d'un nombre pair de côtés.]

N° 238. PROBLÈME V.

Recouvrir [s'il est possible] *une portion de surface plane avec des polygones réguliers égaux* [assemblés *trois à trois*, *quatre à quatre*,.... autour d'un sommet commun].

Pour pouvoir satisfaire à la condition énoncée, l'angle du po-

lygone que l'on voudra employer, doit être contenu dans 4 *droits* un nombre de fois entier et au moins égal à 3 : car il est nécessaire de réunir au moins *trois* angles saillans autour d'un même sommet. — Cela posé :

L'angle du triangle régulier vaut $\frac{2}{3}$, nombre qui est contenu 6 fois exactement dans 4 : donc la question sera résolue en assemblant des *triangles* équilatéraux *six à six* (fig. 181). Fig. 181.

La question est évidemment résoluble avec des *carrés* assemblés *quatre à quatre* (fig. 182). Fig. 182.

Elle ne l'est pas avec des pentagones, parce que leur angle, qui vaut $\frac{6}{5}$, n'est pas un sous-multiple de 4 *droits*.

On trouve de même que l'on peut assembler des *hexagones* réguliers *trois à trois* (fig. 183), parce que leur angle vaut $\frac{8}{6}$ ou $\frac{4}{3}$, nombre contenu 3 fois exactement dans 4. Fig. 183.

Au-delà de l'hexagone régulier, il n'y a plus de solution possible, parce que l'angle du polygone surpassant le *tiers* de 4 *droits*, n'y serait plus contenu 3 fois au moins.

Scolie 1er. — Les *trois* sortes de polygones réguliers qui résolvent le problème précédent, jouissent en outre de la propriété suivante.

1° Si un plan est recouvert de *triangles* réguliers égaux (fig. 181), et que l'on joigne deux à deux, par des droites, les centres des triangles contigus, on forme ainsi des *hexagones* réguliers égaux qui recouvrent également le plan. Fig. 181.

2° *Réciproquement*, si un plan est recouvert d'*hexagones* réguliers égaux (fig. 183), et que l'on joigne deux à deux, par des droites, les centres des hexagones contigus, on forme ainsi des *triangles* réguliers égaux qui recouvrent également le plan. Fig. 183.

3° Enfin, en effectuant la même construction sur des *carrés* réunis quatre à quatre autour d'un même point (fig. 182), on produit d'autres *carrés* égaux aux premiers et réunis de la même manière. Fig. 182

En raison de ces propriétés, le triangle régulier et l'hexagone régulier sont dits des polygones réguliers *réciproques* ou *conjugués* l'un de l'autre. — Le carré est réciproque du carré.

Scol. 2. — On peut aussi recouvrir un plan avec des mélanges de diverses sortes de polygones réguliers : par exemple avec des octogones et des carrés (fig. 184), des hexagones et des triangles (fig. 185), des triangles et des dodécagones (fig. 186), etc. — On peut aussi combiner des triangles deux à deux pour en composer des losanges (fig. 187), des carrés deux à deux pour en composer des rectangles (fig. 188). — Etc., etc. Fig. 184 — 188.

CHAPITRE VII.

DES COURBES.

---

§ Ier. — *Généralisation de plusieurs Définitions.* — *Des Élémens des Courbes.* — *De la Convexité.*

N° 239. On nomme Arc *d'une courbe*, en général, toute *portion* continue *de* cette *courbe* (voyez le n° 19), et Corde *d'un arc*, la *droite limitée qui joint les extrémités de cet arc*.

A l'égard de la Flèche, comme tout arc d'une courbe quelconque n'est pas susceptible de se partager en deux moitiés superposables, on nomme ainsi, le *segment de la perpendiculaire élevée sur le milieu d'une corde, compris entre cette corde et l'arc.*

La Sécante, dans les courbes en général, n'est plus une corde prolongée (*voyez* le n° 21) : la sécante est une *droite qui coupe la courbe en* un *point ou en un nombre quelconque de points ;* et pour qu'il y ait réellement *intersection,* il faut que le point commun partage la courbe en deux portions qui soient dirigées, par rapport à la droite, chacune *vers* une région différente du plan (n° 13); ou, en d'autres termes, l'une des portions de la courbe doit être dirigée *d'un côté* de la droite, et l'autre portion de l'autre côté.

Quant à la Tangente, c'est toujours la *limite d'une sécante dont deux points d'intersection avec la courbe se sont réunis en un seul.* — Il résulte de cette définition, que le *point de tangence* peut être en même temps un *point d'intersection,* ou, en d'autres termes, qu'une droite peut toucher et couper la courbe en même temps et au même point, ou enfin, que la droite et la courbe peuvent être, à la fois et au même point, tangentes et sécantes. — Une tangente prolongée peut aussi couper la courbe ailleurs qu'au point de tangence.

Enfin, l'on nomme encore NORMALE à une courbe, la *perpendiculaire menée à la tangente par le point de tangence.* — Ainsi, par exemple,

Dans le cercle, tout rayon est normal à la courbe;

Et réciproquement : — *Toute normale au cercle passe par le centre* (n° 89, *récipr.* 3).

Au reste, tout ce que nous venons de dire sera mieux compris quand nous aurons donné quelques développemens sur la nature des courbes en général.

N° 240. Pour cela, soit un polygone quelconque, que nous regarderons comme une ligne brisée (n° 73), en ne considérant que son contour et faisant abstraction de la portion de plan qu'il circonscrit s'il est fermé. Pour mieux fixer les idées, prenons un *carré* (fig. 189); puis, après avoir, par la pensée, partagé en deux parties égales chacun des côtés de ce carré, disposons-les en *octogone* régulier (fig. 190). Partageons de même les côtés de cet octogone, et formons-en un polygone régulier *de seize côtés* (fig. 191); et ainsi de suite en doublant continuellement le nombre des côtés, dont la longueur devient, à chaque fois, moindre de moitié. Il est clair que, par cette suite indéfinie de subdivisions, les côtés des divers polygones obtenus, finiront par devenir inappréciables; et alors, les apothèmes et les rayons ne différant plus sensiblement, ni de longueur, ni de direction, le polygone lui-même aura pris sensiblement la forme d'une circonférence de cercle.

Fig. 189. Fig. 190. Fig. 191.

Au lieu de former une suite de polygones *isopérimètres*, on peut prendre d'abord un carré inscrit dans un cercle (fig. 192); puis, en partageant en deux parties égales chacun des arcs sous-tendus, considérer l'octogone régulier qui aurait pour sommets, les nouveaux points de subdivision de la circonférence conjointement avec les anciens; et ainsi de suite. On arrive de cette manière à un polygone inscrit qui ne se distingue plus sensiblement du cercle circonscrit. Fig. 192.

Enfin, l'on peut partir encore du carré circonscrit (fig. 193), puis le remplacer par l'octogone également circonscrit, et continuer indéfiniment de la même manière. Fig. 193

On arrive ainsi à cette conséquence, qu'une circonférence de cercle peut être considérée, soit comme la *limite* (*) d'une série de polygones réguliers isopérimètres, soit comme la limite d'une série de polygones réguliers inscrits, soit enfin comme la limite d'une série de polygones réguliers circonscrits, les côtés de ces polygones diminuant indéfiniment de longueur dans les trois cas, tandis que leur nombre augmente indéfiniment. — C'est ce que l'on exprime en disant que

Le cercle est un polygone régulier d'un nombre infini de côtés infiniment petits.

Et par suite, — *La circonférence de cercle est une ligne convexe* (*voyez* les n°s 87 et 226).

Toutes les courbes, sans exception, pouvant évidemment offrir des résultats analogues, il s'ensuit qu'une courbe quelconque peut être assimilée à une ligne brisée, ce qui permet d'admettre que — *Toute ligne courbe est composée d'une infinité de portions de lignes droites infiniment petites.* — Ces petites portions de ligne droite, ou ces côtés infiniment petits de la ligne courbe, se nomment les ÉLÉMENS *de la courbe.*

N° 241. Dans cette manière de voir, la tangente n'est autre chose que la *direction* (n° 8), ou le *prolongement* indéfini dans les deux sens, *d'un élément* de la courbe ; mais il est clair que cette nouvelle manière de considérer la tangente, rentre au fond dans la définition que nous en avons donnée précédemment (n° 21).

Maintenant, de même qu'un polygone est convexe (n° 225) lorsqu'aucun de ses côtés, indéfiniment prolongé, ne peut rencontrer le reste du contour, ou lorsqu'une droite ne peut couper ce contour en plus de deux points, de même aussi une

(*) Observez que ce mot *limite* a déjà été employé plusieurs fois (n°s 1, 21, 142, 205), dans des acceptions différentes en apparence, mais qui peuvent se résumer toutes dans la définition suivante : — On entend par *limite*, en Géométrie, une *figure* ou une *étendue* dont s'approchent indéfiniment des figures ou des étendues comprises dans une même série.

courbe est *convexe* lorsqu'elle ne peut être coupée par aucune de ses tangentes, ou lorsqu'une sécante ne peut la rencontrer en plus de deux points; et elle est *concave* dans le cas contraire. Au reste, comme cette définition ne suppose pas que la courbe soit *fermée*, on conçoit qu'il est toujours possible de partager une courbe quelconque, en portions dont chacune, prise séparément, soit convexe dans toute son étendue.

On voit par là, qu'une courbe *doit* être à la fois *convexe et fermée* comme le cercle, pour que *sa* tangente puisse être définie ainsi : une *droite qui n'a de commun avec la courbe, qu'un seul élément*, ou *un seul point* comme on le dit vulgairement en raison de ce que l'élément, étant *infiniment petit* (n° 240), n'est qu'un point pour les yeux.

Toute courbe convexe ou portion convexe de courbe étant située en entier du même *côté* de la tangente, il en résulte que, réciproquement, la tangente est située en entier du même *côté de la courbe* [en employant ici le mot *côté* dans le sens qu'on lui a déjà attribué au *numéro* 239]. Or, le côté de la courbe dans lequel est située la tangente, se nomme le *côté convexe*, ou le *côté de la convexité;* et le côté opposé est dit le *côté concave*, ou le côté vers lequel la courbe *tourne sa concavité*.

N° 242. La considération des élémens est de la plus grande importance dans la théorie des courbes : car, en conduisant à regarder ces sortes de lignes comme de véritables polygones, elle fait voir que *Toute propriété générale* qui se trouve *démontrée pour une ligne brisée*, indépendamment du nombre, de la grandeur, et des inclinaisons mutuelles de ses côtés, *appartient*, par cela même, *à sa courbe limite*.

Afin de rendre plus sensible l'exactitude de ce principe et la rigueur des conséquences que l'on peut en déduire, nous allons l'appliquer à la démonstration d'une propriété générale des courbes convexes; puis nous montrerons ensuite que l'on peut parvenir aux mêmes conclusions sans avoir recours au partage de la courbe en élémens.

N° 243. THÉORÈME. Fig. 194 et 195.

Fig. 194 et 195. *Une ligne convexe fermée* ABCDA, [*brisée, courbe, ou mixte*], *est moindre qu'une ligne quelconque* PQRSTP [convexe ou concave] *qui l'envelopperait de toutes parts.*

Fig. 194. Pour démontrer cette proposition, supposons d'abord que la ligne enveloppée soit un polygone (fig. 194); et prolongeons tous ses côtés, AB, BC, CD, DA, *dans un même sens* (n° 219, *note*) [comme l'indique la figure], jusqu'à la rencontre de la ligne enveloppante, respectivement en a, b, c, d. — Nous aurons cette suite d'inégalités :

$$\begin{aligned} AB + Ba &< Ad + dP + PQ + Qa, \\ BC + Cb &< Ba + aR + Rb, \\ CD + Dc &< Cb + bS + Sc, \\ DA + Ad &< Dc + cT + Td. \end{aligned}$$

Or, si l'on ajoute toutes ces inégalités membre à membre, et que, dans le résultat, on supprime les parties communes aux deux membres, Ad, Ba, Cb, Dc, en observant d'ailleurs, que

$$\begin{aligned} Qa + aR &= QR, \\ Rb + bS &= RS, \\ Sc + cT &= ST, \\ Td + dP &= TP, \end{aligned}$$

il en résultera

$$AB + BC + CD + DA < PQ + QR + RS + ST + TP,$$

ou simplement $\quad ABCDA < PQRSTP.$

Fig. 195. En second lieu, si la ligne enveloppée est une ligne courbe [ou mixte] ABCD (fig. 195), les côtés du polygone ABCD (fig. 194) se trouveront remplacés [en totalité ou en partie] par les élémens de la courbe; et, en supposant tous ces élémens prolongés dans un même sens suivant leurs tangentes respectives, la démonstration précédente sera applicable à la nouvelle hypothèse. Donc la proposition est vraie dans tous les cas possibles où la ligne enveloppée est convexe.

Faisons voir maintenant que l'on peut parvenir aux mêmes conséquences sans avoir besoin d'assimiler la ligne courbe à une ligne brisée.

Pour cela, supposons que la plus courte de toutes les lignes qui peuvent *enceindre* la portion de plan limitée par la courbe ABCD [portion que nous avons ombrée dans la figure], diffère de cette courbe, et que la ligne PQRST, par exemple, soit réellement la ligne enveloppante la plus courte. Cela posé, par un point quelconque A pris sur la courbe ABCD, menons une tangente MN; elle ne rencontrera ABCD en aucun autre point (n° 241), et coupera PQRST en deux points, M et N, de manière que l'ou aura MN $<$ MPQN; et ainsi, il en résultera MNRSTM $<$ PQRSTP. Il est donc impossible que la ligne PQRST soit la plus courte de toutes celles qui entourent la portion de plan ABCD. Or, comme le même raisonnement est applicable à toutes les lignes qui enveloppent la portion de plan ABCD et qui diffèrent de la courbe ABCD, il en résulte que celle-ci est la plus courte de toutes : *donc*, etc. Fig. 195.

Scolie 1er. — Il est évident que la proposition précédente est applicable au cas (fig. 196) où la ligne enveloppée ABCD et la ligne enveloppante ABCE ont une partie commune ABC, ou des points communs, pourvu que la partie enveloppée ADC soit convexe et tourne sa convexité vers la ligne enveloppante (n° 241). Fig. 196.

On peut aussi supprimer la partie commune ABC, et l'on a alors : AEC $>$ ADC, résultat dont le *corollaire* du *lemme* démontré au *numéro* 80, n'est qu'un cas particulier.

Scol. 2. — La même proposition a lieu, en particulier, pour une circonférence et un polygone inscrit ou circonscrit quelconque (fig. 168 et 169); de sorte que

La circonférence est plus grande que tout polygone inscrit et plus petite que tout polygone circonscrit. Fig. 168 et 169.

[Il est clair d'ailleurs que la différence est d'autant moindre que le polygone se rapproche plus de la circonférence, ou que le nombre de ses côtés est plus multiplié.]

De même — *Une ligne brisée régulière inscrite à un arc terminé aux mêmes extrémités, est plus courte que lui.*

§ II. — *Autres propriétés des Courbes. — Du Cercle Osculateur. — Des Points Singuliers, etc. — De la Continuité.*

N° 244. Bien que ce qui précède contienne toutes les notions essentielles à posséder relativement aux courbes, surtout pour ce qui appartient à la *Géométrie Élémentaire* proprement dite (n° 28), cependant, nous croyons devoir exposer encore quelques-unes de leurs propriétés générales les plus intéressantes, et qui ne supposent d'ailleurs pour être comprises, que la connaissance des théories déjà étudiées.

Fig. 197. Pour cela, soit d'abord une courbe AB (fig. 197). Par un de ses points M, on peut toujours mener une infinité de cercles ayant en ce point, pour tangente commune, la tangente même, ST, de la courbe; d'où il résulte que ces cercles sont eux-mêmes tangens à cette dernière, puisqu'ils ont avec elle un élément commun. Mais, il est bien clair que, parmi ces cercles, il en est un qui se rapproche plus de la courbe, dans les environs du point de contact M, que tous les autres cercles, c'est-à-dire qui tend plus que tous les autres, dans l'étendue d'un petit arc pris de part et d'autre de ce point, à se confondre sensiblement avec elle : or, ce cercle *unique* se nomme le Cercle Osculateur *de la courbe*, au point M; et la considération des élémens va nous fournir le moyen d'en donner une définition plus précise et tout-à-fait géométrique.

A cet effet, rappelons qu'il faut trois points pour déterminer une circonférence de cercle (n° 166, *coroll.* 2); d'où il résulte qu'on peut toujours faire passer une circonférence par trois points donnés [non en ligne droite], et que par conséquent, la circonférence qui approchera plus que toutes les autres de la courbe, dans les environs du point M, sera celle qui aura avec cette courbe, de part et d'autre et infiniment près de ce point, deux autres points communs : c'est-à-dire enfin, qui aura avec la courbe deux élémens consécutifs communs, l'un d'un côté du point M, l'autre de l'autre.

Fig. 198. Cela posé, la construction du cercle osculateur d'une courbe donnée AB (fig. 198), en un point M, se réduit à ce qui suit : — En supposant la courbe décomposée en élémens, soient LM, MN, les deux élémens consécutifs qui doivent appartenir au cercle cherché; par les milieux, *e*, *f*, de ces élémens, élevons des perpendiculaires : elles se rencontrent (n° 143) en un point O : ce point est *le centre du cercle osculateur*, dont les rayons sont les droites OL, OM, ON, ou bien Oe, O*f*, qui n'en diffèrent pas sensiblement.

N° 245. Le cercle osculateur, dont nous venons de donner la construction générale, jouit de plusieurs propriétés aussi importantes que curieuses: nous allons examiner les principales.

Prolongeons d'abord les élémens LM, MN (fig. 198); il en résultera deux tangentes consécutives LT, MU, faisant entre elles un angle *infiniment petit* TMU que l'on nomme l'*angle de contingence*. Or, il est visible que plus cet angle est considérable, plus la courbe s'écarte, au point M, de

sa tangente LM, et par conséquent *plus elle est courbe*. L'angle de contingence est donc propre à évaluer ce que l'on nomme la *courbure* d'une courbe en un point donné; c'est pourquoi on le nomme encore : *angle de courbure*.

De plus, l'angle TMU étant évidemment égal à l'angle eOf, puisqu'ils ont pour supplément commun l'angle LMN (n° 193, *coroll.*), on tire de là un second moyen également propre à apprécier le degré de courbure d'une courbe donnée, moyen qui offre même plus de commodité que le premier, en ramenant cette évaluation à celle de la courbure du cercle osculateur, laquelle est d'autant plus considérable [en un point donné de la courbe] que le rayon du cercle est moindre, ce rayon diminuant évidemment à mesure que l'angle de contingence augmente *et vice versâ*.

De là vient que le cercle osculateur reçoit encore le nom de *cèrcle de courbure*, son centre O, celui de *centre de courbure*, et enfin son rayon, celui de *rayon de courbure*.

N° 246. Maintenant, supposons que l'on effectue, pour tous les points de la courbe AB (fig. 199), la construction que nous avons indiquée ci-dessus (n° 245) pour le point M. Il en résultera une autre courbe PQ, qui sera le *lieu géométrique des centres de courbure* de la courbe AB. De sorte que si, de chacun [O] des points de la courbe PQ, on décrivait, avec le rayon de courbure correspondant [Oe], un petit arc de cercle [eMf], la courbe entière AB pourrait être considérée comme composée de tous ces arcs élémentaires. Or, cette description peut s'exécuter fort simplement par un moyen tout-à-fait *mécanique*, c'est-à-dire par un *mouvement continu*. En effet, admettons que l'on ait tendu le long de la courbe PQ, supposée *solide*, un *fil flexible* et *inextensible* qui s'appuie exactement sur toute l'étendue de son contour, et qui le dépasse seulement, au point P, d'une longueur PA égale au rayon de courbure de la courbe AB, au point A. Il est évident que, dans cette hypothèse, si l'on détache successivement les divers élémens du fil PQ [en commençant au point P] des élémens qu'ils recouvraient respectivement sur la courbe solide PQ, le fil entier restant toujours également tendu, son extrémité A décrira successivement les divers élémens de la courbe AB. Fig. 199.

La courbe PQ est dite, en raison de cette propriété, la *développée* de la courbe AB; et réciproquement, la courbe AB est la *développante* de la courbe PQ. La développée d'un cercle se réduit à un point unique qui est son centre; et la développée d'une courbe quelconque est, par rapport à cette courbe, ce qu'est le centre par rapport au cercle. La développée est, en quelque sorte, un centre mobile correspondant à un rayon variable qui est celui du cercle osculateur; et la développante peut être considérée comme décrite d'une manière analogue à la description du cercle, au moyen de ce centre et de ce rayon qui changeraient ainsi en même temps.

De même qu'un cercle n'a qu'un seul centre, mais qu'un même point peut être le centre de cercles divers : de même aussi une développante n'a qu'une seule développée, tandis qu'une même développée peut produire une

infinité de développantes différentes. Il est clair, en effet, que si l'on prend
Fig. 199. sur le fil APOQ, d'un côté ou de l'autre du point A, une certaine longueur AA' tout-à-fait arbitraire, le mouvement par lequel le point A décrit la courbe AB, suffira pour que le point A' engendre de la même manière une seconde *courbe* A'B' *équidistante* de la première, ou *parallèle* à la première.

Enfin, comme il est facile de le voir,

Les rayons de courbure sont tangens à la développée et normaux à la développante.

N° 247. Examinons maintenant quelques circonstances remarquables que les courbes peuvent présenter dans leur cours.

Et d'abord, observons qu'il n'est pas dans la nature d'une ligne courbe, pas plus que dans celle d'une ligne droite, de s'arrêter brusquement en un point. Ainsi, ou bien la courbe est *rentrante* sur elle-même, comme le cercle; ou bien elle est *indéfinie* dans deux sens, comme la ligne droite (n° 8); ou bien enfin elle se compose de diverses *portions* dont chacune est dans l'un ou dans l'autre de ces deux cas : sans quoi ce ne serait pas une véritable courbe *complète*, mais seulement un *arc* de courbe (n° 239).

Cela posé, rappelons 1° qu'une tangente n'est autre chose qu'une sécante dont deux points d'intersection se confondent (n° 21), et 2° qu'une sécante peut avoir un nombre quelconque de points communs avec la courbe (n° 239).

Fig. 200. — Il s'ensuit qu'au moment où une sécante PQ (fig. 200) devient tangente [ST], *trois* des points primitifs d'intersection, P, A, Q, peuvent se réunir en un seul [A]. Or, tout point A pour lequel cette circonstance a lieu, se nomme un *point d'inflexion*. On voit qu'en ces sortes de points, la tangente coupe la courbe en même temps qu'elle la touche, et qu'ainsi les deux lignes ont deux élémens consécutifs communs au lieu d'un seul. — Ce qui caractérise encore les points d'inflexion, c'est que, si l'on considère les quatre angles droits formés par la tangente ST et la normale MN, les points de la courbe qui avoisinent le point de contact, sont situés dans deux angles opposés. — Enfin, les points d'inflexion peuvent être considérés comme des points dans lesquels la convexité et la concavité passent d'un côté de la courbe à l'autre, ou changent mutuellement de *sens* (voyez le n° 241).

Fig. 201. Il peut arriver que la courbe passe plusieurs fois par le même point, A, B, ou C (fig. 201) : ce point se nomme un *point multiple*. — Il peut y avoir, en un point multiple, ou plusieurs tangentes comme aux points A, B, ou une seule comme aux points C. Le cercle osculateur est, sous ce rapport, dans le même cas que la tangente; mais le nombre des cercles osculateurs différens ne peut être moindre que celui des tangentes différentes.

Fig. 202. Quelquefois, la courbe retourne brusquement sur elle-même après s'être, en apparence, arrêtée en un certain point, A, B, ou C (fig. 202) : ce point se nomme alors un *point de rebroussement*.

Les deux arcs de courbe qui se réunissent en un point de rebroussement, doivent y avoir la même tangente; sans quoi la direction de cette tangente varierait brusquement. Or, on ne doit pas non plus considérer comme

Digitized by Google

complète une courbe qui présenterait cette circonstance (*) : il faudrait prolonger, par la pensée, chacun des deux arcs au-delà du point commun, lequel serait alors un véritable point multiple.

Le *rebroussement* est dit de *première espèce* quand les deux arcs de la courbe sont, l'un d'un côté de la tangente, l'autre de l'autre, comme aux points A, B; il est de *seconde espèce* quand les deux arcs sont du même Fig. 202. côté de la tangente, comme au point C (**). Mais dans tous les cas, ces deux arcs sont situés à la fois du même côté de la normale.

Les points d'inflexion et de rebroussement, ainsi que les points multiples, ont reçu le nom générique de *points singuliers*.

N° 248. On peut considérer les points singuliers comme des points de division naturels de la courbe, en divers segmens que l'on nomme ses *branches*. [Une courbe peut cependant, comme celle qui est marquée A dans la *figure* 202, n'avoir qu'une seule branche, quoique présentant un point de rebroussement.] Chaque branche est nécessairement convexe du même côté dans toute l'étendue de son cours.

On peut distinguer plusieurs sortes de branches de courbes : les unes sont terminées de part et d'autre en deux points singuliers; d'autres branches sont limitées dans un sens par un point singulier, et illimitées dans l'autre [comme le sont, par exemple, les deux segmens d'une ligne droite]; d'autres enfin sont illimitées dans les deux sens (*voyez* le n° 247).

Une branche de courbe, AB (fig. 203), peut être conformée de manière que Fig. 203. les distances de ses divers points à une certaine droite, XZ, comptées sur des perpendiculaires *équidistantes* entre elles, PM, P'M', P''M''..., soient susceptibles de devenir moindres que toute ligne donnée quelque petite que soit celle-ci, mais cependant sans être *jamais* rigoureusement nulles. C'est ce qui arriverait, par exemple, si ces distances pouvaient être représentées par la série des nombres : $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16} \ldots\ldots$ — Lorsqu'une branche de courbe se trouve dans ce cas, de s'approcher indéfiniment d'une droite sans jamais l'atteindre, la courbe et la droite sont dites *asymptotes* l'une de l'autre. — [La même chose peut aussi avoir lieu entre deux courbes.]

Enfin, l'on nomme *spirale* (fig. 204), toute courbe ou branche de courbe Fig. 204. qui, faisant un nombre infini [ou fini] de circonvolutions autour d'un point, s'en rapproche ou s'en éloigne indéfiniment.

(*) La raison en est, d'après la théorie analytique des courbes, que deux valeurs d'une même quantité variable ne peuvent devenir *imaginaires* sans passer par l'égalité.

(**) M. Francœur a proposé les dénominations de *cératoïde* et de *ramphoïde* pour caractériser les courbes qui présentent des points de rebroussement de *première* ou de *seconde* espèce. — *Cératoïde*, κερατοειδὴς, signifie *semblable à une corne*; et *ramphoïde*, ῥαμφοειδὴς, *semblable à un bec d'oiseau*.

N° 249. Nous pouvons maintenant généraliser pour les courbes, comme nous l'avons fait pour les polygones, la notion de la convexité. Or, la manière dont elle a d'abord été définie pour les polygones dans le *numéro* 225, revient à dire, quand il s'agit d'une courbe, que cette courbe n'a, ni point d'inflexion, ni point de rebroussement : telles sont, dans la *figure* 201, les deux courbes marquées de la seule lettre A. [On pourrait même encore, à la rigueur, considérer comme convexe la courbe de la *figure* 202.] Mais dans tous ces cas, il faut distinguer, comme pour les polygones (n° 225), les courbes convexes du premier ordre qui n'ont aucune sorte de points singuliers, des courbes convexes qui ont des points multiples, etc., lesquelles sont alors des courbes convexes d'un ordre supérieur. On voit que dans celles-ci, la tangente peut rencontrer la courbe en d'autres points que le point de contact, et aussi qu'une sécante peut la couper en plus de deux points.

Fig. 201 et 202.

N° 250. Il nous reste, pour terminer ce chapitre et le *Livre premier*, à dire quelques mots de ce que l'on nomme la *loi de continuité*, ainsi que des systèmes composés de courbes ou de segmens de courbes qui n'y satisfont pas.

Pour qu'une courbe ou portion de courbe soit *continue*, il faut que les directions de sa tangente et de sa normale varient par degrés toujours insensibles, ainsi que les valeurs de son rayon de courbure; de sorte qu'entre deux élémens consécutifs, l'angle de contingence, et par suite la différence des deux rayons de courbure correspondans, ne soit nulle part appréciable. Lorsque ces conditions ne sont pas remplies, la courbe est *discontinue*, et ne doit plus être considérée que comme un assemblage d'arcs de courbes différentes.

Deux courbes [ou deux arcs de courbe] qui ont un point commun, sont dites *tangentes* en ce point si elles y ont un élément commun et par conséquent une tangente commune; elles sont simplement *sécantes* dans le cas contraire. Du reste, deux courbes peuvent aussi se couper et se toucher à la fois en un nombre quelconque de points. — L'*angle de deux courbes*, en un point commun, est celui que font leurs tangentes en ce point; et cet angle est nul quand les courbes se touchent mutuellement.

Les arts, et particulièrement l'*Architecture*, présentent de nombreuses applications des lignes discontinues. Nous donnerons comme exemples, la *rosace* (fig. 205) et l'*ogive* (fig. 206), également composées d'arcs de cercles qui se coupent; le *talon* (fig. 207) et la *doucine* (fig. 208), composés d'arcs de cercles tangens; et généralement les *profils* de toutes les sortes de *moulures*. Nous citerons encore les courbes en *ovales*, composées de *quatre* arcs de cercle tangens, AB, BC, CD, DA (fig. 209), et ordinairement nommées *anses de paniers*. Il est bien clair que cette sorte de courbe [de même que les précédentes], est discontinue, puisque, ses rayons de courbure n'étant autre chose que les rayons des arcs AB, BC, CD, DA, qui la composent, il en résulte que la courbure est constante pour toute l'étendue de chacun de ces arcs, et varie brusquement aux points de *raccordement* A, B, C, D.

Fig. 205 — 209.

FIN DU LIVRE PREMIER.

LIVRE DEUXIÈME.

DE L'ÉTENDUE CONSIDÉRÉE DANS UN PLAN.

CHAPITRE PREMIER.

DE LA SIMILITUDE.

§ Ier. — *Caractères et Propriétés des Figures Semblables.*

N° 251. Il n'est personne qui n'ait une idée de la *similitude* ou de la *ressemblance :* ainsi, par les mots *figures semblables,* tout le monde entend sur le champ, deux figures dont l'une est *en petit* ce que l'autre est *en grand;* c'est-à-dire, deux figures telles, qu'il n'est aucun point de l'une qui n'ait son *correspondant,* ou comme on s'exprime en *Géométrie,* son *homologue*, dans l'autre; de sorte que si, par la pensée, on mène, de toutes les manières possibles, des droites qui lient deux à deux tous les points de la première figure, puis, que l'on exécute la même opération pour la seconde figure, les rapports numériques de chaque couple de lignes homologues soient tous égaux entre eux. [Ce rapport constant se nomme le *rapport de similitude* des deux figures.]

Or, comme la théorie suivante le fera voir, toutes ces conditions, qui paraissent être en nombre infini, se réduisent cependant en définitive, à un petit nombre de conditions réellement différentes. On conçoit en effet que la détermination complète d'une figure *d'une espèce donnée,* se ramenant tou-

jours [ainsi qu'on l'a vu pour les polygones (*liv.* 1, *chap.* VI)] à la détermination de certaines *lignes principales* desquelles dépendent toutes les autres, il doit en résulter que le nombre des rapports dont il est nécessaire d'établir l'égalité, n'est autre que le nombre même de ces lignes principales.

D'après cette considération, et vu l'impossibilité de s'assurer directement si toutes les lignes correspondantes de deux figures, sont proportionnelles, on adopte d'abord une *définition géométrique* restreinte et purement *conventionnelle*, qui ne porte que sur les élémens nécessaires à la détermination de chaque figure, et cela, d'abord pour les *triangles*, ensuite pour les *polygones quelconques*, sauf à montrer plus tard que les figures qui satisfont à cette définition, sont *semblables* dans le sens général indiqué plus haut.

N° 252. Cela posé, un triangle étant déterminé par ses trois côtés, il s'ensuit que

Fig. 210 et 211. *Deux triangles*, ABC, A'B'C' (fig. 210 et 211), *sont semblables lorsqu'ils ont les côtés proportionnels*,

C'est-à-dire lorsqu'on a

$$AB : A'B' :: BC : B'C' :: CA : C'A'.$$

N° 253. Ensuite, tous les polygones étant décomposables en triangles ; et de plus, un polygone étant déterminé quand on connaît un assemblage de triangles qui le composent, il s'ensuit que

Fig. 212 et 213. *Deux polygones* (fig. 212 et 213) *sont semblables lorsqu'ils peuvent se décomposer* [d'une manière quelconque (n° 217)] *en un même nombre de triangles semblables* (n° 252) *chacun à chacun et assemblés de la même manière.*

Telle est la définition géométrique des polygones semblables, réduite aux seules conditions strictement nécessaires ; et il s'ensuit que la théorie de la similitude des figures planes quelconques se ramène entièrement et dans tous les cas possibles, à celle des triangles semblables.

N° 254. Nous avons défini plus haut (n° 251) les *points homologues*, en nous contentant de dire que l'on nommait ainsi les points *correspondans*; et cette définition est suffisamment intelligible. Cependant, pour mettre plus de rigueur dans nos expressions, nous devons donner aussi une définition géométrique (n° 251) de cette sorte de points.

Maintenant donc, nous nommerons POINTS HOMOLOGUES, dans les plans respectifs de deux polygones semblables, tels que ABCDE, A'B'C'D'E' (fig. 214): Fig. 214.

1° Les sommets *correspondans*, c'est-à-dire les intersections des côtés proportionnels;

2° Les points, tels que M et M', qui partagent en parties [directement] proportionnelles, deux côtés proportionnels, AB et A'B', de sorte que l'on ait

$$AM : A'M' :: MB : M'B';$$

3° Les points, tels que O et O', liés à des côtés proportionnels par des triangles semblables [et semblablement disposés], de sorte que l'on ait

$$OD : O'D' :: OE : O'E' :: DE : D'E'.$$

[Cette troisième espèce de points homologues comprend les deux premières comme cas particuliers].

On nomme LIGNES HOMOLOGUES, les côtés correspondans [ou proportionnels], les diagonales correspondantes, et généralement des droites quelconques, telles que MO et M'O', qui lient entre eux des points homologues.

N° 255. Il est facile de conclure des principes établis ci-dessus, que l'égalité des polygones n'est qu'un cas particulier de leur similitude; et cette proposition sera prouvée généralement si on peut la démontrer pour deux triangles. Or, en reprenant la relation, posée plus haut (n° 252, fig. 210 et 211), Fig. 210 et 211.

$$AB : A'B' :: BC : B'C' :: CA : C'A',$$

si l'on y fait $AB = A'B'$, on en tire aussi

$$BC = B'C', \quad CA = C'A';$$

Fig. 210 et 211. donc alors les deux triangles ABC, A'B'C', sont égaux comme ayant les côtés égaux chacun à chacun (n° 169).

Ainsi — *Deux triangles*, — et par suite — *Deux polygones semblables, sont égaux lorsqu'ils ont une ligne homologue égale.*

N° 256. On peut établir également [au moyen de la théorie des proportions] que

Deux figures semblables à une troisième sont semblables entre elles ;

Et il suffit encore de démontrer cette proposition pour les triangles, ce qui est facile : car si l'on désigne par ABC, A'B'C', A"B"C", trois triangles tels que l'on ait à la fois les relations

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CA}{C'A'}$$

et

$$\frac{AB}{A''B''}=\frac{BC}{B''C''}=\frac{CA}{C''A''},$$

on en conclut, en divisant membre à membre,

$$\frac{A'B'}{A''B''}=\frac{B'C'}{B''C''}=\frac{C'A'}{C''A''}.$$

Fig. 210 et 211. N° 257. Enfin, de même qu'il y a pour les figures planes, deux modes de superposition possibles (n° 43), de même aussi l'on distingue deux sortes de similitude qui y correspondent : la *similitude directe* (fig. 210) et la *similitude inverse* (fig. 211). La première a lieu lorsque les côtés homologues sont disposés dans le *même ordre*, et la seconde lorsqu'ils sont disposés dans un *ordre inverse*. On peut distinguer facilement ces deux sortes de similitude en supposant que les côtés homologues deviennent égaux chacun à chacun : car alors les deux figures proposées sont *directement semblables* ou *inversement semblables*, suivant qu'elles se trouvent, par suite de cette hypothèse, directement ou inversement superposables.

Lorsque deux figures sont directement semblables et qu'on retourne l'une des deux, elles deviennent inversement semblables ; et *réciproquement*. Du reste, entre la similitude directe et la similitude inverse il n'y a, pour les figures planes, de différence que dans la position ; d'où l'on peut conclure les principes suivans :

1° *Deux figures inversement semblables sont directement semblables à leurs symétriques réciproques ;*

2° *Deux figures inversement semblables sont symétriques lorsqu'elles ont une ligne homologue égale ;*

Et enfin — 3° *Deux figures inversement semblables à une troisième sont directement semblables entre elles.*

N° 258. LEMME I. Fig. 215.

Lorsque deux droites quelconques, MN, M'N', *sont coupées* Fig. 215.
par un nombre quelconque de parallèles, AA', BB', CC', DD'..., *si les segmens de l'une sont égaux entre eux, les segmens de l'autre sont aussi égaux entre eux.*

Pour le prouver, menons à M'N' les parallèles AI, BK, CL..., terminées respectivement sur les droites BB', CC', DD'.... Les triangles ABI, BCK...., seront égaux (n° 172) comme ayant un côté égal, AB = BC...., adjacent à des angles égaux chacun à chacun, BAI = CBK...., et ABI = BCK.... : donc AI = BK...., et par suite A'B' = B'C'.... *etc.* (n° 196).

N° 259. LEMME II. Fig. 216.

Les segmens de deux droites quelconques, MN, M'N', Fig. 216.
compris entre trois parallèles, AA', BB', CC', *sont directement proportionnels* [c'est-à-dire que l'on a : AB:BC::A'B':B'C'].

Supposons, par exemple, AB > BC; et, dans cette hypothèse, admettons, pour fixer les idées, qu'en portant BC le long de AB autant de fois qu'il est possible, de A vers B, on trouve que BC est contenu dans AB, une première fois de A en D, puis une seconde fois de D en E, avec un reste EB moindre que BC. Cela posé, menons, par les points D, E, les droites DD', EE', parallèles à AA', et terminées à la droite M'N'. Il est bien clair, d'après le *premier lemme* démontré (n° *précédent*), que A'D', D'E', seront égaux à B'C', et E'B' moindre que B'C'; et que par conséquent. A'B' contiendra autant de fois B'C', en nombre entier, que AB contient BC.

On prouverait de même, en portant le reste EB sur BC, et menant des parallèles, que BC contient EB autant de fois, en nombre entier, que B'C' contient E'B'; ....*et ainsi de suite.*

Maintenant, l'opération que nous venons d'indiquer sur les lignes AB et BC, n'est évidemment autre que l'opération à effectuer pour trouver leur rapport (n° 63 et *suiv.*); et l'opéra-

Fig. 216. tion toute pareille exécutée sur A'B' et B'C' au moyen des parallèles DD', EE', etc., n'est aussi que la détermination de leur rapport. Or, puisque les quotiens successifs obtenus de part et d'autre sont continuellement les mêmes [que leur nombre soit limité ou qu'il soit illimité], on doit en conclure que les deux rapports sont nécessairement identiques (n° 66), c'est-à-dire que l'on a toujours AB : BC :: A'B' : B'C'; *C. Q. F. D.*

N. B.—Attendu—1° que *trois* des quatre termes de la proportion précédente peuvent être pris tout-à-fait arbitrairement,—2° que ces trois termes, que nous supposerons être les trois premiers, déterminent complètement *les deux premières* des trois droites AA', BB', CC', et seulement *un point* C *de la troisième*,—et enfin 3° qu'aucune condition n'assujettit les deux droites AA', BB', à être parallèles :—il s'ensuit, à l'inverse, que le partage de deux droites MN, M'N', par trois autres AA', BB', CC', en segmens proportionnels, n'entraîne nullement le parallélisme de celles-ci.

Mais on peut supposer que les trois segmens donnés soient tels que deux de ces trois droites soient parallèles; et de cette hypothèse résulte la *réciproque* suivante :

Fig. 217. *Réciproquement :* — Si l'on a la proportion (fig. 217)

AB : BC :: A'B' : B'C',

et que deux des trois droites AA', BB', CC', soient parallèles, si par exemple AA' est parallèle à BB', la troisième CC' sera parallèle aux deux autres.

Car si CC' n'est pas parallèle aux deux droites AA', BB', alors par le point C, menons-leur la parallèle C*c*, terminée en *c* sur M'N' : nous aurons AB : BC :: A'B' : B'*c* ;

d'où [en comparant avec la proportion hypothétique] nous tirerons : A'B' : B'C' :: A'B' : B'*c*,

et par suite B'*c* = B'C'; *Ce qui est contraire à l'hypothèse.*

On démontrerait à peu près de même, que la proportion supposée et le parallélisme des deux droites AA', CC', entraînent celui de la troisième droite BB' avec les deux premières, etc.

—Au surplus, cette réciproque n'est qu'une application du principe posé dans le *numéro* 49.

Scolie 1er. — Les *deux* lemmes précédens sont vrais quelle que soit la position du point de concours des deux droites MN, M'N' (fig. 218), par rapport aux trois autres, en dedans ou en dehors des deux bandes, ou même sur l'une des trois parallèles, hypothèse qui réduit, en réalité, le nombre de celles-ci à *deux* seulement (*); et ces mêmes propositions seraient encore vraies quand bien même les droites MN, M'N', seraient parallèles. — Il en est de même de la réciproque, en observant toutefois, que si les deux droites MN, M N', se coupent sur l'une des trois autres, par exemple sur AA', la proportion seule entraîne le parallélisme des deux droites BB', CC', quelle que soit d'ailleurs la direction de AA'. Fig. 218.

Scol. 2. — On sait d'après l'*Arithmétique*, que les termes de la proportion démontrée au *lemme* II, sont toujours susceptibles de *huit* dispositions différentes dans lesquelles la proportionnalité ne cesse pas d'avoir lieu; et nous insisterons ici sur ce point, que *les quatre segmens* qui composent les quatre termes de ces diverses proportions, ***doivent*** toujours y *être* placés ***dans le même ordre, et par rapport aux deux droites auxquelles ils appartiennent, et par rapport aux parallèles*** entre lesquelles ils sont compris : ou bien, ce qui revient au même, que *les deux moyens* d'une part, et *les deux extrêmes* de l'autre, ne doivent jamais être, ni segmens d'une même droite, ni limités par les mêmes parallèles (**).

(*) On recommande spécialement aux élèves ce cas particulier.

(**) Nous rappellerons de plus, que, d'après l'*Arithmétique*, un antécédent et son conséquent peuvent être remplacés à la fois et respectivement, par la somme ou la différence des antécédens et par la somme ou la différence des conséquens ; que de même, la somme ou la différence des deux premiers termes et la somme ou la différence des deux derniers, peuvent remplacer à la fois, soit les deux antécédens, soit les deux conséquens, etc., etc... : en observant encore, conformément au *scolie* 2e, que chaque proportion résultante est toujours susceptible de *huit* permutations différentes.

Fig. 216. Corollaire 1er. — *Deux droites quelconques, rencontrées par un nombre quelconque de parallèles,* AA′, BB′, CC′, DD′, EE′... (fig. 216), *sont toujours coupées proportionnellement* par ces dernières, c'est-à-dire que l'on a

AD : A′D′ :: DE : D′E′ :: EB : E′B′ :: BC : B′C′... etc.

Fig. 219. Coroll. 2. — *Toute droite* B′C′ (fig. 219) *menée dans le plan d'un triangle* ABC *parallèlement à l'un des côtés* BC [pourvu qu'elle ne passe pas par le sommet opposé A], *partage les deux autres proportionnellement,* c'est-à-dire que l'on a

AB′ : B′B :: AC′ : C′C;

Et *Réciproquement :* — Si la droite B′C′ est menée dans le plan du triangle ABC de telle manière que l'on ait cette proportion, la droite B′C′ est parallèle à BC.

D'après le *scolie* 1er, ces propositions ont évidemment lieu quelle que soit la position de la droite B′C′ en dedans ou en dehors du triangle.

N° 260. Théorème I. Fig. 220.

Fig. 220. *Toute droite* B′C′ *menée dans le plan d'un triangle* ABC *parallèlement à l'un des côtés* BC [pourvu qu'elle ne passe pas par le sommet opposé A], *détermine un second triangle* AB′C′ *semblable au premier,* de sorte que l'on a

AB : AB′ :: AC : AC′ :: BC : B′C′.

En effet, on a d'abord (n° 259, *coroll.* 2) :

AB : AB′ :: AC : AC′.

Ensuite, si l'on mène B′D parallèle à AC, on aura encore

AB : AB′ :: BC : DC

ou AB : AB′ :: BC : B′C′ (n° 196) : *donc,* etc.

N. B. — La proposition a toujours lieu quelle que soit la position de la droite B′C′ dans le plan du triangle ABC.

Corollaire. — *Les portions de deux parallèles,* AD, A'D', (fig. 221), *interceptées entre un nombre quelconque de droites* PA, PB, PC, PD.... *menées par un même point* P, *sont proportionnelles.* Fig. 221.

En effet, en considérant les divers couples de triangles semblables qui ont leur sommet commun au point P, on a :

1° PA : PA' :: AB : A'B' :: PB : PB',
2° PB : PB' :: BC : B'C' :: PC : PC',
3° PC : PC' :: CD : C'D' :: PD : PD',
4° ....etc.

Or, tous ces rapports sont égaux puisque le dernier de chaque ligne est identique avec le premier de la ligne suivante : donc, si l'on ne considère que ceux qui composent la colonne du milieu, on pourra conclure :

AB : A'B' :: BC : B'C' :: CD : C'D', etc. ;

Ce qui démontre la proposition.

N. B. — Le point P peut être également situé en dedans ou en dehors des deux parallèles.

Scolie. — *Les droites menées comme on voudra du sommet d'un triangle à la base, divisent proportionnellement cette base et ses parallèles, et en sont elles-mêmes divisées proportionnellement.*

N° 261. Théorème II. Fig. 222.

Deux triangles semblables, ABC, A'B'C', *sont équiangles entre eux.* Fig. 222.

Soit AB > A'B'. — Prenons sur AB une longueur AB" égale à A'B'; et par le point B" menons B"C" parallèle à BC : le triangle AB"C" ainsi formé sera semblable à ABC (n° 260).

Mais celui-ci est, par hypothèse, semblable à A'B'C' : donc les deux triangles AB"C" et A'B'C' sont semblables (n° 256); et de plus, ils sont égaux puisque AB" = A'B', (n°s 255).

Fig. 222. Or, il est visible que les triangles ABC et AB″C″ sont équiangles entre eux (n° 140) : donc ABC et A′B′C′ sont aussi équiangles entre eux; et par conséquent

$$A = A' \mid B = B' \mid C = C'.$$

Scolie 1er. — *Dans deux triangles semblables, aux côtés homologues sont opposés des angles égaux.*

Scol. 2. — Les 3 angles ne suffisent pas pour déterminer un triangle (*voyez* le n° 174).

N° 262. Théorème III. Fig. 222.

Deux triangles, ABC, A′B′C′, *équiangles entre eux, sont semblables.*

Répétons la même construction : il en résultera deux triangles ABC, AB″C″, semblables et par conséquent équiangles entre eux (*voyez* le n° 261).

Mais déjà ABC et A′B′C′ sont équiangles entre eux par hypothèse : donc aussi AB″C″ et A′B′C′ sont équiangles entre eux. De plus AB″ = A′B′ : donc les deux derniers triangles sont égaux comme ayant un côté égal adjacent à des angles égaux chacun à chacun (n° 172).

Donc les triangles ABC et A′B′C′ sont semblables.

Corollaire 1er. — *Deux triangles sont semblables lorsqu'ils ont deux angles égaux chacun à chacun* (voyez le n° 163).

Coroll. 2. — *Deux triangles rectangles sont semblables lorsqu'ils ont un angle aigu égal.*

Coroll. 3.—*Deux triangles isocèles sont semblables lorsque leurs angles à la base,* ou *lorsque leurs angles au sommet, sont égaux.*

N° 263. Théorème IV. Fig. 222.

Deux triangles, ABC, A′B′C′, *sont semblables lorsqu'ils ont un angle égal*, $A = A'$, *compris entre des côtés proportionnels,* de sorte que l'on ait AB : A′B′ :: AC : A′C′.

La même construction donnera les deux triangles sembla- Fig. 222.
bles ABC, AB″C″, pour lesquels on a

$$AB : AB'' :: AC : AC''.$$

Or, de la proportion hypothétique combinée avec cette dernière, on tire :

$$A'B' : AB'' :: A'C' : AC'';$$

et comme, par construction, $A'B' = AB''$, il en résulte aussi

$$A'C' = AC'' :$$

donc les deux triangles A′B′C′ et AB″C″ sont égaux comme ayant un angle égal compris entre des côtés égaux chacun à chacun (n° 170).

Donc ABC et A′B′C′ sont semblables.

N° 264. Théorème V. Fig. 222.

Deux triangles, ABC, A′B′C′, *sont semblables lorsque deux côtés de l'un sont proportionnels à deux côtés de l'autre* [AB : A′B′ :: BC : B′C′], *et que, des angles respectivement opposés à ces côtés, deux sont égaux* [A = A′], *et les deux autres*, B, B′, *de même espèce* (voyez le n° 173).

Répétons encore la même construction : nous aurons deux triangles semblables ABC, AB″C″, qui donneront

$$AB : AB'' :: BC : B''C'',$$

et dans lesquels les angles B, B″, seront de même espèce.

Or, de cette proportion comparée à la proportion hypothétique, il résulte que $B'C' = B''C''$; et comme d'ailleurs les angles B′, B″, sont de même espèce, il s'ensuit que les deux triangles A′B′C′, AB″C″, sont égaux (n° 173).

Donc ABC et A′B′C′ sont semblables.

N° 265. Théorème VI.

Deux triangles sont semblables lorsque les côtés de l'un sont parallèles [ou *perpendiculaires*] *aux côtés de l'autre, chacun à chacun.*

Désignons par ABC, A′B′C′, les deux triangles dont on suppose les côtés parallèles [*ou* perpendiculaires] entre eux chacun à chacun. — Cela posé :

Pour démontrer la proposition, observons — 1° que d'après l'hypothèse, les angles correspondans des deux triangles, doivent être nécessairement, chacun à chacun, ou égaux ou supplémentaires (n° 144 *ou* 145); — et 2° que la similitude des deux triangles sera démontrée (n° 163; *et* 262, *coroll.* 1er) si l'on prouve seulement qu'ils ont au moins deux angles égaux chacun à chacun.

Or, on ne peut admettre que les *six* angles soient supplémentaires deux à deux : car alors on aurait

$$A + A' + B + B' + C + C' = 6 \text{ droits};$$

Ce qui est absurde (n° 163).

On ne peut admettre non plus que *quatre* angles seulement, par exemple A, A', B, B', soient supplémentaires deux à deux : car on aurait de même

$$A + A' + B + B' = 4 \text{ droits};$$

Ce qui est également *absurde.*

Il faut donc que deux angles au moins, de chaque triangle, soient égaux à deux angles de l'autre, chacun à chacun ;

C. Q. F. D.

Scolie 1er. — *Les côtés homologues sont les côtés parallèles* ou *perpendiculaires.*

Scol. 2. — Ce théorème n'est qu'un cas particulier d'une proposition beaucoup plus générale, analogue à celle que nous avons indiquée pour les angles dans le *numéro* 146. On conçoit en effet que si deux triangles situés dans un plan, sont semblables, et que l'on fasse pivoter l'un des deux autour d'un de ses sommets ou autour d'un point quelconque de son plan, il ne cessera pas, dans les diverses positions qu'il prendra ainsi, d'être semblable au second triangle (*voyez* le n° 146).

N° 266. Théorème VII. Fig. 212 et 213.

Fig. 212 et 213. *Deux polygones semblables ont les côtés proportionnels et les angles égaux, chacun à chacun, et disposés dans le même ordre.*

En effet : — 1° Les côtés correspondans des deux polygones ne sont autre chose que les côtés homologues des triangles semblables dont les deux polygones sont composés d'après leur

définition (n° 253) ; d'où il résulte que ces côtés, pris deux à deux, forment une suite de rapports égaux. Fig. 212 et 213.

2° Les angles correspondans des deux polygones ne sont aussi que des angles homologues ou des sommes d'angles homologues de triangles semblables ; d'où il résulte que ces angles sont égaux.

N. B. — Cette démonstration ne suppose pas que les triangles dans lesquels les polygones sont décomposés, aient, dans chaque polygone, un sommet commun : il est facile de voir qu'elle s'applique également à toute autre décomposition.

N° 267. Théorème VIII. Fig. 212.

Réciproquement : — *Deux polygones sont semblables lorsque leurs côtés, pris dans le même ordre, sont proportionnels et comprennent entre eux des angles égaux chacun à chacun.* Fig. 212.

Par les sommets A et A', par exemple, menons des diagonales. Nous aurons d'abord deux triangles, ABC, A'B'C', semblables entre eux comme ayant un angle égal, B = B', compris entre des côtés proportionnels (n° 263).

De là il résulte que le rapport des diagonales AC, A'C', est le même que celui des côtés correspondans, et que les angles ACD, A'C'D', sont égaux comme différences d'angles égaux chacun à chacun.

Par suite, les triangles ACD, A'C'D', sont aussi semblables comme ayant un angle égal, ACD = A'C'D', compris entre des côtés proportionnels.

Et ainsi de tous les triangles formés autour du point A.

Donc les deux polygones sont semblables (n° 253).

Corollaire. — *Deux polygones sont semblables lorsque leurs côtés, pris dans le même ordre, sont proportionnels, parallèles, et dirigés dans le même sens ou en sens contraire, chacun à chacun :*

Car alors ils ont en même temps les angles égaux.

N° 268. Remarque *sur la proportionnalité des lignes homologues.* — On peut démontrer, par des raisonnemens analogues à ceux que l'on a employés pour la démonstration du *théorème* VII (n° 266), que

Les lignes homologues de deux polygones semblables sont proportionnelles aux côtés homologues, font avec les côtés homologues des angles égaux, et partagent les polygones proposés en d'autres polygones semblables; — et réciproquement, etc.

Ainsi, par exemple,

Les rayons et les apothèmes des polygones réguliers de même espèce [c'est-à-dire d'un même nombre de côtés], *sont proportionnels à leurs côtés.*

De même,

Les hauteurs correspondantes de deux triangles semblables sont proportionnelles à leurs côtés homologues.

De même encore [par la propriété des *rapports égaux* (voyez l'*Arithmétique*)],

Les périmètres de deux polygones semblables sont proportionnels à leurs côtés homologues [et plus généralement à leurs lignes homologues].

Et par suite — *Les périmètres de deux polygones réguliers de même espèce, sont proportionnels à leurs côtés, à leurs rayons, et à leurs apothèmes.*

Enfin, il résulte de la remarque générale qui précède, que les triangles et les polygones qui satisfont aux conditions strictement nécessaires de la similitude, ou à sa *définition géométrique,* sont semblables dans toute l'étendue du sens vulgaire de ce mot (*voyez* le n° 251).

N° 269. Remarque *sur le nombre des conditions essentiellement nécessaires à la similitude.* — La réciproque démontrée au *numéro* 267 contient trop de conditions, puisqu'il suffit généralement de $(2n-3)$ données pour déterminer un polygone (n° 223).

Ainsi — *Deux polygones de* n *côtés sont semblables lorsqu'ils ont* (n — 1) *côtés consécutifs proportionnels et également inclinés entre eux,...* ou bien... (n — 2) *côtés consécutifs proportionnels et également inclinés entre eux ainsi qu'avec les deux autres côtés,...* etc.

Si de plus, les polygones sont *d'une espèce donnée*, il résulte de ce qui a été dit au *numéro* 251, que le nombre des conditions de la similitude se trouvera encore réduit à un moindre nombre.

Par exemple, un parallélogramme étant déterminé par deux côtés et une diagonale [ou par deux côtés et l'angle compris, etc. (*voyez* les nos 194 et *suiv.*)], il s'ensuit que

Deux parallélogrammes sont semblables lorsque deux côtés consécutifs et une diagonale de l'un sont proportionnels à deux côtés consécutifs et une diagonale de l'autre [ou *lorsqu'ils ont un angle égal compris entre des côtés proportionnels,* etc.].

De même, un rectangle étant déterminé par deux côtés consécutifs, il s'ensuit que

Deux rectangles sont semblables lorsque leurs bases sont proportionnelles à leurs hauteurs (n° 200).

De même encore — *Deux losanges sont semblables lorsqu'un côté et une diagonale de l'un sont proportionnels à un côté et une diagonale de l'autre.* — Etc., etc......

Par suite, si la détermination des figures d'une espèce donnée n'exige qu'une seule ligne, toutes les figures de cette espèce seront semblables, sans qu'il soit pour cela nécessaire d'établir d'autre condition.

Ainsi, le côté d'un carré suffisant à sa détermination,

Tous les carrés sont semblables.

De même, — *Tous les polygones réguliers de même espèce* (n° 268) *sont* des figures *semblables* [dont les *centres* sont des points homologues, dont les *rayons* et les *apothèmes* sont des lignes homologues, etc.]

Mais — *Deux lignes brisées régulières du même nombre de côtés sont semblables* seulement *lorsque leurs angles sont les mêmes;* — et alors — *Les secteurs polygonaux réguliers correspondans sont* aussi *semblables.* — Etc., etc....

Toutes les courbes pouvant être traitées (n° 240) comme des polygones, ce que l'on vient de dire leur est également applicable.

Fig. 223. Ainsi, — *Deux courbes de même espèce* (fig. 223) *sont semblables lorsque les lignes principales* [AB, CD, et A'B', C'D', par exemple] *d'où dépend leur construction* [lignes que l'on nomme pour cela, les *paramètres* de la courbe] *sont proportionnelles*;

Et les figures sont nécessairement semblables, sans autre condition, si le nombre de ces lignes principales se réduit à *un*, comme cela arrive pour le cercle [figure qui n'a d'autre paramètre que son rayon]; — en d'autres termes:

Le rayon d'un cercle suffisant à sa détermination, il s'ensuit que

Tous les cercles sont semblables.

On voit donc, en résumant ce qui vient d'être dit, que, si le rapport de similitude de deux figures d'une espèce donnée était une condition imposée d'avance, c'est-à-dire si les lignes de l'une des deux figures devaient être *deux* fois, *trois* fois.... aussi grandes que leurs homologues dans l'autre, le nombre des conditions de similitude serait précisément égal à celui des lignes principales relatives au genre de figures dont il s'agit. Mais, s'il faut simplement que les deux figures soient semblables, *le rapport de similitude* n'étant pas donné et *restant arbitraire*: alors, le nombre des conditions est égal au nombre de ces lignes, *moins un*.

N° 270. *Remarque sur les Centres de Similitude.*—Deux polygones *directement* semblables peuvent être situés sur un même plan de manière à avoir leurs côtés homologues parallèles; et alors, les angles homologues ont les côtés dirigés, ou dans le même sens chacun à chacun comme dans les polygones ABCDE, *abcde* (fig. 224), ou en sens contraire comme dans les polygones ABCDE, A'B'C'D'E'. — Suivant que le premier cas a lieu ou le second, les polygones sont dits *semblablement situés* ou *inversement situés*.

Fig. 224.

Lorsque deux polygones [directement] *semblables sont semblablement* ou *inversement situés*, il est facile de démontrer que *les droites qui joignent les sommets homologues* pris deux à deux, *concourent toutes en un même point* [S]. Ce point, que l'on nomme *centre de similitude*, est dit *externe* dans le premier cas, en raison de ce qu'il est situé *en dehors* sur le prolongement de la droite qui lie chaque couple de points homologues; il est dit *interne* dans le second cas, parce qu'il est situé *entre* les points homologues. Il faut bien observer qu'un centre de similitude interne peut être *hors* des deux polygones, *et vice versâ* qu'un centre de similitude externe pourrait être *en dedans* de l'un et de l'autre.

Dans le cas où les deux polygones sont égaux, leur centre de similitude est situé à l'infini s'il est externe; et s'il est interne il se trouve au milieu de chacune des droites qui lient deux à deux les sommets homologues. Dans certains cas, et particulièrement lorsque les polygones sont réguliers et d'un nombre *pair* de côtés, ils peuvent être disposés de manière à avoir à la fois un centre de similitude externe et un centre de similitude interne.

Les centres de similitude jouissent [exclusivement] de la propriété d'être des points homologues communs aux deux polygones. Ainsi leurs distances aux points homologues sont proportionnelles aux côtés homologues.—Ces distances se nomment des *rayons de similitude*.

Toute droite passant par un centre de similitude de deux polygones, est une ligne homologue commune aux deux polygones, et fait des angles égaux avec deux droites homologues quelconques. — *Réciproquement*, toute droite homologue commune passe par le centre de similitude (*).

N° 271. Deux cercles O,O' (fig. 225), tracés dans un plan, ont, ainsi Fig. 225.
que deux polygones réguliers d'un même nombre *pair* (n° 270) de côtés parallèles chacun à chacun (n° 270), *deux* centres de similitude S, *s*, lesquels sont situés sur la ligne des centres de figure, et à des distances de ces centres, proportionnelles aux rayons.

Les rayons de similitude sont proportionnels aux rayons des deux cercles, aboutissent aux extrémités des rayons parallèles, OA, O'A' ou O'*a*, font des angles égaux avec les tangentes menées par ces extrémités, partagent les deux circonférences en arcs proportionnels aux rayons et par conséquent semblables (n°s 251 et 269); etc., etc.

Lorsque les deux cercles sont extérieurs l'un à l'autre, comme dans la *figure* 225, ils ont *quatre* tangentes communes : le point d'intersection des tangentes extérieures est le centre de similitude externe [S]; et le point d'intersection des tangentes intérieures est le centre de similitude interne [*s*].

Lorsque les deux cercles se touchent extérieurement, leur point de contact est le centre de similitude interne; il est le centre de similitude externe quand les deux cercles se touchent intérieurement.

(*) La proposition énoncée ci-dessus peut être généralisée de la manière suivante :

Lorsque deux polygones [directement] *semblables sont placés d'une manière quelconque dans un plan, ils ont toujours* [dans ce plan] *un point homologue commun.*

Ce théorème fait partie d'une série de propositions sur les figures semblables, démontrées par M. Chasles.—En y nommant *centre de similitude* le point homologue commun, et *rayons de similitude* les droites qui le joignent aux autres points homologues, on retombe sur la proposition du texte, en supposant que les rayons homologues de similitude, aient, deux à deux, la même direction.

Dans deux cercles concentriques, les deux centres de similitude se réunissent au centre commun.

Dans deux cercles égaux, le centre de similitude externe est situé à l'infini sur la ligne des centres [de figure]; et le centre de similitude interne est le milieu de leur distance.

Quand l'un des deux cercles dégénère en une ligne droite, les centres de similitude sont les extrémités du diamètre perpendiculaire à la droite. Chacun d'eux peut être, indifféremment, considéré comme centre de similitude interne ou comme centre de similitude externe.

Quand l'un des cercles se réduit à un point, ce point est à la fois centre de similitude interne et externe.

§ II. — *Conséquences des propriétés des Figures Semblables.*

N° 272. THÉORÈME IX. Fig. 226.

Fig. 226. *Dans un triangle quelconque* ABC, *la bissectrice* AD *de chaque angle* A *divise le côté opposé* BC *en deux segmens,* BD, DC, *directement proportionnels aux côtés adjacens* AB, AC; — *et réciproquement.*

Il n'y a lieu à démontrer la proposition que dans le cas où les deux côtés AB, AC, sont inégaux, et où, par conséquent, AD est oblique sur BC (*voyez* le n° 164). Dans cette hypothèse, abaissons sur AD, des sommets B et C, les perpendiculaires BE et CF. Il en résultera deux triangles ABE, ACF, semblables comme équiangles (n° 262); d'où la proportion

$$AB : AC :: BE : CF;$$

mais les deux triangles BDE, CDF, sont aussi semblables par la même raison, d'où

$$BE : CF :: BD : CD;$$

donc $AB : AC :: BD : CD;$ *C. Q. F. D.*

La *réciproque* est évidente (n° 49).

Scolie. — La bissectrice de l'angle supplémentaire adjacent à l'angle A, c'est-à-dire la perpendiculaire AD′ à la bissectrice AD (n° 112, *coroll.* 4), coupe aussi la base BC prolongée, en un point D′ tel, que l'on a la proportion :

$$AB : AC :: BD' : CD'.$$

La démonstration de cette nouvelle proposition est en tout semblable à la précédente.—[Nous avons distingué par des lignes ponctuées et des lettres accentuées, les parties de la figure qui s'y rapportent spécialement.]—(*).

N° 273. Théorème X(**). Fig. 227.

Si par le sommet d'un angle B adjacent à la base BC d'un triangle ABC, on mène une droite quelconque BG qui rencontre en un point G le côté opposé AC, prolongé s'il est nécessaire, et que par le milieu E de cette droite on mène une droite EA au sommet A du triangle, cette droite coupera la base BC en deux parties CD, BD, qui seront entre elles comme le même côté AC est à la partie AG interceptée sur ce côté entre le sommet A du triangle et la droite quelconque BG. Fig. 227.

Pour démontrer ce théorème, menons par le point C, parallèlement à BG, la droite CF terminée en F sur AD ou sur son prolongement. Alors, les deux triangles semblables BED, CFD, donneront

$$BD : CD :: BE : CF.$$

Ensuite, les deux triangles semblables AGE, ACF, donneront encore

$$GE : CF :: AG : AC.$$

Or, à cause de BE = GE, ces deux proportions ont un rapport commun; d'où il résulte

$$BD : CD :: AG : AC; \qquad C. Q. F. D.$$

Scolie 1er. — Si l'on a mené BG de manière que AG = AB, c'est-à-dire de manière que le triangle ABG soit isocèle, ou que la droite AD partage l'angle A en deux parties égales, alors la proportion obtenue devient

$$BD : CD :: AB : AC.$$

C'est le cas particulier démontré au *numéro* précédent (n° 272).

Scol. 2. — Si c'est au contraire le triangle ABC qui est isocèle et le triangle ABG quelconque, la proportion

$$BD : CD :: AG : AC$$

devient

$$BD : CD :: AG : AB;$$

d'où il suit que dans tout triangle GAB, la droite AD qui joint le sommet d'un angle A au milieu du côté opposé, coupe la droite BC, menée de manière que AC = AB, en deux parties réciproquement proportionnelles aux côtés AB et AG.

(*) La longueur AB est dite *partagée harmoniquement* par les points D, D'.

(**) M. Ampère a donné, dans ses leçons au Collége de France, une nouvelle démonstration de la règle du *parallélogramme des forces*, fondée sur ce théorème dont nous lui devons la communication.

N° 274. Théorème XI. Fig. 228.

Fig. 228. *Si du sommet* A *de l'angle droit d'un triangle rectangle* ABC *on abaisse une perpendiculaire* AD *sur l'hypoténuse*, cette perpendiculaire partagera le triangle total en deux triangles partiels également rectangles, et l'hypoténuse en deux segmens qui seront les *projections* (n° 83, *scol.*) des deux autres côtés, sur sa direction. —Cela posé :

1° *Les deux triangles partiels,* ABD, ACD, *sont semblables au triangle total, et par conséquent semblables entre eux ;*

2° Les lignes étant supposées évaluées en nombres, — *La perpendiculaire* AD *est moyenne proportionnelle entre les deux segmens* BD, CD, *de l'hypoténuse ;*

3° *Chaque côté de l'angle droit*, AB ou AC, *est moyen proportionnel entre sa projection*, BD ou CD, *sur l'hypoténuse, et l'hypoténuse entière ;*

4° Enfin — *L'hypoténuse* BC *est à un côté de l'angle droit*, AB ou AC, *comme l'autre côté*, AC ou AB, *est à la perpendiculaire* AD.

En effet : — 1° Les triangles ABC et ABD ont un angle commun B et chacun un angle droit ; donc ils sont semblables (n° 262) ; il en est de même des triangles ACB et ACD ; les triangles ABD et ACD sont donc aussi semblables entre eux (n° 256 ; *et d'ailleurs,* ils ont les côtés perpendiculaires chacun à chacun ; — *voyez* le n° 265).

2° Comparant entre eux les triangles partiels, on a :

$$BD : AD :: AD : DC;$$

3° Comparant le triangle total avec chacun des triangles partiels, on obtient les deux proportions :

$$BC : AB :: AB : BD \quad | \quad BC : AC :: AC : DC;$$

4° Enfin, comparant de nouveau le triangle total avec l'un des triangles partiels, on voit que

$$BC : AB :: AC : AD.$$

Corollaire 1er. — *Dans un triangle rectangle, les carrés* [ou les 2es puissances] des valeurs numériques *des côtés de l'angle droit et de l'hypoténuse, sont directement proportion-*

nels aux segmens de cette hypoténuse et à l'hypoténuse entière : Fig. 228.
c'est-à-dire que l'on a

$$AB^2 : AC^2 : BC^2 :: BD : DC : BC.$$

COROLL. 2.— Dans les mêmes hypothèses que précédemment,
Le carré d'un segment de l'hypoténuse est au carré de la perpendiculaire, comme ce premier segment est au second, — c'est-à-dire que

$$BD^2 : AD^2 :: BD : DC.$$

Scolie 1er. — Le théorème précédent donnerait lieu à diverses *réciproques* dont il est facile de trouver les énoncés, et qui se démontrent sans peine.

SCOL. 2. — On sait que tout triangle ABC (fig. 229) inscriptible dans un demi-cercle, est un triangle rectangle qui a pour hypoténuse le diamètre BC qui lui sert de base (nos 165, *récipr.; ou* 151, *coroll.* 1er), et que la perpendiculaire AD est dite une *ordonnée* de ce diamètre (n° 88, *scol.* 2). Fig. 229.

Par suite, le théorème précédent donne lieu à diverses propositions, au nombre desquelles sont les suivantes :

1° *Toute ordonnée* AD *d'un diamètre* BC *est moyenne proportionnelle entre ses deux segmens* BD, DC ;

2° *Toute corde* AB *est moyenne proportionnelle entre sa projection* BD *sur le diamètre* BC *mené par l'une de ses extrémités* B, *et le diamètre entier;*

D'où — *Les carrés des cordes* BA, BA′, BA″ .. (fig. 230), *menées par un même point* B *de la circonférence, sont proportionnels à leurs projections* BD, BD′, BD″... *sur le diamètre* BC *mené par le même point.* Fig. 230.

N° 275. THÉORÈME XII. Fig. 228.

Dans un triangle rectangle ABC, *le carré* [ou la 2e puissance] de la valeur numérique *de l'hypoténuse* BC *est égal à la somme des carrés des* valeurs numériques des *deux autres côtés.* Fig. 228.

En effet, si du sommet de l'angle droit on abaisse la perpendiculaire AD sur l'hypoténuse, on aura (n° 274, 3°) :

$$AB^2 = BC \times BD \quad | \quad AC^2 = BC \times DC ;$$

Fig. 228. d'où, en ajoutant :

$$AB^2 + AC^2 = BC\,(BD + DC),$$

ou $$AB^2 + AC^2 = BC^2\,;$$ *C. Q. F. D.*

Corollaire 1er. — Lorsque $AB = AC$, on a $BC^2 = 2.AB^2$; donc *Dans tout triangle rectangle isocèle, le carré de l'hypoténuse est égal au double du carré d'un côté de l'angle droit.*

Par conséquent — *La deuxième puissance de* la valeur numérique de *la diagonale d'un carré est double de celle du côté;*

Donc — *La diagonale et le côté du carré* [étant dans le rapport de $\sqrt{2}$ à 1] *sont incommensurables entre eux.*

On peut conclure du résultat précédent, que la *racine carrée* du nombre 2 [et il en est de même des racines carrées de tous les nombres entiers qui ne sont pas des carrés parfaits] peut être figurée par une construction, bien que l'*Arithmétique* démontre que cette racine est incommensurable.

Coroll. 2. — *Dans tout triangle isocèle, le carré d'un côté latéral est égal à la somme des carrés de la hauteur et de la demi-base.*

Et par suite — *Dans tout polygone régulier, le carré du rayon est égal à la somme des carrés de l'apothème et du demi-côté* (voyez le n° 228).

N° 276. Théorème XIII. Fig. 231.

Fig. 231. *Dans un triangle obtusangle* ABC, *le carré du côté* BC *opposé à l'angle obtus*, A, *est égal à la somme des carrés des deux autres côtés,* plus *le double produit de l'un de ces deux côtés* AB, *par la projection* AD *de l'autre côté* AC *sur le prolongement de ce dernier* AB.

En effet, le triangle rectangle BCD donne d'abord

$$BC^2 = BD^2 + CD^2.$$

On a ensuite $$BD = AB + AD\,;$$

d'où, en élevant au carré (*),

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 + 2.AB \times AD.$$

(*) D'après la formule d'*Algèbre*... $(p + q)^2 = p^2 + 2pq + q^2$.

Substituant cette valeur de BD^2 dans l'égalité primitive, en observant que Fig. 231.

$$AD^2 + CD^2 = AC^2,$$

on obtient :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2.AB \times AD\,; \quad C.\ Q.\ F.\ D.$$

N° 277. Théorème XIV. Fig. 232 et 233.

Dans un triangle quelconque ABC, *le carré de chaque côté* BC *opposé à un angle aigu* A *est égal à la somme des carrés des deux autres côtés*, MOINS *le double produit de l'un de ces deux côtés*, AB, *par la projection* AD *de l'autre côté* AC *sur ce dernier* AB [prolongé s'il est nécessaire]. Fig. 232 et 233.

En effet, on a comme ci-dessus (n° 276),

$$BC^2 = BD^2 + CD^2.$$

Maintenant, suivant que la perpendiculaire CD tombe au dedans ou au dehors du triangle, on a

$BD = AB - AD$ (fig. 232) ou $BD = AD - AB$ (fig. 233) ; mais dans l'un comme dans l'autre cas, on obtient, en élevant au carré (*), $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2.AB \times AD$;

d'où, en substituant comme dans le *numéro* précédent (n° 276),

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2.AB \times AD; \quad C.\ Q.\ F.\ D.$$

N. B. — Cette égalité a toujours lieu, même quand la perpendiculaire CD se confond avec le côté CB (fig. 234) ; car, dans ce cas, en vertu de $AD = AB$, l'égalité se réduit à $BC^2 = AC^2 - AB^2$; Fig. 234.

et elle est encore vraie (n° 275), puisque alors le triangle est rectangle en B.

N° 278. REMARQUE *sur ces* 3 *théorèmes*. — D'après le *numéro* 51 — Un angle d'un triangle est droit, aigu, ou obtus, suivant que le carré du plus grand côté est égal, inférieur, ou supérieur, à la somme des carrés des deux autres côtés ;

(*) D'après la formule d'*Algèbre*..... $(p-q)^2 = p^2 - 2pq + q^2$.

Digitized by Google

Et par suite, — *Un triangle est rectangle, acutangle, ou obtusangle, suivant que le carré du plus grand côté est égal, inférieur, ou supérieur, à la somme des carrés des deux autres côtés.*

Exemples :

1° AB = 3, AC = 4, BC = 5; $3^2 + 4^2 = 5^2$: donc le triangle est rectangle;

2° AB = 2, AC = 3, BC = 4; $2^2 + 3^2 < 4^2$: donc le triangle est obtusangle;

3° AB = 4, AC = 5, BC = 6; $4^2 + 5^2 > 6^2$: donc le triangle est acutangle;

4° AB = 5, AC = 12, BC = 13; $5^2 + 12^2 = 13^2$: donc le triangle est rectangle... *Etc.*

N° 279. THÉORÈME XV. Fig. 235.

Fig. 235. *Dans un triangle quelconque* ABC, *la somme des carrés de deux des côtés*, AB, AC, *est équivalente au double du carré de la moitié du troisième côté* BC, *plus le double du carré de la droite* AD *qui joint le milieu* D *de ce troisième côté au sommet opposé* A.

La proposition serait évidente si le triangle était isocèle et avait pour base BC (*voyez* les n°s 164, *scol.* 1er; *et* 275) : supposons donc le cas contraire.

Abaissons la perpendiculaire AE du sommet A sur le côté BC; [en supposant que le pied E de la perpendiculaire tombe plus près de C que de B] nous aurons (n°s 276 *et* 277) :

$$AB^2 = BD^2 + AD^2 + 2.BD \times DE,$$
$$AC^2 = CD^2 + AD^2 - 2.CD \times DE;$$

d'où, en ajoutant membre à membre et observant que BD = CD,

$$AB^2 + AC^2 = 2.BD^2 + 2.AD^2; \quad C.\ Q.\ F.\ D.$$

N° 280. Théorème XVI. Fig. 145.

Dans tout parallélogramme MNOP, *la somme des carrés des côtés est équivalente à la somme des carrés des diagonales.* Fig. 145.

En effet, en nommant I le centre (n° 199, *scol.* 3) du parallélogramme, on a d'abord (n° 279) :

$$MO^2 + MN^2 = 2.OI^2 + 2.MI^2,$$
$$OP^2 + NP^2 = 2.OI^2 + 2.PI^2.$$

Maintenant, si l'on ajoute membre à membre en observant que

$$4.OI^2 = (2.OI)^2 = ON^2,$$

et que

$$2.MI^2 + 2.PI^2 = 4.MI^2 = (2.MI)^2 = MP^2,$$

on obtient

$$MO^2 + OP^2 + MN^2 + NP^2 = ON^2 + MP^2;$$

C. Q. F. D.

N° 281. Théorème XVII. Fig. 236.

Dans tout quadrilatère MNOP, *la somme des carrés des côtés est équivalente à la somme des carrés des diagonales*, ON, MP, *plus quatre fois le carré de la droite* IK *qui joint les milieux de ces diagonales.* Fig. 236.

En effet, si l'on mène les droites MI, PI, on a d'abord (n° 279) :
1° dans le triangle MON............ $MO^2 + MN^2 = 2.OI^2 + 2.MI^2$,
2° dans le triangle PON............ $OP^2 + NP^2 = 2.OI^2 + 2.PI^2$,
et enfin — 3° dans le triangle IMP... $MI^2 + PI^2 = 2.MK^2 + 2.IK^2$.

Maintenant, doublant la dernière de ces trois égalités ; ajoutant, membre à membre, le résultat avec les deux premières ; et supprimant, de part et d'autre, les termes communs $2.MI^2$ et $2.PI^2$, on obtient

$$MO^2 + OP^2 + MN^2 + NP^2 = 4.OI^2 + 4.MK^2 + 4.IK^2.$$

Enfin, observant que $4.OI^2 = ON^2$ et $4.MK^2 = MP^2$, on conclut, conformément à l'énoncé,

$$MO^2 + OP^2 + MN^2 + NP^2 = ON^2 + MP^2 + 4.IK^2.$$

N° 282. PROBLÈME. Fig. 232 et 233.

Fig. 232 et 233. *Exprimer les hauteurs d'un triangle* ABC *en fonction des trois côtés* : [AB $= c$, CA $= b$, BC $= a$].

Supposons que l'on veuille trouver la valeur de la hauteur CD correspondant au côté c pris pour base; représentons par h cette hauteur; et faisons de plus AD $= d$. — Le triangle ACD nous donnera d'abord

$$h^2 = b^2 - d^2.$$

Nous aurons ensuite, pour le *carré* du côté BC opposé à l'angle *aigu* A dans le triangle ABC (n° 277) :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cd, \quad \text{d'où} \quad d = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}.$$

Et de là il résulte :

$$h^2 = b^2 - \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right)^2 = \frac{4b^2c^2 - (b^2+c^2-a^2)^2}{4c^2}$$

$$= (^*)\ \frac{(2bc + b^2 + c^2 - a^2)\ (2bc - b^2 - c^2 + a^2)}{4c^2}$$

$$= \frac{[(b+c)^2 - a^2]\ [a^2 - (b-c)^2]}{4c^2};$$

ou enfin $$h^2 = \frac{(a+b+c)\ (b+c-a)\ (a+c-b)\ (a+b-c)}{4c^2}.$$

Maintenant, faisons pour simplifier,

$$a + b + c = 2s;$$

s sera la demi-somme des côtés du triangle; et nous aurons

$$b + c - a = 2(s-a),$$
$$c + a - b = 2(s-b),$$
$$a + b - c = 2(s-c);$$

d'où il suit : $$h^2 = \frac{4}{c^2} s\ (s-a)\ (s-b)\ (s-c);$$

et par conséquent $$h = \frac{2}{c}\sqrt{s(s-a)\ (s-b)\ (s-c)}.$$

De là résulte la règle suivante :

Pour avoir l'une des hauteurs d'un triangle : — 1° Faites la demi-somme des côtés ; — 2° Retranchez de cette demi-somme chacun des côtés en particulier ; — 3° Faites le produit des quatre nombres ainsi obtenus ; — 4° Extrayez la racine carrée de ce produit ; — 5° Multipliez par 2 et divisez par le côté pris pour base.

Scolie. — Les quantités $s-a, s-b, s-c$, étant essentiellement positives (n° 80), la valeur de h est toujours réelle.

(*) D'après la formule $(p+q)(p-q) = p^2 - q^2$, et celles des *pages* 214 et 215 (*notes*).

§ III. — *Autres Conséquences. — Figures Circulaires.*

N° 283. Théorème XVIII. Fig. 237 et 238.

Les segmens de deux droites quelconques, AC, BD, *compris entre un point* P *et une circonférence* ABCD, *sont réciproquement proportionnels:* c'est-à-dire que l'on a Fig. 237 et 238.

$$PA : PB :: PD : PC.$$

Il y a *deux cas* à distinguer : celui où le point P est intérieur (fig. 237) à la circonférence, et celui où il lui est extérieur (fig. 238) ; mais la même démonstration s'applique aux *deux* cas.

Soient donc deux droites quelconques menées par le point P et coupant la circonférence, respectivement, en A et C, en B et D. Si l'on mène AD, BC, les deux triangles APD, BPC, qui en résultent, sont semblables : en effet, l'angle P est le même; et les angles A, B, sont égaux (n° 151, *coroll.*, 2).

De là on conclut la proportion énoncée.

Scolie 1er. — De cette proportion l'on tire l'égalité

$$PA \times PC = PB \times PD,$$

que l'on peut énoncer de la manière suivante:

Les distances d'un même point P *aux divers points d'une circonférence* ABCD, *forment, deux à deux, en les prenant sur la même direction* (n° 8), *des produits constans.*

Scol. 2. — La proposition est également applicable au cas où, le point P étant extérieur, l'une des droites PB (fig. 239) serait tangente à la circonférence. Seulement, il faut observer que dans ce cas, le point D se confondant avec le point B, la proportion deviendrait *continue.* Fig. 239.

Scol. 3. — Les droites AD, BC (fig. 237 et 238), qui sont également inclinées, mais en sens inverse, sur les côtés de l'angle APD, sont dites *anti-parallèles* relativement à cet angle ; il en est de même des droites AB, BC (fig. 239), par rapport à l'angle APB. Fig. 237 — 239.

Fig. 237 — 240. SCOL. 4. — On a coutume de nommer particulièrement *sécante*, la plus grande, PA, des deux *distances* PA, PC (fig. 238 et 239) ; *partie extérieure de la sécante*, la plus petite distance PC ; et enfin *tangente*, la distance PB (fig. 239). — Alors l'énoncé général ci-dessus se partage dans les suivans :

1° *Les segmens des cordes qui se coupent en un même point intérieur* P (fig. 237), *sont inversement proportionnels ;*

2° *Les sécantes issues d'un même point* P (fig. 238) *sont inversement proportionnelles à leurs parties extérieures ;*

3° *Une tangente est moyenne proportionnelle entre une sécante issue du même point* P (fig. 239), *et sa partie extérieure ;*

4° *Les deux tangentes*, PA, PB (fig. 240), *issues d'un même point* P *sont égales :* — [cette dernière proposition a déjà été établie au *numéro* 152 (*scol.*)].

Réciproques qui se déduisent du principe établi au *numéro* 51 :

Les points A et C, B et D, étant supposés deux à deux sur une même droite passant par le point B :

1° Si l'on a la proportion

$$PA : PB :: PD : PC \quad (\text{fig. } 237 \text{ et } 238),$$

les quatre points A, B, C, D, sont sur une même circonférence ;

2° Si l'on a

$$PA : PB :: PB : PC \quad (\text{fig. } 239),$$

la circonférence qui passe par les trois points A, B, C, touche PB en B ;

3° Si l'on a, de même,

$$PA : PB :: PB : PC \quad (\text{fig. } 239),$$

la circonférence qui, touchant PB en B, passe par l'un des deux points A, C, passe aussi par l'autre ;

4° Si l'on a

$$PA = PB \quad (\text{fig. } 240),$$

la circonférence qui, passant par les points A et B, touche l'une des droites PA et PB, touche aussi l'autre.

N° 284. Remarque *sur la division des droites en moyenne et extrême* raison. — Le théorème précédent présente un cas remarquable : celui où la tangente est égale à la partie intérieure de la sécante, et plus particulièrement celui où, la sécante PA (fig. 241) passant par le centre, la droite PB est une tangente égale au diamètre AC. La sécante PA se trouve alors *partagée* au point C *en moyenne* [AC] *et extrême* [PC](*). Fig. 241.

De plus, comme on a, par suite de PB = AC, la proportion

$$AP : AC :: PB : PC,$$

il s'ensuit que PC est aussi égal au plus grand segment de la tangente PB supposée partagée de même en moyenne et extrême raison.

[C'est d'ailleurs ce que l'on peut prouver directement; car, de la proportion précédente on tire

$$AP - AC : AC :: PB - PC : PC,$$

ou bien $$PC : PB :: PB - PC : PC,$$

ou enfin $$PB : PC :: PC : PB - PC;$$

ce qui démontre la proposition.]

Ainsi, en *rabattant* PC sur PB, c'est-à-dire en décrivant,

(*) Nous croyons devoir rappeler ici, qu'une *quantité* de nature quelconque est dite *partagée en moyenne et extrême* [on ajoute, à tort, le mot *raison*], lorsque *l'une de ses deux parties est moyenne proportionnelle entre la quantité entière et l'autre partie*, qui se trouve, par conséquent, la plus petite des deux.

Nous ajouterons — 1o qu'*Il n'y a qu'un seul système de parties qui satisfasse à cette définition* : — puisque le carré de la moyenne ne pourrait varier sans que le produit des extrêmes variât en sens inverse ;

2o Que — *Lorsque deux quantités sont partagées* chacune séparément *en moyenne et extrême, elles sont partagées proportionnellement entre elles ; — et réciproquement* ;

D'où il suit que — *Si de la plus grande partie d'une quantité partagée en moyenne et extrême, on retranche la plus petite, cette plus grande partie sera partagée de même* ; — et ainsi de suite à l'infini.

Et pareillement, — *Si l'on ajoute à la quantité totale, sa plus grande partie, la somme obtenue sera partagée de même, et aura pour plus grande partie la quantité primitive* ; — etc., etc.

du point P comme centre et du rayon PC, un arc CD qui coupe PB en D, la droite PB se trouvera partagée au point D en moyenne [PD] et extrême [BD].

N° 285. REMARQUE *sur l'incommensurabilité de la racine carrée du*
Fig. 242. *nombre* 2. — Un autre cas remarquable est celui où, la sécante PA (fig. 242) passant encore par le centre, la tangente PB est égale au rayon $OA = OB = OC$. Alors le triangle rectangle BPO est isocèle; et si l'on prend le *rayon* pour *unité* de longueur, l'hypoténuse OP sera représentée par l'expression incommensurable $\sqrt{2}$ (n° 275, *coroll.* 1er).

Or, non-seulement la *Géométrie* fournit ainsi une *expression linéaire* de $\sqrt{2}$, mais elle concourt aussi à en démontrer l'incommensurabilité, comme on va le voir.

En effet, d'après le numéro 283, on a, sur la *figure* 242 :

$$PC : PB :: PB : PA$$

on bien

$$PC : 1 :: 1 : 2 + PC;$$

d'où

$$PC = \frac{1}{2 + PC}.$$

Donc

$$\sqrt{2} = PO = 1 + PC = 1 + \frac{1}{2 + PC} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + PC}}$$

$$= 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + PC}}} \ldots\ldots\ldots \textit{Etc.}$$

Ainsi, l'on trouvera toujours un reste, quelque loin que l'on pousse l'opération, puisque la valeur de PO est exprimée par une *fraction continue périodique* : par conséquent le rapport de la diagonale PO au côté OB est *incommensurable* (n° 64).

Suivant qu'on négligera le premier reste, ou le second, ou le troisième..., on obtiendra pour la valeur de OP, l'une des réduites suivantes :

$$1 \;\Big|\; \frac{3}{2} \;\Big|\; \frac{7}{5} \;\Big|\; \frac{17}{12} \;\Big|\; \frac{41}{29} \;\Big|\; \frac{99}{70} \ldots\ldots$$

dont la dernière, exprimée en décimales, donne 1,4142..., résultat exact à 0,0001 près.

N° 286. Théorème XIX. Fig. 243.

Dans tout quadrilatère inscriptible ABCD, *le produit des diagonales est égal à la somme des produits des côtés opposés* : c'est-à-dire que l'on a Fig. 243.

$$AD \times BC = AB \times DC + AC \times DB.$$

En effet, menons la droite AI [terminée en I sur BC] de manière que l'angle CAI soit égal à l'angle BAD [et par suite l'angle CAD à l'angle BAI]. Les angles ADC, ABI, étant d'ailleurs égaux (n° 151, *coroll.* 2), les triangles ADC, ABI, seront semblables ; et nous aurons

$$AD : DC :: AB : BI,$$

d'où

$$AD \times BI = AB \times DC.$$

Par une raison semblable, les triangles ADB, ACI, donneront

$$AD : DB :: AC : CI,$$

d'où

$$AD \times CI = AC \times DB.$$

Maintenant, en ajoutant ces deux résultats membre à membre, nous obtiendrons :

$$AD \times BC = AB \times DC + AC \times DB;$$

C. Q. F. D.

Scolie 1er. — On a aussi

$$AB : AD :: AI : AC; \quad \text{d'où} \quad AB \times AC = AD \times AI.$$

Dans le cas particulier où AD est un diamètre, alors AB étant perpendiculaire à BD, AI est aussi perpendiculaire à BC. Et en considérant le cercle ABDC comme circonscrit au triangle ABC, on peut en conclure que

Dans tout triangle ABC, *le produit de deux côtés*, AB, AC, *est égal au produit du diamètre du cercle circonscrit, par la hauteur qui correspond au troisième côté supposé pris pour base.*

Scol. 2. — Le théorème précédent porte le nom de Ptolémée qui en est l'inventeur.

N° 287. Théorème XX. Fig. 244.

Fig. 244. *Dans tout quadrilatère inscriptible* ABCD, *les diagonales sont proportionnelles aux sommes des produits des côtés qui aboutissent ensemble à leurs extrémités* : c'est-à-dire que l'on a

$$AD : BC :: AB \times AC + DB \times DC : BA \times BD + CA \times CD.$$

Prenons, du même côté de la diagonale AD, l'arc AG = DC, d'où l'arc DG = AC; et menons BG. En considérant le quadrilatère ABGD ainsi formé, nous aurons, d'après le théorème précédent (n° 286):

$$AD \times BG = AB \times DG + AG \times DB,$$

ou

$$AD \times BG = AB \times AC + DB \times DC.$$

Prenons parcillement, du même côté de la diagonale BC, l'arc CK = BD, d'où l'arc BK = CD; et menons AK. Nous aurons encore, dans le quadrilatère CAKB,

$$CB \times AK = CA \times BK + CK \times BA,$$

ou

$$CB \times AK = CA \times CD + BA \times BD.$$

Maintenant, les cordes BG et AK, sous-tendant des arcs égaux, sont égales; donc :

$$AD : BC :: AB \times AC + DB \times DC : BA \times BD + CA \times CD ;$$

C. Q. F. D. (*)

(*) Voyez un Mémoire intitulé : — *De Quadrilatero circulari observationes quædam, auctore Ern. Guil.* Grebe; *Marburgi*, 1831.

CHAPITRE II.

PROBLÈMES SUR LES LIGNES PROPORTIONNELLES ET SUR LES POLYGONES SEMBLABLES.

---

§ I. — *Problèmes sur les Lignes Proportionnelles, dont les solutions s'obtiennent principalement par la Ligne Droite.*

N° 288. PROBLÈME I. Fig. 245 et 246.

Partager une longueur donnée AB *en parties proportionnelles à d'autres longueurs données*, A*p* (fig. 245) [ou *ap* (fig. 246)], *pq*, *qr*, *rs*, *sb*. Fig. 245 et 246.

SYNTHÈSE. — 1re *Construction.* — 1° Menons, par les points A, B (fig. 245), en sens contraire l'une de l'autre, deux parallèles A*b*, B*a* (nos 154 *ou* 211). — 2° Portons à la suite l'une de l'autre, sur la droite A*b*, les longueurs données A*p*, *pq*, *qr*, *rs*, *sb*; et sur la droite B*a*, dans un ordre inverse, les longueurs respectivement égales aux premières, B*s'*, *s'r'*, *r'q'*, *q'p'*, *p'a*. — 3° Menons les droites A*a*, *pp'*, *qq'*, *rr'*, *ss'*, *b*B. Fig. 245.

Ces droites [sans y comprendre la première et la dernière] partageront la longueur AB suivant les conditions données.

En effet, les quadrilatères A*p'*, *pq'*, *qr'*, *rs'*, *s*B, étant des parallélogrammes, les segmens de la droite AB sont proportionnels à ceux des droites A*b*, *a*B (n° 259), comme on l'a demandé.

2° *Constr.* — 1° Portons à la suite l'une de l'autre, sur une droite quelconque *ab* (fig. 246), les longueurs données, *ap*, *pq*, *qr*, *rs*, *sb*. — 2° Des points *a*, *b*, comme centres, et d'un rayon égal à *ab*, décrivons deux petits arcs de cercle qui se coupent en un point C. — 3° Tirons *a*C, *b*C, ce qui formera Fig. 246.

Fig. 246. un triangle équilatéral. — 4° Prenons, sur Ca et sur Cb, les longueurs CA et CB égales à AB. — 5° Tirons AB. — 6° Joignons par des droites, le point C aux points p, q, r, s; et soient P, Q, R, S, les points où ces droites coupent AB.

Ces derniers seront les points de division cherchés.

En effet, d'après la construction précédente, AB est égale à la droite donnée (n° 263) ; et de plus elle est partagée proportionnellement à ab (n° 260, *scol.*).

Scolie. — La théorie des lignes proportionnelles fournit une foule d'autres moyens de résoudre le même problème. Les *deux* précédens, qui sont au nombre des plus simples, sont aussi les plus généralement employés.

N° 289. PROBLÈME II. Fig. 245—248.

Fig. 245 — 248. *Partager une longueur donnée* AB *en un certain nombre donné de parties égales.*

Nous supposerons, pour fixer les idées, qu'il s'agisse de partager la droite AB (fig. 245–248) en 5 parties égales.

SYNTHÈSE. — 1re *et* 2e *Constructions.* — Comme dans le problème précédent, en prenant pour les longueurs données,

Fig. 245 et 246. Ap (fig. 245) [ou Ap (fig. 246)], des longueurs arbitraires mais égales entre elles.

3e *Constr.* (*) — 1° Portons, à la suite l'une de l'autre,

Fig. 247. sur une droite quelconque Ab (fig. 247) menée par le point A, 5 longueurs arbitraires, mais égales entre elles, Ap, pq, qr, rs, sb. — 2° Menons la droite indéfinie bBb'. — 3° Marquons, sur la droite bBb', le point b' de telle manière, que Ab' soit égale à Ab. — 4° Menons Ab'. — 5° Portons, à partir du point A, sur la droite Ab', les distances Ap', $p'q'$, $q'r'$, $r's'$, $s'b'$, égales entre elles et aux distances Ap, pq, qr, rs, sb. — 6° Menons les droites pp', qq', rr', ss'; et soient P, Q, R, S, les points d'intersection de ces droites avec AB.

Ces points seront les points de division cherchés.

(*) L'auteur de ce procédé est M. DU CHATLA, capitaine du génie (voyez les *Annales de Mathématiques* de M. GERGONNE, *tome* XV, *page* 229).

En effet, les triangles App', Aqq', ... Abb', sont tous isocèles ; et comme ils ont le même angle au sommet A, ils sont par conséquent tous semblables entre eux (n° 262, *coroll.* 3). Il en résulte que les droites pp', qq', ..., bb', sont parallèles, et par suite que la longueur AB [ainsi que Ab et Ab'] est partagée en parties égales (n° 258). Fig. 247.

Scolie. — Plus les longueurs égales au moyen desquelles on aura formé la droite auxiliaire Ab, seront considérables, plus les points de division P, Q, R, S, seront exactement déterminés.

Ainsi, il y aurait un inconvénient grave à ce que Ab fût moindre que AB : car alors AB ne pourrait être intérieur au triangle Abb'.

4e *Constr.* (*) — 1° Portons, à la suite l'une de l'autre, sur une droite Ab (fig. 248) menée par le point A, 6 longueurs égales quelconques [*une de plus* que l'on ne veut obtenir de divisions de la droite AB] ; et soient Ap, pq, qr, rs, sb, bu, ces 6 longueurs. — 2° Menons la droite uB, et prolongeons-la d'une quantité Bv égale à Bu. — 3° Menons une droite du point v au *quatrième* [ou *antépénultième*] point de division de la droite Au ; et soit S le point d'intersection de la droite vs avec la droite donnée AB. Fig. 248.

BS est la *cinquième* partie de la droite AB ; — [et par conséquent : pour diviser AB en 5 parties égales, il suffira de porter 5 fois de suite sur sa direction, de B en A, la longueur BS].

En effet, si l'on mène la droite Bb qui sera nécessairement parallèle à Ss (n° 259, *récipr.*), on aura (*même* no)

$$BS : BA :: bs : bA ;$$

et puisque bs est le *cinquième* de bA, il s'ensuit que BS est aussi le *cinquième* de BA.

Scolie. — Cette construction se simplifie beaucoup lorsque le nombre de divisions demandé est un nombre impair, comme dans le cas actuel : car alors, on peut se contenter de porter sur la droite auxiliaire Au, *la moitié* du nombre de divisions prescrit par la règle précédente : [ici, ce sont les 3 divisions Aq, qs, su ; et généralement, le nombre de divisions étant m, le nombre des longueurs auxiliaires successives sera $\frac{m+1}{2}$]. Par suite, au lieu de lier le point v à l'antépénultième point de division de Au, c'est à l'*avant-dernier*, s, qu'on le lie, par la droite vs.

(*) Nous sommes redevable de cette construction, à M. Chenou, proviseur du collége de Metz.

N. B. — Il faut observer encore, que le problème du *numéro* 101 (*scol.*), consistant à *Trouver le milieu d'une droite*, n'est qu'un cas particulier du précédent, et que par conséquent on peut lui appliquer les 4 moyens de résolution qui viennent d'être exposés.

N° 290. PROBLÈME III. Fig. 249.

Fig. 249. *Partager une longueur donnée* AB, *en deux parties proportionnelles à deux longueurs données* [*m*, *n*].

[Quoique ce problème soit un cas particulier de celui du *numéro* 288, nous croyons devoir le traiter séparément, à cause des remarques auxquelles il donne lieu.]

SYNTHÈSE. — *Construction.* — 1° Par l'extrémité A de la droite donnée AB élevons une perpendiculaire AC égale à *m* (n° 99 *ou* 190). — 2° Par l'autre extrémité B élevons, en sens inverse de la première, une autre perpendiculaire BD égale à *n*. — 3° Menons la droite CD qui coupera la droite AB, entre A et B, en un point X.

Le point X est le point de division cherché.

En effet, les deux triangles ACX, BDX, étant semblables, donnent AX : BX :: AC : BD :: *m* : *n*.

Scolie 1er. — Il n'est pas nécessaire, pour que la proportion ait lieu, que les droites AC, BD, soient perpendiculaires à AB : il suffit qu'elles soient parallèles entre elles.

SCOL. 2. — Le problème précédent peut encore s'énoncer de la manière suivante :

Trouver, sur une droite donnée AB, *un point* X *tel que ses distances respectives à deux points*, A, B, *de cette droite, soient entre elles dans un rapport donné* [celui de *m* à *n*].

La question, ainsi posée, est susceptible d'une seconde solution dans laquelle le point de division, X', est situé sur le prolongement de la droite AB. — Pour trouver ce point, élevons la perpendiculaire BD' égale à BD, dans le même

sens que la perpendiculaire AC. — La droite CD' rencontre le prolongement de AB au point cherché X', ce qui se prouve comme ci-dessus. Fig. 249.

Le point X' est situé du côté du point B ou du côté du point A, suivant que m est > ou < que n. — Dans le cas particulier de $m = n$, le point X' est situé *à l'infini*, c'est-à-dire que la seconde solution n'a plus lieu.

SCOL. 3. — Enfin le problème peut encore s'énoncer ainsi :

Partager une longueur AB *en deux segments additifs ou soustractifs qui soient entre eux dans un rapport donné* [$m : n$].

SCOL. 4. — La construction du problème précédent est celle que l'on emploie quand on veut

Trouver les centres de similitude de deux cercles, OA, O'A' (fig. 250). Fig. 250.

Pour cela on prend, à la place des droites m et n, deux rayons parallèles, lesquels doivent être dirigés dans le même sens [OA, O'A'] ou en sens contraire [OA, O'a], suivant que l'on veut obtenir le centre de similitude externe [S] ou le centre de similitude interne [s] (*voyez* le nº 271).

De là résulte encore un nouveau moyen de

Mener les tangentes communes à deux cercles donnés (voyez les nºs 159 et 271).

Nº 291. PROBLÈME IV.

***Trouver une quatrième proportionnelle* [x] *à trois longueurs données* [a, b, c ; de manière que l'on ait $a : b :: c : x$].**

SYNTHÈSE. — 1re *Construction* (voyez *ci-après*, nº 299, *scol.*). — 1º Traçons, sous un angle quelconque, les droites indéfinies OA, OB (fig. 251). — 2º Prenons OA $= a$, OB $= b$, OC $= c$. — 3º Traçons AB. — 4º Menons CX parallèle à AB (nº 154 *et* 211). Fig. 251.

La longueur OX sera la quatrième proportionnelle cherchée.

En effet, on aura (nº 259) :

$$OA : OB :: OC : OX, \quad \text{ou} \quad a : b :: c : OX ;$$

et par conséquent $OX = x$.

Scolie 1er. — Il y a plusieurs manières de varier cette construction. — Par exemple, au lieu de prendre OC $= c$, on pourrait prendre AC $= c$; alors, au lieu de $x =$ OX, on aurait $x =$ BX..... *Etc.*

Scol. 2. — Le problème précédent est susceptible de nombreuses *applications*; nous allons en indiquer quelques unes.

Fig. 252 Application 1re. — *Mesurer une distance* AB (fig. 252) *dont une extrémité* B *est inaccessible*. — [On suppose le terrain sensiblement plan.]

Après avoir fixé la direction AB au moyen de *jalons* (n° 25), on élève sur AB, dans le plan du terrain, une perpendiculaire AD (n° 99; *ou* 129, *scol.* 2; *ou* 190), et sur AD une perpendiculaire DE, toutes deux de longueurs arbitraires; puis on détermine le point C où BE rencontre AD. — Cela fait, on pose la proportion

$$AB : AC :: DE : DC \text{ (n° 260), d'où } AB = \frac{AC \times DE}{DC}.$$

Ainsi, en mesurant AC, CD, et DE, on aura la valeur de AB par la formule précédente.

N. B. — Il faut, autant que possible, pour atténuer les petites erreurs qui résultent toujours de l'inexactitude des mesures, donner aux droites arbitraires AD, DE, des longueurs telles que les angles aigus de la figure soient à peu près des angles demi-droits.

Au reste, il n'est pas nécessaire que les droites AB et DE soient perpendiculaires à AD : il suffit qu'elles soient parallèles entre elles (*voyez* le n° 290, *scol.* 1er).

Exemple. — Soit $AC = 75^m$, $CD = 25^m$, et $DE = 27^m,3$.

On aura $$AB = \frac{AC \times DE}{CD} = \frac{75 \times 27,3}{25} = 81,9.$$

Applic. 2. — *Mener, par un point donné* D (fig. 253), *une parallèle* DE *à une droite inaccessible* AB.

Pour cela, on recule dans la direction AD, d'une quantité quelconque DC que l'on mesure; puis on détermine les distances CA, CB, comme on l'a expliqué ci-dessus. — On pose alors la proportion

$$CA : CB :: CD : CE;$$

et la distance CE fait connaître, sur la direction CB, le point E de la parallèle cherchée (*voyez* le n° 259, *récipr.*).

Fig. 253. Applic. 3. — *Mesurer la distance de deux points inaccessibles*, A, B (fig. 252). — [On est supposé placé en un point C.]

On détermine d'abord les distances CA et CB comme dans la question principale; puis, par un point quelconque D pris sur la droite CA par exemple, on mène la droite DE parallèle à AB (*applic.* 2), et terminée en E sur CB; on mesure DE; et comme CD est déjà mesuré, on pose la proportion $AB : CA :: DE : CD$ (n° 260),

d'où l'on tire $$AB = \frac{CA \times DE}{CD}.$$

Ex. — Supposons d'abord que l'on ait mesuré, comme *ci-dessus* (*applic.* 1re), les distances AC $= 215^m{,}25$, BC $= 475^m{,}15$, et que l'on ait pris, dans la direction AC, une distance arbitraire CD $= 3^m{,}17$. — Alors, la proportion Fig. 253.

$$CE : CD :: CB : CA$$

déterminera un point E tel que DE sera parallèle à AB. — On aura ainsi, en employant les logarithmes,

$$\begin{aligned} log.CD &= 0{,}5682017 \\ log.CB &= 2{,}6768307 \\ C.log.CA &= 7{,}6670568 \\ \hline log.CE &= 0{,}9120892 = log.8{,}1675. \end{aligned}$$

Il faudra donc mesurer, dans la direction CB, une longueur CE$=8^m{,}17$. — Ensuite on mesurera DE : supposons cette dernière distance égale à $8^m{,}15$. — On aura alors

$$\begin{aligned} AB : DE &:: CA : CD ; \\ log.DE &= 0{,}9111576 \\ log.CA &= 2{,}3329432 \\ C.log.CD &= 9{,}4317983 \\ \hline log.AB &= 2{,}6758991 = log.474{,}132. \end{aligned}$$

Ainsi $AB = 474^m{,}132$.

N. B. — Il est facile, par ces applications, de

Déterminer les positions relatives d'un nombre quelconque de points.

Applic. 4. — *Mesurer la hauteur* AB (fig. 254) *d'un édifice.* — [On suppose que le pied de l'édifice soit *accessible*. — Quand il est *inaccessible*, on commence par en déterminer la distance (*applic.* 1re).] Fig. 254.

Sur une droite ACE menée par le pied A de l'édifice, et à des distances de ce point, AC, AE, qui ne diffèrent pas beaucoup de sa hauteur présumée, on plante, parallèlement à AB, deux *jalons* CD, EF, d'inégales longueurs, le premier plus grand, et le second plus petit. Cela fait, par l'extrémité F du plus petit, on mène un *rayon visuel* au sommet B de l'édifice, et l'on marque le point D d'intersection de ce rayon avec le jalon CD. Alors, les droites AB, CD, EF, étant parallèles, si par le point F on mène la droite FGI parallèle à ECA et coupant CD et AB respectivement en G et en I, on aura la proportion

$$IB : IF :: GD : GF \text{ (n}^o\text{ 260)},$$

d'où

$$IB = \frac{IF \times GD}{GF}.$$

Ainsi, en mesurant IF $=$ AE, GD $=$ CD $-$ EF, et GF $=$ CE, on aura IB. — Enfin, ajoutant AI $=$ EF, on aura la hauteur cherchée AB, égale à AI $+$ IB.

Fig. 254. *N. B.* — Il n'est pas nécessaire que AE et IF soient perpendiculaires à AB (n° 290, *scol.* 1er) : par conséquent on opère sur un terrain *en pente* comme sur un terrain *de niveau* ; la seule chose à observer, est que IF doit être parallèle à la droite AE menée du pied A de l'édifice au pied E du jalon qui en est le plus éloigné.

Ex. — Soient..... AC = IG = 75m, CE = GF = 1m,3, CD = 2m,3, et...... EF = CG = AI = 1m,1.

On a d'abord

$$IB = \frac{IF \times GD}{GF} = \frac{(75 + 1{,}3)(2{,}3 - 1{,}1)}{1{,}3} = \frac{76{,}3 \times 1{,}2}{1{,}3} = 70{,}4;$$

d'où $AB = 70^m{,}4 + 1^m{,}1 = 71^m{,}5.$

N° 292. Problème V.

Trouver une troisième proportionnelle [x] *à deux longueurs données* [a, b ; de sorte que l'on ait $a : b :: b : x$].

1re *Construction.* — Comme pour le problème précédent, en faisant $b = c$.

Fig. 228. 2e *Constr.* — 1° Prenons BD = a (fig. 228) ; et prolongeons. — 2° Élevons au point D la perpendiculaire DA = b (n° 99) ; et menons AB. — 3° Élevons sur AB la perpendiculaire AC ; et soit C le point d'intersection de AC avec BD prolongé.

DC est la longueur demandée.

En effet, etc..... (n° 274, 2°).

[*Voyez* encore, ci-après, au n° 299.]

N° 293. Problème VI. Fig. 255.

Fig. 255. *Inscrire à un angle donné* AOB, *une droite* AB *qui passe par un point* P *donné dans cet angle, et qui soit partagée en ce point en deux parties proportionnelles à des longueurs données* [m, n].

Menons par le point P une droite parallèle à OA, et terminée en Q sur OB : nous aurons

$$AP : PB :: OQ : QB \text{ (n° 260).}$$

Donc, si l'on détermine le point B par la proportion

$$m : n :: OQ : QB \text{ (n° 291),}$$

et que l'on mène BPA, la droite AB satisfera aux conditions de la question.

Discussion. — Si l'on ne donnait pas la position relative des portions de AB qui doivent être proportionnelles à m et à n, il y aurait deux solutions, parce que l'on pourrait poser aussi Fig. 255.

$$n : m :: OQ : QB.$$

Quand $m = n$, la question peut s'énoncer ainsi :

Inscrire à un angle donné une droite qui passe par un point donné dans cet angle, et qui soit partagée en ce point en deux parties égales.

Dans le cas général, on peut énoncer la question en demandant *que les distances*, PA, PB, *du point donné* P *aux droites données*, OA, OB, *soient entre elles dans le rapport donné* $[m : n]$. — Alors, par suite, on peut supposer que le point P est situé hors de l'angle donné (fig. 256), on, ce qui revient au même, que les distances PA, PB, doivent être comptées *dans le même sens*, à partir du point P. Et suivant que m est $>$ ou $< n$, il en résulte que QB est $>$ ou $<$ OQ; et de là deux positions essentiellement distinctes de la droite cherchée. Fig. 256.

N° 294. PROBLÈME VII.

La hauteur du talus d'une batterie est de 7^{p} $[2^{m},274]$ *à l'intérieur, et la base a* $2^{p}, 4^{p}$ $[0^{m},758]$, *ou le tiers de la hauteur. — Calculer la longueur du talus.*

La longueur du talus est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les deux autres côtés sont respectivement de $2^{m},274$ et $0^{m},758$: cette longueur vaut donc (n° 275)

$$\sqrt{(2,274)^2 + (0,758)^2} = 2^{m},397 = 7^{p}, 5^{p}.$$

N° 295. PROBLÈME VIII.

Au moyen d'une échelle dont la longueur est de 6^{m}, *on veut atteindre à une fenêtre dont la hauteur au-dessus du sol est de* $5^{m},4$. — *On demande ce qu'il faut donner de pied à l'échelle.*

La distance cherchée est égale (n° 275) à

$$\sqrt{(6)^2 - (5,4)^2} = \sqrt{11,4 \times 0,6} = \sqrt{6,84} = 2^{m},6.$$

N° 296. PROBLÈME IX. Fig. 119.

Fig. 119. *Étant donnés deux côtés, AC, BC, d'un triangle ABC, égaux respectivement à* $8^m,76$ *et* $5^m,26$, *ainsi que la perpendiculaire CD abaissée du sommet de l'angle compris C, sur le troisième côté AB, égale à* $4^m,38$: *trouver ce troisième côté.*

On a d'abord (n° 275)

$$AD = \sqrt{(8,76)^2-(4,38)^2} = \sqrt{(8,76+4,38)\,(8,76-4,38)}$$ (*page* 218, *note*)

$$= \sqrt{13,14 \times 4,38} = \sqrt{57,5532} = 7^m,59.$$

On a de même

$$BD = \sqrt{(5,26)^2-(4,38)^2} = \sqrt{(5,26+4,38)\,(5,26-4,38)}$$

$$= \sqrt{9,64 \times 0,88} = \sqrt{8,4832} = 2^m,91.$$

D'où enfin $AD + BD = 10^m,50.$

Le calcul précédent peut se faire commodément au moyen des *logarithmes*.

On a pour cela $2.\log.AD = \log.13,14 + \log.4,38;$

$$\log.13,14 = 1,1185954$$
$$\log.\ 4,38 = 0,6414741$$
$$2.\log.AD. = 1,7600695$$
$$\log.AD. = 0,8800347 = \log.\ 7,58638.$$

De même $2.\log.BD = \log.9,64 + \log.0,88;$

$$\log.9,64 = 0,9840770$$
$$\log.0,88 = \bar{1},9444827$$
$$2.\log.BD. = 0,9285597$$
$$\log.BD. = 0,4642799 = \log.2,91259.$$

D'où $AD + BD = 10,49897 = 10^m,50$, à *un centimètre* près.

N° 297. PROBLÈME X. Fig. 119.

Étant donnés deux côtés d'un triangle, $AC = 128^m,49$, $AB = 88^m$, *et la perpendiculaire* $CD = 96^m,45$, *abaissée du sommet C sur le côté AB : trouver le troisième côté BC.*

On a (n° 275) :

$$AD = \sqrt{(128,49)^2-(96,45)^2} = 84,90,$$
$$BD = 88 - 84,90 = 3,10,$$
$$BC = \sqrt{(3,10)^2+(96,45)^2} = 96^m,50.$$

§ II. — *Problèmes sur les Lignes Proportionnelles, dont les solutions s'obtiennent par le Cercle.*

N° 298. PROBLÈME XI.

Trouver une moyenne proportionnelle [x] *entre deux longueurs données* [a, b ; de sorte que l'on ait $a : x :: x : b$].

SYNTHÈSE. — 1re *Construction.* — 1° Sur une même droite BC (fig. 229) prenons BD $= a$ et DC $= b$. — 2° Sur BC comme diamètre, décrivons une demi-circonférence (n° 102, 1°). — 3° Élevons sur BC la perpendiculaire DA (n° 99), rencontrant la demi-circonférence en A. Fig. 229.

DA sera la longueur cherchée.

En effet, etc.... (n° 274, *scol.* 2, 1°).

2e *Constr.* — Soit a la plus grande des deux longueurs a et b. — 1° Prenons BC $= a$ et BD $= b$. — 2° Sur BC comme diamètre, décrivons une demi-circonférence. — 3° Élevons sur BC la perpendiculaire DA. — 4° Menons BA.

AB est la longueur cherchée.

En effet, etc.... (n° 274, *scol.* 2, 2°).

SCOLIE. — Cette *seconde* construction peut être employée avec beaucoup d'avantage pour résoudre le problème suivant :

Décrire un cercle qui touche une droite donnée MN, *et qui passe par deux points donnés*, A, B [extérieurs à cette droite].

Construction. — 1° Menons la droite AB (fig. 257); et soit D son point d'intersection avec la droite MN. — 2° Sur AD comme diamètre [le point A étant, des deux points A, B, le plus éloigné de D], décrivons une demi-circonférence (n° 102, 1°). — 3° Par le point B élevons l'ordonnée BE (n° 99). — 4° Menons DE. — 5° Du point D comme centre et du rayon DE, décrivons un arc de cercle qui coupe la droite MN en un point C. Fig. 257.

Fig. 257. Le point C est le point de tangence ; et il n'y a plus qu'à faire passer une circonférence par les trois points A, B, C (*voyez* les nᵒˢ 102, 3° ; *et* 188). — (*Voyez* aussi le nᵒ 103.)

Discussion. — Comme l'arc de cercle décrit du point D comme centre, coupe la droite MN en deux points, C, C′, il y a généralement *deux* solutions.

Mais il peut arriver que AB soit parallèle à MN. — Dans ce cas, la construction doit être modifiée comme il suit :

Fig. 258. 1° [Comme *ci-dessus*.] — 2° Par le milieu de AB (fig. 258), faisons passer la perpendiculaire GC (nᵒ 101) coupant MN en C. — 3° Menons AC [ou BC]. — 4° Par le milieu de AC menons la perpendiculaire IO coupant CG en un point O.

Ce point sera le centre du cercle cherché (nᵒˢ 88 *et* 89).

Il n'y a qu'*une* solution pour ce cas particulier.

Nᵒ 299. Problème XII.

Trouver une troisième proportionnelle [x] *à deux longueurs données* [a, b].

3ᵉ *Construction* (voyez les *deux* 1ʳᵉˢ au nᵒ 292). — Soit pris $PA = a$

Fig. 239. et $PB = b$ (fig. 239). — La question se trouve alors ramenée à décrire une circonférence qui, passant par le point A, touche PB en B (*voyez* les nᵒˢ 283 *et* 103).

Soit C son second point d'intersection avec PA : on aura $PC = x$.

4ᵉ *Constr.* — Il faut distinguer deux cas : $a < b$, et $a > b$: [si a était égal à b, on aurait $x = a = b$].

Fig. 228. 1ᵉʳ *Cas* : $a < b$. — 1° Prenons $BD = a$ (fig. 228). — 2° Élevons sur BD la perpendiculaire indéfinie DA. — 3° Du point B comme centre, et d'un rayon $BA = b$, décrivons un petit arc de cercle qui coupe cette perpendiculaire en A. — 4° Élevons sur AB la perpendiculaire AC [comme dans la troisième construction] ; et soit C son point d'intersection avec BD prolongé.

BC sera la longueur cherchée.

En effet, etc.... (nᵒ 274, 3°).

Fig. 229. 2ᵉ *Cas* : $a > b$. — 1° Sur $BC = a$ (fig. 229) comme diamètre, décrivons une demi-circonférence (nᵒ 102, 1°). — 2° Du point B comme centre, et d'un rayon $BA = b$, décrivons un petit arc de cercle qui coupe la demi-circonférence en A. — 3° Abaissons du point A sur BC, la perpendiculaire AD (nᵒ 100).

BD sera la longueur cherchée.

En effet, etc.... (nᵒ 274, *scol.* 2, 2°).

SCOLIE. — Un moyen analogue à la 3e *construction* ci-dessus, fournit une 2e *construction* pour

Trouver une quatrième proportionnelle [x] *à trois longueurs données* [a, b, c]. — (Voyez le n° 291.)

Pour cela il faut prendre PA $= a$, PB $= b$, et PD $= c$ (*fig.* 237 *et* 238); puis faire passer une circonférence par les trois points A, B, D (*voyez les* (nos 102, 3°; et 188) : on aura, comme ci-dessus, PC $= x$. Fig. 237 et 238.

N° 300. Problème XIII. Fig. 259, 260, et 261.

Partager une longueur donnée AB *en deux parties dont la moyenne proportionnelle soit une longueur donnée* AI. Fig. 259—261.

SYNTHÈSE. — 1re *Construction.* — 1° Sur AB (fig. 259) comme diamètre décrivons une demi-circonférence (n° 102, 1°). — 2° Élevons au point A, sur AB, la perpendiculaire AI (n° 99, *ou* 190, *etc.*). — 3° Mènons par le point I une parallèle à AB (n° 154 *ou* 211); et soit D l'un de ses points d'intersection avec la demi-circonférence. — 4° Du point D abaissons sur AB la perpendiculaire DC (n° 100). Fig. 259.

AC et CB seront les deux parties cherchées.

En effet, on a d'abord........ AC + CB = AB;
et ensuite (n° 274, *scol.* 2, 1°)... AC × CB = AI².

Discussion. — Il y a généralement deux points d'intersection D, D', entre la droite ID et la demi-circonférence; mais il est facile de voir qu'ils donnent des résultats identiques. — La droite ID pourrait être tangente à la demi-circonference; et alors les deux segmens du diamètre étant égaux au rayon, la droite AB devrait être partagée en deux moitiés, lesquelles se trouveraient précisément égales à AI. — Enfin, si la droite ID ne rencontrait pas la demi-circonférence, le problème serait impossible.

SCOLIE. — *La plus grande moyenne proportionnelle que l'on puisse obtenir entre les deux portions d'une longueur donnée, est égale à la moitié de cette longueur*;

De sorte que le problème serait impossible si l'on donnait........

$$AI > \frac{1}{2} AB.$$

Fig. 260. 2° *Constr.* — 1° Sur OA (fig. 260) moitié de AB, comme diamètre, décrivons une demi-circonférence (n° 102, 1°). — 2° Menons, dans cette demi-circonférence, à partir du point A, la corde AI égale au côté du carré donné. — 3° Du point O comme centre, et du rayon OI, décrivons une autre demi-circonférence; et soit C l'un des points où elle coupe AB.

AC et CB seront encore les deux parties cherchées.

En effet, on a d'abord: $AC + CB = AB$;

et ensuite (*voyez* la *note* de la *page* 218):

$$AC \times CB = (OA - OC)(OA + OC) = OA^2 - OC^2 = OA^2 - OI^2 = AI^2.$$

La *discussion* de cette construction est analogue à celle de la première.

Fig. 261. 3° *Constr.* — 1° Prenons sur AB (fig. 261), de chaque côté du point A, des distances AI, AI', égale à la racine carrée du produit donné. — 2° Sur OI comme diamètre, décrivons une demi-circonférence. — 3° Menons à cette demi-circonférence l'ordonnée I'E (n° 99). — 4° Du point O comme centre, et du rayon OE, décrivons une autre demi-circonférence; et soit C l'un de ses points d'intersection avec AB.

AC et CB seront encore les droites cherchées.

En effet, on a

$$\begin{aligned} AC \times CB &= (OA - OC)(OA + OC) = OA^2 - OC^2 = OA^2 - OE^2 \\ &= OA^2 - OI \times OI' = OA^2 - (OA + AI)(OA - AI) \\ &= OA^2 - (OA^2 - AI^2) = AI^2. \end{aligned}$$

N° 301. Problème XIV. Fig. 262 et 263.

Fig. 262 et 263. ***Trouver deux longueurs qui fassent une différence donnée* AB, *et dont la moyenne proportionnelle soit une longueur donnée* AI.**

Fig. 262. Synthèse. — 1re *Construction.* — 1° Sur AB (fig. 262) comme diamètre, décrivons une circonférence (n° 102, 1°). — 2° Élevons au point A, sur AB, la perpendiculaire AI (n° 190, *etc.*). — 3° Menons par le centre O la sécante ICOC' coupant la circonférence en C et en C'.

IC et IC' seront les deux longueurs cherchées.

En effet, on a

$IC' - IC = AB$, et $IC \times IC' = AI^2$ (n° 283, *scol.* 4, 3°).

Scolie. — Le problème est toujours possible.

2° *Constr.* — 1° Élevons au point A (fig. 263), sur AB, la perpendiculaire AI (n° 99). — 2° Du point O milieu de AB (n° 101, *scol.*), comme centre, et du rayon OI, décrivons une demi-circonférence; et soient C, C', les points où elle coupe AB prolongé. Fig. 263.

AC et AC' seront les droites cherchées.

En effet, on a

$$AC' - AC = AB, \quad \text{et} \quad AC \times AC' = AI^2$$ (n° 274, *scol.* 2, 1°).

N° 302. Problème XV. Fig. 264.

Partager une longueur donnée AB *en moyenne et extrême* raison (n° 284) [de sorte que, X étant le point de division cherché, l'on ait AB : AX :: AX : BX]. Fig. 264.

Construction. — 1° Elevons sur AB (n° 190) une perpendiculaire BB' égale à AB. — 2° Sur BB' comme diamètre décrivons une circonférence (n° 102, 1°). — 3° Lions les deux points A et O par une droite AO qui coupera la circonférence en C. — 4° Rabattons AC sur AB, par un arc de cercle CX décrit du point A comme centre.

X sera le point cherché.

En effet, etc.... (*voyez* le n° 284).

Scolie 1er. — La construction que l'on vient d'indiquer peut se simplifier ; car elle se réduit à ce qui suit :

1° Élever sur AB, au point B, la perpendiculaire $BO = \frac{1}{2}$ AB; — 2° Mener AO ; — 3° Rabattre OB sur OA par un arc de cercle BC décrit du point O comme centre ; — 4° Rabattre AC sur AB par l'arc de cercle CX décrit du point A comme centre.

Scol. 2. — Le même problème peut s'énoncer ainsi :

Trouver sur une droite donnée AB, *un point* X *tel que sa distance à une extrémité* A *de cette droite, soit moyenne proportionnelle entre sa distance à l'autre extrémité* B *et la droite entière* AB.

Le problème, ainsi énoncé, a pour solution un autre point X' tel que AX' = AC' = AO + OC : car de la proportion

$$AC' : AB :: AB : AC \text{ (n° 283)}$$

Fig. 263. on tire la suivante (*voyez* la *note* de la *page* 221) :

$$AC' + AB : AC' :: AC' : AB,$$

ou $$BX' : AX' :: AX' : AB.$$

Scol. 3. — Enfin, le problème peut encore s'énoncer généralement comme il suit :

Partager une longueur AB *en deux segmens additifs ou soustractifs* (voyez le nº 290, *scol.* 3) *tels que le carré de l'un d'eux soit équivalent au produit de l'autre segment multiplié par la droite entière.*

Nº 303. Problème XVI. Fig. 265.

Fig. 265. *Partager une longueur donnée* AB *en deux parties telles, que le carré de l'une soit au produit de l'autre partie par la droite entière, dans un rapport donné* [$m : n$].

Synthèse. — *Construction.* — 1º Prenons, sur le prolongement de AB, une distance BC telle que l'on ait BC : AB :: m : n (nº 291). — 2º Sur AC comme diamètre décrivons une demi-circonférence (nº 102, 1º).—3º Élevons l'ordonnée BD (nº 99). — 4º Sur BC comme diamètre décrivons une circonférence. — 5º Par le centre O de cette dernière et par le point D, menons la sécante DXOY, coupant la circonférence en X et en Y.

La distance DX est la première partie de la droite AB : celle *dont le carré*, etc...... ; [AB — DX est la seconde].

En effet, on a, d'après la construction précédente,

d'abord $BD^2 = AB \times BC$ (nº 274, *scol.* 2, 1º),

et ensuite $BD^2 = DX \times DY = DX(BC + DX)$ (nº 283) ;

d'où l'on tire $AB \times BC = DX\,(BC + DX)$,

et par conséquent $DX^2 = (AB - DX)\,BC$.

Maintenant, puisque l'on a $BC : AB :: m : n$,

d'où $(AB - DX)\,BC : (AB - DX)\,AB :: m : n$,

il en résulte $DX^2 : (AB - DX)\,AB :: m : n$;

ce qui fait voir que DX remplit les conditions demandées.

Scolie 1er. — Comme DX est moyen proportionnel entre (AB — DX) et BC, la même construction sert à résoudre le problème suivant :

Partager une droite AB *en deux parties telles que l'une*, DX, *soit moyenne proportionnelle entre l'autre partie et une seconde droite donnée* BC.

Scol. 2. — Dans le cas particulier de $m = n$, on a aussi

$$AB = BC = BD ;$$

et l'on retombe sur le problème précédent (nº 302).

N° 304. **Problème XVII.** Fig. 141.

Par l'extrémité A *d'un segment de droite* AB *qui ne peut être prolongé, élever une perpendiculaire.* Fig. 141.

Synthèse. — 3ᵉ *Construction* (voyez les *deux* 1ʳᵉˢ aux nᵒˢ 129, *scol.* 2; et 190). — 1° Du point A comme centre, et d'un rayon AB = 3, décrivons un arc de cercle qui coupe AB en B. — 2° Du même point A comme centre, et d'un rayon AC = 4, décrivons un autre arc de cercle. — 3° Du point B comme centre, et d'un rayon BC = 5, décrivons un troisième arc de cercle qui coupe le précédent en C.

AC est la perpendiculaire cherchée.

En effet, le triangle ABC est rectangle en A puisque l'on a $3^2 + 4^2 = 5^2$ (*voyez* le n° 278).

N° 305. **Problème XVIII.**

Deux cordes se coupent dans un cercle; les segmens de l'une valent respectivement 13ᵐ *et* 25ᵐ; *les deux segmens de l'autre sont entre eux dans le rapport de* 4 *à* 7 : *on demande la valeur de cette dernière.*

En nommant x et y les deux segmens de la corde cherchée, on a

$$x : y :: 4 : 7 \quad \text{ou} \quad x = \frac{4}{7} \cdot y,$$

et (n° 283)

$$xy = 25 \times 13 = 325;$$

d'où l'on tire, en éliminant x,

$$y^2 = 568{,}75,$$
$$y = 23{,}85;$$
$$x = \frac{23{,}85 \times 4}{7} = 13{,}63.$$

La corde cherchée vaut donc, *à un centimètre près*,

$$x + y = 37^m{,}48.$$

N. B. — Voyez dans la *Note* A, la *construction* et l'*usage des échelles*, ainsi que la description du *compas de proportion* et celle du *compas de réduction*.

§ III. — *Problèmes sur les Figures Semblables.*

N° 306. Problème XIX. Fig. 210.

Fig. 210. *Construire un triangle semblable à un triangle donné* ABC, *sur une droite* A'B' *donnée comme homologue d'un côté déterminé* AB.

Analyse. — Le triangle cherché A'B'C' devant être semblable au triangle ABC, on aura (nos 252 et 261)

$$AB : A'B' :: A'C : A'C' :: BC : B'C',$$

et $$A = A' \mid B = B' \mid C = C'.$$

Ainsi, l'on peut facilement déterminer les trois côtés et les trois angles du triangle A'B'C'. — De là résultent plusieurs moyens de résoudre la question.

1re *Construction.* — Employez les trois côtés avec la construction du *numéro* 183.

2e *Constr.* — Employez le côté A'B', un second côté, et l'angle compris, comme dans le *numéro* 184.

3e *Constr.* — Faites aux points A' et B', des angles respectivement égaux à A et B, comme dans le *numéro* 185.

Scolie 1er. — Quant à la construction du *numéro* 186, il vaut mieux l'éviter parce qu'elle pourrait induire en erreur.

Scol. 2. — On a vu dans le *numéro* 260, qu'une parallèle menée à l'un des côtés d'un triangle, déterminait un autre triangle semblable au premier ; de là résulte encore un moyen qu'on peut employer dans beaucoup de circonstances.

Scol. 3. — La construction d'un triangle semblable à un autre, est susceptible de nombreuses *applications;* [nous en avons déjà donné des exemples dans le *numéro* 290].

N° 307. Problème XX. Fig. 266.

Fig. 266. *Inscrire à un cercle, un triangle* ABC *semblable à un triangle donné.*

SYNTHÈSE. — *Construction.* — 1° Menons une droite MN tangente à la circonférence (n° 105), en un point quelconque A. — 2° Tirons, par le point A, deux cordes AB, AC, faisant avec AM et AN les angles MAB, NAC (n° 129), respectivement égaux à deux angles du triangle donné. — 3° Menons BC. Fig. 266.

Le triangle ABC satisfera aux conditions de la question.

En effet, ACB = MAB, ABC = NAC (n° 151); et quant à l'angle A, il est nécessairement égal au troisième angle, A, du triangle donné (n° 163).

N° 308. PROBLÈME XXI. Fig. 267.

Circonscrire à un cercle, un triangle ABC *semblable à un triangle donné.* Fig. 267.

SYNTHÈSE.—*Construction.*—1° Inscrivons à la circonférence, un triangle A'B'C' semblable au triangle donné (n° 307). — 2° Du centre, O, menons des rayons, O*a*, O*b*, O*c*, respectivement perpendiculaires aux côtés du triangle A'B'C' (n° 100). — 3° Par les extrémités, *a*, *b*, *c*, de ces rayons, menons des tangentes (n° 105).

Ces tangentes formeront un triangle ABC qui satisfera aux conditions de la question.

En effet, le triangle ABC sera semblable au triangle A'B'C' (n° 265), et par conséquent au triangle donné (n° 256).

N° 309. PROBLÈME XXII.

Construire un polygone semblable à un polygone donné, sur une droite donnée comme homologue d'un côté déterminé.

On ramène la résolution de ce problème à celle du *numéro* 306, en employant, pour la détermination du polygone cherché, l'une des méthodes indiquées aux *numéros* 217 *ou* 223, ou même encore les propriétés des centres de similitude internes ou externes (n° 270).

Scolie. — On peut, par le même moyen, construire approximativement une courbe semblable à une courbe donnée quelconque. — Pour cela, on commence par inscrire à cette dernière, un polygone dont les côtés soient suffisamment petits : [plus les sommets consécutifs sont voisins les uns des autres, plus la solution approche d'une exactitude rigoureuse].—On construit ensuite un second polygone semblable au premier, et tel que les côtés homologues des deux polygones aient le même rapport donné que les dimensions homologues des deux courbes. — Enfin, on fait passer une courbe continue (n° 250) par les sommets consécutifs du nouveau polygone.

16.

N° 310. PROBLÈME XXIII.

Inscrire APPROXIMATIVEMENT *à un cercle, un polygone régulier d'une espèce donnée.*

Fig. 268. Supposons qu'il s'agisse, par exemple, d'*Inscrire à un cercle* OP (fig. 268), *un heptagone régulier.*

Pour cela : — 1° Essayons deux longueurs qui ne diffèrent pas beaucoup de la longueur présumée du côté cherché, l'une AB un peu trop grande, l'autre *ab* un peu trop petite : [c'est-à-dire telles que, chacune d'elles étant portée *sept* fois de suite comme corde, à partir du point P, sur la circonférence OP, et dans le sens PC, l'opération se termine, pour la première, en un point C situé au-delà de P, et pour la seconde, en un point *e* situé en-deçà de P]. — 2° Traçons une droite DE égale à AB ; et prenons, à partir du point D, une portion De de cette droite, égale à *ab*. — 3° Élevons au point E, sur DE, une perpendiculaire EF (n° 190) égale à la corde PC de l'arc *excédant*, et au point *e*, sur la même droite DE, et dans le sens inverse du précédent, une perpendiculaire *ef* égale à la corde P*e* de l'arc *déficient*. — 4° Menons F*f* coupant DE au point G.

La distance DG ne pourra différer que fort peu du côté cherché.

Si l'on trouve que l'erreur est encore trop considérable, et que le résultat obtenu, donne, par exemple, un côté trop petit, on recommencera l'opération en substituant ce nouveau côté approché, au côté *ab* ; et, cette fois, l'erreur sera beaucoup moindre.

On pourra, du reste, continuer cette série d'approximations jusqu'à ce que deux résultats consécutifs ne diffèrent plus d'une quantité appréciable : dès qu'on est parvenu à ce point, une construction rigoureuse n'aurait plus aucun avantage réel sur la solution ainsi obtenue.

Alors, en traçant dans la circonférence, autant de cordes consécutives égales à la longueur obtenue, que le polygone doit avoir de côtés, on obtiendra le polygone cherché (n° 231).

Scolie 1er. — La méthode précédente est très digne de remarque, en ce qu'elle peut être employée dans toutes les circonstances où l'on cherche une ligne dont la longueur doit satisfaire à une condition donnée, et où en même temps on ne peut trouver exactement cette valeur par quelque moyen simple et commode. On s'en sert, en particulier, pour partager en un certain nombre donné de parties égales, non-seulement des circonférences entières, comme on vient de le voir, mais des arcs quelconques, ou même des distance rectilignes (*voyez* le n° 62, *scol.* 2).

Scol. 2. — La droite Ee, différence des valeurs supposées du côté inconnu, se trouvant, par la solution approximative que l'on vient de donner, partagée proportionnellement aux erreurs respectives qui résultent des deux hypothèses (*voyez* le n° 290), il s'ensuit que la construction précédente n'est, en quelque sorte, que la *traduction géométrique* de la méthode

connue en *Arithmétique* sous le nom de *règle de fausse position double*, laquelle consiste, comme l'indique son titre, à *supposer* deux valeurs successives au nombre inconnu, puis à regarder les *accroissemens des erreurs* qui résultent de ces suppositions, comme *proportionnels aux accroissemens des valeurs* supposées.

Scol. 3. — Il existe certaines classes de polygones dont on peut construire rigoureusement le côté lorsque le rayon en est donné : nous les indiquerons dans le chapitre suivant (nos 314 *et suiv.*) ; mais le nombre de ces polygones étant fort restreint (*voyez* plus loin, n° 322), il est très utile de connaître la méthode précédente.

Scol. 4. — Enfin, l'on peut encore employer, pour l'inscription des polygones réguliers, la *Table des cordes*, que nous avons placée à la fin de l'ouvrage. — Par exemple, le nombre 6840, valeur de la corde de 40° dans un cercle dont le rayon est représenté par 10000, est en même temps, pour la même hypothèse, la valeur du côté de l'*ennéagone* régulier inscrit. — De même, le nombre 8679, corde de 51°26′ ou de 360° : 7, est le côté de l'*heptagone*, etc. — (*Voyez* encore le n° 322.)

N° 311. PROBLÈME XXIV.

Circonscrire à un cercle, un polygone régulier d'une espèce donnée.

On commence par inscrire un polygone de la même espèce (n° 310) ; et l'on trouve, par le *numéro* 235, le polygone circonscrit semblable.

N° 312. PROBLÈME XXV.

Construire, sur un côté donné, un polygone régulier d'une espèce déterminée.

Il faut, pour résoudre ce problème, construire un polygone de l'espèce désignée, en prenant pour rayon une droite arbitraire (n° 310) ; puis construire, sur le côté donné, un polygone semblable au premier (n° 309). — Ce sera le polygone cherché.

Scolie. — On peut aussi quelquefois résoudre la question en traçant deux côtés consécutifs qui comprennent entre eux l'angle du polygone ; mais il faut encore pour cela, que l'on sache construire cet angle directement, question qui, au fond, rentre dans la précédente.

N. B. — Voyez à la fin du volume, *Note* A, les articles du *pantographe*, du *lever des plans*, et de *la planchette*.

CHAPITRE III.

DES DIMENSIONS RELATIVES DE QUELQUES POLYGONES RÉGULIERS, ET DU RAPPORT DE LA CIRCONFÉRENCE AU DIAMÈTRE.

N° 313. Nous avons vu (n° 227) qu'il existait des polygones réguliers d'un nombre infini d'espèces différentes, et (n° 269) que les polygones réguliers de même espèce ou d'un même nombre de côtés, étaient des figures semblables. Or, les lignes homologues des figures semblables étant proportionnelles, il s'ensuit que, pour chaque sorte de polygones réguliers, les rapports des côtés, des rayons, et des apothèmes, sont des nombres constans. Mais il s'en faut bien que des opérations effectuées avec la règle et le compas seulement (nos 23 *et* 26), suffisent dans tous les cas pour déterminer rigoureusement ces rapports ou pour les représenter exactement par des rapports de lignes. Ce n'est que pour un petit nombre d'espèces de polygones, qu'il en est ainsi; et encore même quelques-unes exigeraient-elles des constructions qui excèdent tout-à-fait les bornes d'un cours élémentaire.

Nous allons, dans ce chapitre, déterminer les rapports dont nous venons de parler, pour les polygones réguliers les plus simples; et par suite, nous calculerons le rapport de la circonférence à son diamètre, le cercle pouvant être, ainsi que nous l'avons dit précédemment (n° 240), considéré comme un polygone régulier d'un nombre infini de côtés infiniment petits, dont le rayon et l'apothème sont égaux entre eux.

Pour plus de clarté, nous admettrons dans ce qui va suivre, que les polygones réguliers que nous avons à considérer, soient inscrits dans un cercle dont nous prendrons le

rayon pour *unité;* et nous supposerons que l'on ait présent à l'esprit le *chapitre* VI du *livre premier* (§ II), et notamment les *numéros* 231 *et* 232.

§ Ier. — *Polygones Réguliers.*

N° 314. THÉORÈME I. Fig. 269.

Le côté AB *du carré* ABCD *est au rayon* OA :: $\sqrt{2}$: 1. Fig. 269.

En effet, l'angle au centre étant droit, le triangle AOB donne (n° 275)

$$OA^2 + OB^2 = AB^2, \quad \text{ou} \quad 2.OA^2 = AB^2\,;$$

d'où l'on tire $AB : OA :: \sqrt{2} : 1$,

comme on pouvait d'ailleurs le conclure du *numéro* 275 (*coroll.* 1er).

SCOLIE 1er. — On obtient de même :

$$AC^2 = 2.AB^2; \quad \text{d'où} \quad AC : AB :: \sqrt{2} : 1.$$

[*Voyez* encore le n° 285.]

SCOL. 2. — Enfin, l'apothème OP du carré étant égal au demi-côté AP, on a encore $2.OP^2 = OA^2 = 1$;

d'où $OP = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

N° 315. THÉORÈME II. Fig. 270.

Le côté AB *de l'hexagone régulier* ABCDEF *est égal au rayon* OA. Fig. 270.

En effet, l'angle au centre AOB valant les $\frac{4}{6}$ ou les $\frac{2}{3}$ d'*un* angle *droit* (n° 228, *scol.* 3), il en résulte que le triangle OAB est équilatéral (n° 164, *scol.* 2); et par conséquent

$$AB = OA.$$

C'est d'ailleurs ce que nous avons déjà dit précédemment (n° 226).

SCOLIE. — L'apothème $OP = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{AP}^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, en prenant le rayon pour unité.

N° 316. THÉORÈME III. Fig. 270.

Fig. 270. *Le côté* AC *du triangle équilatéral* ACE *est au rayon* :: $\sqrt{3}$: 1.

En joignant les sommets alternatifs A, C, E, de l'hexagone régulier inscrit, on a d'abord un triangle équilatéral inscrit (n° 231). Cela posé, soit K le point d'intersection des droites AC et OB : on aura (n° 280), dans le losange ABCO,

$$4.AB^2 = AC^2 + OB^2;$$

ou bien, puisque AB = OB = OA (n° 315),

$$3.OA^2 = AC^2; \text{ d'où } AC : OA :: \sqrt{3} : 1.$$

Scolie. — L'apothème OK = $\frac{1}{2}$ OA.

Il en résulte que EK, ou la hauteur du triangle ACE, est égale à $\frac{3}{2}$ OA.

N° 317. THÉORÈME IV. Fig. 271.

Fig. 271. *Le côté* AB *du décagone régulier est égal à la plus grande partie du rayon* OA *partagé en moyenne et extrême* (n° 284).

D'abord, l'angle au centre AOB vaut les $\frac{4}{10}$ ou les $\frac{2}{5}$ d'*un* angle *droit* : donc chacun des angles BAO, ABO, vaut les $\frac{4}{5}$ d'*un* angle *droit* (n° 163). Cela posé, partageons l'angle ABO en deux parties égales par la droite BI : le triangle ABO se trouvera décomposé en deux triangles isocèles ABI, BIO, qui donneront AB = BI = OI ; et l'on aura d'ailleurs (n° 272) :

$$OB : OI :: AB : AI, \text{ ou } OA : OI :: OI : AI;$$

donc le rayon OA est partagé au point I en moyenne et extrême (n° 284) ; mais la plus grande partie OI = AB : *donc, etc.*

Scolie. — En nommant x le côté du décagone et prenant le rayon pour *unité* (n° 312), on a

$$1 : x :: x : 1 - x, \text{ ou } x^2 + x = 1;$$

d'où l'on tire $(x+\frac{1}{2})^2=\frac{5}{4}$, ou $x+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{5}$, Fig. 271.

ou enfin $x=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$.

Quant à l'apothème OP, on a toujours $\overline{OP}^2=\overline{OA}^2-\overline{AP}^2$; d'où l'on tire, en faisant $OA=1$ et substituant au lieu de AP la moitié de la valeur trouvée pour x,

$$OP=\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}},$$

N° 318. Théorème V. Fig. 272.

Si un pentagone régulier et un décagone régulier ont même rayon ou sont inscrits au même cercle, Fig. 272.

Le carré du côté AB du pentagone régulier est égal au carré du côté AC du décagone régulier, plus le carré du rayon commun OA.

En joignant les sommets alternatifs du décagone régulier inscrit, on a d'abord un pentagone régulier inscrit (n° 231). Cela posé, soit K le point d'intersection du côté AB avec la bissectrice de l'angle AOC. Les triangles AOK, COK, étant égaux (n° 170), le triangle AKC sera isocèle et semblable au triangle ACB, ce qui donnera

$$\overline{AC}^2=AB\times AK.$$

Maintenant l'angle OBK, moitié de l'angle du pentagone régulier, vaut $\frac{3}{5}$; et l'angle BOK a la même valeur, comme étant égal à l'angle au centre BOC du décagone régulier, plus la moitié COK de cet angle. Il résulte de là que le triangle BKO est isocèle et semblable au triangle AOB: d'où l'on tire encore

$$\overline{OB}^2=AB\times KB.$$

Enfin, ajoutant membre à membre les deux égalités ainsi obtenues, on a

$$\overline{AC}^2+\overline{OB}^2=AB\,(AK+KB),$$

ou $$\overline{AC}^2+\overline{OA}^2=\overline{AB}^2;$$ *C. Q. F. D.*

Scolie. — Par suite des deux théorèmes qui précèdent, la valeur numérique du côté du pentagone régulier est égale à la valeur du rayon multipliée par $\frac{1}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$; et son apothème, à ce même rayon multiplié par $\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$.

N° 319. THÉORÈME VI. Fig. 273.

Fig. 273. *L'arc sous-tendu par le côté* BC *du pentédécagone régulier inscrit est la différence des arcs sous-tendus respectivement par les côtés*, AB et AC, *de l'hexagone et du décagone.*

En effet : l'arc AB vaut $\frac{1}{6}$ de la circonférence, et l'arc AC vaut $\frac{1}{10}$.

Or $\frac{1}{6}-\frac{1}{10}=\frac{1}{15}$; donc l'arc BC est $\frac{1}{15}$ de la circonférence. *Donc, etc.*

Scolie. — Si l'on prolonge le rayon OA jusqu'à la rencontre de la circonférence, en D, et que l'on mène BD, CD, on formera un quadrilatère inscrit ACBD, dont les diagonales seront AB, CD. Cela posé, en appliquant à ce quadrilatère le théorème démontré au *numéro* 286, et observant que l'on a $AB=1$, $AD=2$, $AC=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$ (n° 317, *scol.*), et enfin que les triangles ABD, ACD, sont rectangles en B et en C, on obtient

$$BC=\frac{1}{4}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{3}-\sqrt{15}\right).$$

N° 320. PROBLÈME I. Fig. 274.

Fig. 274. *Étant donné le côté* $AB=c$ *d'un polygone régulier inscrit, et le rayon* $OA=r$ *du cercle, trouver le côté* $AC=C$ *d'un polygone régulier inscrit d'un nombre sous-double de côtés.*

Si l'on achève le quadrilatère inscrit ABCD ayant pour diagonale le diamètre BOD perpendiculaire à AC, et que l'on applique à ce quadrilatère la proposition démontrée au *numéro* 286 [ou au triangle ABD celle du *numéro* 274 (4°)], en faisant $BD=2r$, $BC=AB=c$, et enfin

$$AD=CD=\sqrt{4r^2-c^2},$$

on obtient $$Cr=c\sqrt{4r^2-c^2}:$$

d'où $$C=\frac{c}{r}\sqrt{4r^2-c^2}.$$

Par exemple — En faisant $c=r=1$ (n°s 315 *et* 313), on a, pour le côté du triangle équilatéral,

$$C=\sqrt{3},$$

comme on l'a trouvé au *numéro* 316.

—On obtiendrait de même le côté du pentagone régulier inscrit (n°s 317 *et* 318).

— Si l'on fait $r = 1$, et $c = \sqrt{2}$ (n° 313), on trouve Fig. 274.

$$C = 2,$$

ce qui doit être, d'après une remarque faite au *numéro* 233, puisque le diamètre du cercle peut être considéré comme un polygone inscrit de *deux* côtés.

N° 321. PROBLÈME II. Fig. 274.

RÉCIPROQUEMENT : — *Étant donné le côté* AC $= C$ *d'un polygone inscrit, et le rayon* OA $= r$ *du cercle, trouver le côté* AB $= c$ *d'un polygone régulier inscrit d'un nombre double de côtés.*

Pour cela, soit achevé le quadrilatère ABCD, comme dans le *numéro* précédent. Alors, il suffit d'observer que dans le triangle rectangle BAD, AB est moyen proportionnel entre l'hypoténuse BD et le segment BI. Car, en faisant BD $= 2r$, et

$$BI = BO - OI = BO - \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{AI}^2} = r - \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}C^2},$$

on obtient $$c^2 = 2r\left(r - \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}C^2}\right)$$

ou bien $$c^2 = r\left(2r - \sqrt{4r^2 - C^2}\right).$$

— *Par exemple* — Si l'on veut trouver le côté de l'octogone régulier inscrit, il faudra faire (n°s 313 *et* 314)

$$r = 1 \quad \text{et} \quad C = \sqrt{2} : \quad \text{d'où} \quad c^2 = 2 - \sqrt{2}.$$

— Pour trouver le côté du dodécagone, il faudrait faire

$$C = 1 \ (\text{n° } 315) : \quad \text{d'où} \quad c^2 = 2 - \sqrt{3}.$$

N° 322. REMARQUE. — Les deux problèmes (n°s 320 et 321) et les divers théorèmes qui précèdent, ainsi qu'un autre problème dont nous avons cru devoir placer la résolution un peu plus loin (n° 331), fournissent les moyens de déterminer géométriquement les dimensions relatives des polygones réguliers compris dans les catégories suivantes :

1° les polygones de.. 4, 8, 16, 32. ... côtés (n° 314);
2° .... 3, 6, 12, 24 .... (n°s 315, 316);
3° .... 5, 10, 20, 40 .... (n°s 317, 318);
4° .... 15, 30, 60, 120 .... (n° 319).

On peut y parvenir encore pour les polygones réguliers dans lesquels le nombre des côtés est représenté par la formule $2^n + 1$, n étant un nombre entier, et $2^n + 1$ un nombre premier; mais la question, relativement à ces sortes de polygones, sort tout-à-fait des *élémens*. — (*Voyez* les *Recherches Arithmétiques* de M. GAUSS, traduction de M. POULLET-DELISLE.)

Fig. 274. De plus, les formules précédentes (nos 320 et 321) n'ayant rien qui suppose que les arcs AB et AC (fig. 274) soient des sous-multiples de la circonférence, il s'ensuit qu'on peut les employer généralement à résoudre les deux problèmes suivans :

1° *Déterminer la corde du double d'un arc, connaissant la corde de cet arc;*

2° Réciproquement : — *Déterminer la corde de la moitié d'un arc, connaissant la corde de cet arc.*

On peut encore, par un moyen analogue à celui qu'on a employé ci-dessus (n° 319, *scol.*), résoudre la question suivante :

Étant données les cordes de deux arcs, trouver la corde de leur somme ou de leur différence.

C'est ainsi que l'on a pu parvenir à déterminer les valeurs numériques des cordes d'un très grand nombre d'arcs.—(*Voyez*; à la fin du volume, la *Table des Cordes*.)

N° 323. Problème III. Fig. 275.

Fig. 275. *Étant donnés, le côté ab=c d'un polygone régulier inscrit, et le rayon Oa=r du cercle, trouver le côté AB=C du polygone circonscrit semblable.*

Les côtés AB et *ab* des deux polygones étant proportionnels à leurs apothèmes OP et O*p* (n° 268), on a :

$$C : c :: r : \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}c^2} :: 2r : \sqrt{4r^2 - c^2};$$

d'où

$$C = \frac{2cr}{\sqrt{4r^2 - c^2}}.$$

N° 324. Problème IV. Fig. 275.

Réciproquement :— *Étant donné le côté AB=C d'un polygone regulier circonscrit et le rayon OP=r du cercle, trouver le côté ab=c du polygone inscrit semblable.*

Les côtés *ab* et AB des deux polygones étant proportionnels à leurs rayons O*a* et OA (n° 268), on a

$$c : C :: r : \sqrt{r^2 + \frac{1}{4}C^2} :: 2r : \sqrt{4r^2 + C^2};$$

d'où

$$c = \frac{2Cr}{\sqrt{4r^2 + C^2}}.$$

§ II. — *Propositions générales relatives au Rapport de la Circonférence au Diamètre.*

N° 325. La *rectification* d'une courbe est une opération qui consiste à déterminer le rapport de la longueur de cette courbe, supposée redressée ou *rectifiée*, à l'unité linéaire rectiligne.

On peut toujours y parvenir approximativement en regardant la courbe comme un polygone, conformément aux considérations qui ont été développées dans le *numéro* 240 et dans les suivans; on obtient ainsi un degré d'approximation d'autant plus élevé que les points de division de la courbe sont plus multipliés.

Ainsi, en regardant le cercle comme un polygone régulier, on en conclut sur le champ que

Les circonférences de cercles, étant des lignes semblables (n° 269), *sont proportionnelles à leurs rayons et à leurs diamètres,*

Et que par conséquent, il suffit de déterminer une fois pour toutes, *le rapport* constant *de la circonférence au rayon* ou *au diamètre :* — le rayon *ou* le diamètre d'une circonférence quelconque, multiplié par ce rapport, donne toujours la longueur de la circonférence rectifiée.

Bien que ces propositions soient incontestables, cependant, pour ne laisser aucun doute sur leur exactitude, nous allons les démontrer d'une autre manière; puis nous déterminerons la valeur numérique du rapport dont il vient d'être question.

N° 326. LEMME. Fig. 276.

Deux circonférences concentriques étant données, on peut toujours, — 1° supposer inscrit à la plus grande un polygone régulier dont les côtés ne rencontrent pas la plus petite,

et — 2° *supposer circonscrit à la plus petite un polygone régulier dont les côtés, non prolongés, ne rencontrent pas la plus grande* [de sorte que, dans les deux cas, les côtés du polygone soient compris entre les deux circonférences].

Fig. 276. Soit O (fig. 276) le centre commun des deux circonférences. — Par un point I pris sur la circonférence intérieure, menons une tangente terminée à la circonférence extérieure, en A et en B.

Cela posé, quelque petit que soit l'arc ACB sous-tendu par la corde AIB, on peut toujours supposer la grande circonférence partagée en parties égales plus petites que cet arc : soit MCN une de ces parties, ayant pour corde une parallèle MN à la droite AIB, hypothèse qui est toujours admissible (*). Alors, la droite MN est le côté d'un polygone régulier inscrit à la grande circonférence, lequel ne rencontre pas la petite.

Maintenant, menons les rayons OM, ON; et soient P, Q, leurs points d'intersection avec la droite AIB : l'angle POQ étant une partie aliquote de 4 angles *droits*, PQ sera le côté d'un polygone régulier circonscrit à la petite circonférence, lequel ne rencontrera pas la grande. — *Donc, etc.*

Fig. 277. *Scolie.* — On peut également appliquer le théorème précédent à deux arcs de cercles concentriques AB, A'B', correspondant au même angle au centre AOB (fig. 277), en menant la tangente par le milieu de l'arc A'B', en opérant la division en parties égales, sur l'arc AB, au lieu de l'opérer sur la grande circonférence entière [opération qui, dans ce cas, produira toujours un nombre impair d'arcs partiels], et enfin en remplaçant, dans l'énoncé, les périmètres des polygones, par des *lignes polygonales régulières* (n°s 226; et 228, *solies* 1er et 3e).

(*) Il ne s'agit ici que de concevoir la possibilité de cette corde parallèle à la tangente. Mais si on voulait la construire effectivement, il faudrait : — 1° mener le rayon OIC, — 2° prendre de part et d'autre du point C, deux arcs, CM, CN, égaux entre eux et sous-multiples de la demi-circonférence, et en même temps moindre que CA ou CB, — puis 3° lier par une droite les points M et N.

N° 327. Théorème VII. Fig. 278.

Les circonférences, OA, O'A', *sont proportionnelles à leurs rayons.* Fig. 278.

En effet, admettons pour un instant que l'on n'ait pas

$$circ.OA : circ.O'A' :: OA : O'A'; \quad \{1\}$$

et soit O'A″ la quatrième proportionnelle aux *trois* longueurs *circ.*OA, *circ.*O'A', et OA; de sorte que l'on ait la proportion

$$circ.\ OA : circ.\ O'A' :: OA : O'A''. \quad \{2\}$$

Soit supposé de plus, $O'A'' < O'A'$.

Cela posé, après avoir décrit la circonférence O'A″, *circonscrivons*-y un polygone régulier dont les côtés ne rencontrent pas la circonférence O'A', et dont nous désignerons le périmètre par *périm.* O'A″. — Circonscrivons de même au cercle OA, un polygone régulier semblable au premier, et dont nous désignerons le périmètre par *périm.* OA. — Nous aurons (n° 268) :

$$périm.OA : périm.O'A'' :: OA : O'A''. \quad \{3\}$$

Or, en comparant les proportions {2} et {3}, on en tire :

$$circ.\ OA : circ.\ O'A' :: périm.\ OA : périm.\ O'A'', \quad \{4\}$$

proportion absurde, puisque l'on a

$$circ.\ OA < périm.\ OA, \quad \text{et } circ.\ O'A' > périm.\ O'A''.$$

[On démontrerait de la même manière, que le quatrième terme de la proportion {1} ne peut être supposé trop petit. — Pour cela, on *inscrirait* à la circonférence O'A″ [> O'A'], un polygone régulier dont les côtés ne rencontrent pas la circonférence O'A', et un polygone régulier semblable à la circonférence OA : *etc.*].

Maintenant, l'absurdité de la proportion {4} que l'on obtient par la comparaison des proportions {2} et {3}, ne pouvant provenir que de la première des deux puisque l'autre résulte d'une proposition démontrée (n° 268), il s'ensuit que la proportion {2} est fausse; ce qui prouve la vérité de la proportion {1}.

N. B. — Il est à observer que dans la démonstration précédente, on a employé un tour de raisonnement qui diffère de celui dont on a fait usage dans les cas analogues, c'est-à-dire dans la théorie des angles (n° 121) et dans celle des lignes proportionnelles (n° 259). Or, le nouveau mode de raisonnement se trouve nécessité par cette circonstance, que les arcs décrits de rayons inégaux ne sont pas comparables par superposition (n° 63, *scol.* 2). — Quant à la différence des constructions à employer dans les deux hypothèses successives qu'exige la démonstration, elle tient à la convenance de conserver dans les proportions, un *rapport commun*, qui est celui des deux rayons OA, O'A'.

Corollaire. — Le rapport de la circonférence au rayon est une quantité constante (*voyez* le n° 325).

On représente ordinairement par π la *moitié* de ce rapport constant, ou le *rapport de la circonférence au diamètre;* et alors, en nommant c une circonférence quelconque et r son rayon, on a $c = 2\pi r$: telle est, *en fonction* de π et de r, la valeur de la *circonférence rectifiée.*

On voit que le nombre π exprime encore la longueur de la circonférence dont le diamètre est égal à *l'unité* de longueur, ou celle de la demi-circonférence dont le rayon est pris pour *unité.*

N° 328. THÉORÈME VIII. Fig. 277.

Fig. 277. *Les arcs*, AB, A'B', *correspondant au même angle au centre* AOB, *sont proportionnels à leurs rayons ; — et réciproquement.*

En effet, toute circonférence entière pouvant être considérée comme un arc correspondant à 4 angles *droits* (n° 120), on a (n° 121) :

arc A B : *circ.* OA :: AOB : 4 *droits*,

et *arc* A'B' : *circ.* OA' :: AOB : 4 *droits ;*

d'où *arc* AB : *arc* A'B' :: *circ.* OA : *circ.* OA' :: OA : OA'.

La *réciproque* se démontre par l'absurde, ou se conclut du *numéro* 49.

Corollaire 1er. — Les *cordes*, les *flèches*, les *sinus*..... des arcs qui correspondent à un même angle au centre, étant proportionnels aux rayons qui leur appartiennent, ainsi que ces arcs eux-mêmes (n° 251 *et* 269), on est autorisé à établir que,

Dans deux cercles différens, — *Les arcs correspondant au même angle au centre sont semblables;* — et ces arcs ont pour lignes homologues (nos 254 *et* 268), leurs sinus respectifs, leurs cordes, leurs flèches.

Réciproquement : — A des arcs semblables correspondent toujours des angles au centre égaux entre eux.

Ce qu'on vient de dire dans ce corollaire, relativement aux arcs, est également applicable aux secteurs (*voyez* le n° 125).

Coroll. 2. — Comme les arcs correspondant au même angle au centre comprennent le même nombre de degrés, il résulte encore du théorème précédent, que

Dans deux cercles différens, les longueurs absolues des degrés ou des grades rectifiés, sont proportionnelles à leurs rayons.

N° 329. Théorème IX. Fig. 279.

Deux arcs quelconques, AB, A'B', *sont proportionnels aux produits des angles*, AOB, A'OB', *par les rayons correspondans*, OA, OA'. Fig. 279.

Supposons que les deux arcs aient même centre, et que leurs rayons, OA, OA', aient la même direction. Soit de plus B'' le point d'intersection du rayon OB' [prolongé s'il est nécessaire] avec la circonférence OA. Nous aurons (n° 121) :

AB : AB'' :: AOB : AOB'',

puis (n° 328) AB'' : A'B' :: OA : OA';

d'où, à cause de AOB'' = A'OB',

AB : A'B' :: AOB × OA : A'OB' × OA'; *C. Q. F. D.*

Fig. 279. COROLLAIRE 1er. — On tire de là :

$$AOB : A'OB' :: \frac{AB}{OA} : \frac{A'B'}{OA'}.$$

Ainsi, quand on compare plusieurs angles au centre dans des cercles de rayons différens,

Les angles au centre sont proportionnels aux quotiens des arcs par les rayons correspondans ;

Et — *Si les arcs ont même longueur absolue, les angles au centre sont réciproquement proportionnels aux rayons.*

COROLL. 2. — Si l'on fait $A'B' = OA'$, et $A'OB' = 1$, on aura

$$AOB = \frac{AB}{OA};$$

c'est à-dire que :

Si l'on prend pour unité d'angle, l'angle correspondant à l'arc qui, rectifié, est équivalent au rayon, l'angle au centre a pour mesure le rapport de l'arc au rayon.

Scolie. — Les arcs et les rayons étant des quantités d'espèces différentes, on peut les rapporter respectivement à telles unités que l'on veut : ces unités sont tout-à-fait indépendantes l'une de l'autre. — Ordinairement, on prend pour *unité d'arc* (n° 122) [dans chaque cercle donné], le *quart de la circonférence* ; mais quelquefois aussi *on rapporte l'arc et le rayon à la même unité linéaire* ; et alors, l'unité des arcs, supposée rectifiée, n'est autre chose que l'unité linéaire rectiligne.

§ III. — *Détermination du Rapport numérique de la Circonférence au Diamètre.*

N° 330. Ce qui précède (nos 313 et *suiv.*) fournit divers moyens d'obtenir le rapport de la circonférence au diamètre.

Ainsi, par exemple, le théorème I (n° 314) donnant la valeur du côté du carré inscrit à un cercle dont le rayon est l'*unité* [et l'on pourrait tout aussi bien prendre l'hexagone (n° 316), le décagone (n° 317), ou même le pentédécagone (n° 319)], il s'ensuit que si l'on multiplie par 4 la valeur du côté de ce carré, on aura son périmètre. Supposons ensuite que l'on ait déterminé, par le problème II (n° 321), le côté

de l'octogone inscrit au même cercle : on aura le périmètre de cet octogone en multipliant son côté par 8; et l'on obtiendrait de la même manière les périmètres des polygones de 16, de 32, de 64.... côtés, inscrits au même cercle.

Maintenant, le problème III (n° 323), appliqué successivement aux divers polygones dont nous venons de parler, donnerait les côtés, et par suite les périmètres des polygones circonscrits de même espèce que chacun d'eux.

Or, il résulte du théorème démontré au *numéro* 243, ou plus simplement, du lemme établi au *numéro* 80, que dans la série des opérations que l'on vient d'indiquer, les périmètres des polygones inscrits vont sans cesse en augmentant, tandis qu'au contraire les périmètres des polygones circonscrits vont sans cesse en diminuant. Et comme ils ont pour *limite* commune (n° 240) la circonférence, qui se trouve de plus en plus resserrée entre eux, il est clair que l'on peut pousser les calculs assez loin pour que le périmètre de l'un des polygones inscrits et celui du polygone circonscrit correspondant, ne diffèrent plus dans tel ordre que l'on voudra d'unités fractionnaires décimales. Les deux périmètres ainsi obtenus pouvant alors être considérés comme identiques, il est permis de prendre leur valeur commune pour celle de la circonférence même : la moitié de cette valeur est le rapport cherché. — (*Voyez* la *Géométrie* de M. Lacroix.)

Au lieu de chercher la valeur approchée d'une circonférence dont le rayon est déterminé d'avance [comme nous venons d'en indiquer le moyen], on peut au contraire chercher la valeur du rayon, pour une circonférence de longueur déterminée. Cette méthode nous paraissant préférable par la simplicité des calculs, qui n'exigent, comme on va le voir, que la détermination de *moyennes alternativement par différence et par quotient*, nous l'exposerons avec quelques détails; et pour cela, nous avons à résoudre d'abord le problème indiqué ci-dessus (n° 322).

N° 331. PROBLÈME V. Fig. 280.

Fig. 280. *Étant donnés, le rayon* $OA = R$, *et l'apothème* $OP = r$, *d'un polygone régulier* ayant AB pour côté, *trouver le rayon* R' *et l'apothème* r' *d'un polygone régulier isopérimètre* (n° 240) *et d'un nombre double de côtés.*

Soit AOB l'angle au centre du polygone proposé. — L'angle au centre du nouveau polygone devant être moitié de l'angle au centre du polygone donné, si l'on prend, sur le prolongement de OP, une longueur OC égale à OA, et que l'on mène les droites AC et BC, l'angle ACB sera l'angle du polygone cherché. De même, le côté de celui-ci devant être moitié du côté du premier polygone, si l'on mène OA' perpendiculaire à AC, et A'P'B' parallèle à AB, A'B' sera le côté demandé (n°s 164 *et* 260). Alors, CA' [=CB'] sera le rayon, et CP' l'apothème, de ce même polygone.

Il ne s'agit plus que de déterminer $CA' = R'$ et $CP' = r'$. Pour cela on a d'abord :

$$CP' = \tfrac{1}{2}\,CP, (\text{n° } 268), = \tfrac{1}{2}(CO + OP) = \tfrac{1}{2}(OA + OP);$$

ou bien $$r' = \tfrac{1}{2}(R + r).$$

Secondement, dans le triangle rectangle CA'O, on a (n° 274, 3°)

$$CA'^2 = CO \times CP', \quad \text{ou} \quad R' = \sqrt{Rr'};$$

et comme r' est déjà déterminé, le problème est résolu.

N° 332. REMARQUES. — Dans le nouveau polygone, le rayon est moindre que dans le premier; c'est le contraire pour les apothèmes : il est facile, en effet, de reconnaître sur les formules précédentes, que l'on a

$$r' > r \quad \text{et} \quad R' < R.$$

Ainsi, la différence entre le rayon et l'apothème est moindre pour le nouveau polygone, que pour le premier. Si l'on fait subir à ce nouveau polygone, la même transformation qu'au premier, la différence entre le rayon et l'apothème sera

encore moindre. Et, en continuant ainsi à faire subir la même transformation aux polygones successivement obtenus, on pourra, en poussant le calcul suffisamment loin, parvenir à un polygone, toujours du même périmètre constant, et dont le rayon différera de l'apothème, d'une quantité moindre que toute grandeur donnée.

En effet, en représentant par R, r, et c, le rayon, l'apothème, et le côté de l'un des polygones successifs, on a

$$R^2 - r^2 = \frac{c^2}{4} \quad (\text{n}^\circ\ 275,\ \textit{coroll.}).$$

Il en résulte (*voyez* la *note* de la *page* 218) :

$$(R-r)\ (R+r) = \frac{c^2}{4};$$

d'où, en représentant par r' l'apothème du polygone d'un nombre de côtés double de celui que l'on considère,

$$R-r = \frac{c^2}{4(R+r)} = \frac{c^2}{8r'} \quad (\text{n}^\circ\ 331).$$

Or, c peut devenir plus petit que toute quantité donnée, pourvu que l'on multiplie suffisamment le nombre des côtés du polygone ; et d'ailleurs r' va continuellement en augmentant : *donc, etc.*

Maintenant, il est visible que, par la suite des transformations, le périmètre du polygone tend continuellement à prendre la figure de la circonférence isopérimètre, circonférence dont le rayon est intermédiaire entre les rayons et les apothèmes des polygones successifs. Or, par hypothèse, l'opération a été poussée assez loin pour que la différence du dernier rayon au dernier apothème fût moindre que toute grandeur donnée, et pût être négligée. Donc le rayon de la *circonférence limite*, qui est compris entre ce rayon et cet apothème, se trouvera déterminé à tel degré d'approximation que l'on voudra ; et comme on connaît aussi la circonférence, équivalente au périmètre constant des polygones successifs, il sera facile d'avoir le rapport de l'un à l'autre.

N° 333. Passons actuellement à l'application numérique du procédé qui vient d'être indiqué. Ayant la faculté d'employer un quelconque des polygones réguliers dont il a été traité ci-dessus au *premier paragraphe*, nous prendrons de préférence le *carré*. Alors, en représentant son côté par 1, son périmètre, ainsi que celui de tous les polygones successifs, y compris la *circonférence limite*, vaudra 4. Le nombre irrationnel $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ sera son rayon, et la fraction $\frac{1}{2}$, son apothème.

Observons de plus, que ces nombres $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, qui représentent respectivement l'apothème et le rayon du carré, peuvent être considérés, le premier comme moyen par différence entre o et 1, et le second comme moyen par quotient entre 1 et $\frac{1}{2}$; ce qui revient d'ailleurs à prendre pour premier polygone, celui de 2 côtés (n° 233), dans lequel l'apothème serait o, le rayon 1, et le périmètre 4.

— De là résulte ce

THÉORÈME REMARQUABLE :

Une suite de nombres dont les deux premiers sont o *et* 1, *et dont les autres sont alternativement, à partir du troisième inclusivement, moyens par différence et moyens par quotient entre les deux qui les précèdent immédiatement, converge sans cesse vers la valeur du rayon d'une circonférence égale à* 4.

Fig. 281. On peut figurer ce théorème géométriquement par la construction suivante : — Soit AOO′ (fig. 281) un triangle isocèle, rectangle en O; et soit A′ le milieu de O′A. — Prolongeons OO′ d'une quantité O′O″ égale à O′A′; menons A′O″; et soit A″ le milieu de cette droite. — Prolongeons OO′O″ d'une quantité O″O‴ égale à O″A″, etc..... : les droites OO′, O′O″, O″O‴... diminueront sans cesse en convergeant vers le rayon d'une circonférence égale à 4. OA. — De plus, si l'on *projette* (n° 83, *scol.*) les droites O′A′, O″A″..., sur la droite OO′O″O‴..., on aura une autre série de droites qui augmenteront sans cesse en convergeant aussi vers la même limite.

En effet, si l'on rapproche cette construction de celle qui a été donnée pour la résolution du problème v (n° 331), il sera facile de reconnaître que OA étant la moitié du côté du carré inscrit, — 1° les droites O′O″, O″O‴, O‴O⁗.... sont respectivement les moitiés des rayons du carré, de l'octogone isopérimètre, du polygone de 16 côtés...; — et 2° que les projections,

sur $OO'O''O'''$..., des droites $O'A'$, $O''A''$, $O'''A'''$... sont respectivement Fig. 281.
les moitiés des apothèmes des mêmes polygones.—Or, il résulte évidemment de là, que toutes ces droites tendent vers la moitié de la valeur du rayon d'une circonférence égale à 8.OA, ou vers celle du rayon d'une circonférence égale à 4.OA.

N° 334. Voici maintenant le tableau du calcul numérique, dans lequel r et R, r' et R', r'' et R'',... représentent respectivement les apothèmes et les rayons des polygones de 2, de 4, de 8.... côtés, calculés jusqu'à la *septième* décimale.

Nombre des côtés.	APOTHÈME.	RAYON.
2.....	$r = 0{,}0000000$	$R = 1{,}0000000$
4.....	$r^{I} = 0{,}5000000$	$R^{I} = 0{,}7071068$
8.....	$r^{II} = 0{,}6035534$	$R^{II} = 0{,}6532815$
16.....	$r^{III} = 0{,}6284174$	$R^{III} = 0{,}6407289$
32.....	$r^{IV} = 0{,}6345731$	$R^{IV} = 0{,}6376435$
64.....	$r^{V} = 0{,}6361083$	$R^{V} = 0{,}6368754$
128.....	$r^{VI} = 0{,}6364919$	$R^{VI} = 0{,}6366836$
256.....	$r^{VII} = 0{,}6365878$	$R^{VII} = 0{,}6366357$
512.....	$r^{VIII} = 0{,}6366117$	$R^{VIII} = 0{,}6366237$
1024.....	$r^{IX} = 0{,}6366177$	$R^{IX} = 0{,}6366207$
2048.....	$r^{X} = 0{,}6366192$	$R^{X} = 0{,}6366199$
4096.....	$r^{XI} = 0{,}6366195$	$R^{XI} = 0{,}6366197$
8192.....	$r^{XII} = 0{,}6366196$	$R^{XII} = 0{,}6366196$

Ainsi, une circonférence égale à 4 a pour rayon 0,6366196..., ou pour diamètre 1,2732392...; d'où il résulte que le rapport de la circonférence au diamètre [rapport que nous avons représenté par π (n° 327, *coroll.*)], vaut

$$\frac{40000000}{12732392} = \frac{10000000}{3183098} = 3{,}14159\ldots$$

N° 335. Les calculs précédens sont susceptibles de plusieurs simplifications.

D'abord, on sait que dans l'extraction de la racine carrée, lorsqu'on a calculé plus de la moitié des chiffres décimaux, les autres s'obtiennent par la division (*voyez l'Arithmétique*).

Secondement, on voit qu'à partir du polygone de 512 côtés, les valeurs de l'apothème et du rayon se confondent dans plus de la moitié de leurs chiffres décimaux ; d'où il résulte que depuis ce point, on peut prendre des moyens par différence au lieu de moyens par quotient (*voyez l'Algèbre*).

Troisièmement enfin, dans une série dont chaque terme est la demi-somme des *deux* qui le précèdent immédiatement, les termes convergent sans cesse vers une limite qui a pour valeur, le premier terme, augmenté ou diminué [suivant que le second est plus grand ou plus petit que le premier] des *deux tiers* de la différence des deux premiers termes.

Pour démontrer cette dernière proposition, soit a et $a \pm d$ les deux premiers nombres de la série ; les autres pourront s'écrire ainsi :

$$a \pm \frac{2}{3}d \mp \frac{1}{6}d,$$

$$a \pm \frac{2}{3}d \pm \frac{1}{12}d,$$

$$a \pm \frac{2}{3}d \mp \frac{1}{24}d, \ldots \text{ etc.};$$

or, tous ces nombres ont évidemment pour limite, $a \pm \frac{2}{3}d$; d'où il résulte que le dernier rayon a pour valeur

$$0{,}6366357 - 0{,}0000160 = 0{,}6366197.$$

Il y aurait encore à faire, sur le calcul précédent, plusieurs autres observations de détail. Ainsi, nous n'avons présenté le tableau que des 7 premières décimales des rayons et des apothèmes ; mais il est facile de concevoir que ces 7 premières décimales ne sauraient être exactes partout, si les opérations qui y conduisent, particulièrement dans le commencement du calcul, n'étaient poussées beaucoup plus loin.

[*Voyez* les *Élémens de Géométrie de* Schwab, ainsi que les *Annales de Mathématiques*, tome VI, *pages* 192 et *suiv.*, et tome XVII, *page* 148. — *Voyez* aussi, à la fin de l'*Arithmétique* de M. Bourdon, 12e *édition*, une *Note sur les calculs approximatifs.*]

N° 336. La valeur que nous venons d'obtenir pour le nombre π, convertie en fraction continue (*voyez l'Arithmétique*), donne pour premières réduites les 4 suivantes :

$$\frac{3}{1}, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}.$$

Le premier rapport $\frac{3}{1}$ est très peu approché [à $\frac{1}{7}$ seulement, de sa véritable valeur], et n'est presque jamais employé. — Le second, $\frac{22}{7}$, qui porte le nom d'*Archimède*, est assez usité; il est exact à moins d'*un ou deux millièmes* près. — Le troisième $\frac{333}{106}$ porte le nom de *Rivard;* on ne l'emploie jamais, parce que le suivant, avec le même nombre de chiffres, donne une valeur beaucoup plus approchée. — Enfin, le dernier $\frac{355}{113}$, qui porte le nom de *Métius*, a l'avantage de pouvoir être facilement retenu, en raison de ce qu'on l'obtient en partageant le nombre 113355 en 2 tranches de 3 chiffres; il est exact à moins d'*un millionième* près.

On a, par d'autres méthodes, poussé le calcul de la valeur de π jusqu'à 140 décimales. Voici les 20 premières, qui sont plus que suffisantes dans les applications ordinaires :

$$\pi = 3{,}14159\ 26535\ 89793\ 23846.$$

Voici, de plus, le logarithme de ce nombre :

$$log.\ \pi = 0{,}49714\ 98726\ 94153\ 85435.$$

N° 337. Il est souvent utile de connaître le nombre des degrés ou des grades contenus dans l'arc qui, rectifié, est équivalent au rayon (n° 329, *coroll.* 2) : on y parvient en divisant 180° ou 200^{gr} par le nombre π; et l'on obtient ainsi 57°17′45″, ou 63^{gr},66198. En multipliant ces nombres par la longueur d'un arc, donné en parties du rayon, on a le nombre des degrés ou des grades contenus dans cet arc.

N° 338. Terminons ce chapitre par une application numérique.

PROBLÈME. — *Trouver la longueur, en mètres, d'un arc de 45°20′, dans un cercle d'un rayon égal à 5^m,4.*

En nommant a la longueur cherchée, on aura

$$a = \frac{5^m{,}4 \times 45°20' \times \pi}{180°} \text{ (n° 330 et } suiv.);$$

$$\begin{aligned}
log.5{,}4 \ldots &= 0{,}7323938\\
log.45°20' &= 1{,}6554177\\
log.\pi \ldots\ldots &= 0{,}4971499\\
C.log.180 \ldots &= \underline{7{,}7447275}\\
log.a \ldots\ldots &= 0{,}6306889 = log.4{,}272567.
\end{aligned}$$

Ainsi, $a = 4^m{,}2726$, à *un déci-millimètre* près.

CHAPITRE IV.

DES AIRES.

N° 339. Nous avons dit dans l'introduction (n° 2), que l'on nommait Aire, *l'étendue considérée dans une surface.* Cette étendue, pour être *mesurée*, c'est-à-dire pour être *évaluée en nombre*, doit être rapportée à une unité. Or, la figure qui offre le plus de commodité à cet égard, et que l'on emploie ordinairement, est le *carré construit sur un côté égal à l'unité de longueur;* et alors, *confondant l'étendue avec sa mesure*, on nomme Aire, le *rapport d'une étendue superficielle, à l'étendue superficielle du carré construit sur l'unité de longueur.* — De là vient que l'on nomme *quadrature*, l'évaluation d'une aire.

§ Ier. — *Mesure des Aires.*

N° 340. Théorème I. Fig. 282.

Fig. 282. *Deux rectangles*, AD, AF, *de même base* AB, *sont proportionnels à leurs hauteurs*, AC, AE, — [c'est-à-dire : les aires de deux rectangles qui ont des bases égales, sont proportionnelles à leurs hauteurs].

D'abord, si les hauteurs étaient égales, en même temps que les bases, les rectangles seraient nécessairement égaux (n° 200); et de plus, il est évident que les rectangles de même base augmentent ou diminuent en même temps que leurs hauteurs.

Cela posé, faisons coïncider les bases AB; les côtés adjacens prendront la même direction, chacun à chacun. Admettons maintenant, pour fixer les idées, que AE soit contenu *deux*

fois dans AC, de A en G, avec un reste GC moindre que AE; puis, dans cette hypothèse, menons à AB la parallèle GI. Il est clair que le rectangle EI sera égal au rectangle AF, et que le rectangle GD sera moindre que AF; par conséquent, le rectangle AD contiendra autant de fois le rectangle AF, en nombre entier, que la hauteur AC contient la hauteur AE. Fig. 282.

On prouverait de même, en portant le reste GC sur AE et menant des parallèles, que le rectangle AF contient autant de fois le rectangle GD, en nombre entier, que AE contient GC; et en continuant ainsi, on démontrerait

1° Que — *Les quotiens successifs fournis, d'un côté par les rectangles, de l'autre par les hauteurs correspondantes, sont constamment égaux deux à deux;*

Et 2° que — *La division de deux rectangles successifs l'un par l'autre ne peut donner de reste sans que les hauteurs correspondantes ne donnent aussi un reste; — et réciproquement.*

De là il résulte (*voyez* les nos 63 et *suiv.;* et le n° 121) que le rapport des rectangles AD, AF, est identiquement égal au rapport des hauteurs AC, AE: c'est-à-dire que l'on a

AD : AF :: AC : AE; *C. Q. F. D.*

Corollaire. — La base et la hauteur d'un rectangle pouvant être prises l'une pour l'autre (n° 194), il s'ensuit que *Deux rectangles de même hauteur sont proportionnels à leurs bases.*

N° 341. Théorème II. Fig. 283.

Deux rectangles quelconques, AD, AG, *sont proportionnels aux produits de leurs bases par leurs hauteurs.* Fig. 283.

On peut placer les rectangles de manière qu'ils aient un angle commun A. Cela posé, soit I le point d'intersection de CD avec EG, prolongé s'il est nécessaire; on aura :

Fig. 283. 1° en comparant les rectangles AD et AI.... AD : AI :: AB : AE ; 2° en comparant les rectangles AI et AG.... AI : AG :: AC : AF ; d'où, en multipliant par ordre et supprimant AI,

$$AD : AG :: AB \times AC : AE \times AF.$$

Scolie. — On pourrait étendre ce théorème, ainsi que le précédent, à des parallélogrammes qui auraient les mêmes angles, en remplaçant, dans les énoncés, la base et la hauteur par deux côtés consécutifs.

Fig. 284. N° 342. Remarque *générale sur la mesure des aires.* — Comparons le rectangle quelconque AD (fig. 284) au carré *ad* ; nous aurons d'abord

$$AD : ad :: AB \times AC : ab \times ac.$$

Mais si l'on suppose que *ab* [= *ac*] soit l'unité linéaire, et que l'aire du carré *ad* ait été prise pour unité de surface, comme nous l'avons admis plus haut (n° 339), alors la proportion précédente deviendra simplement

$$AD = AB \times AC.$$

Ainsi — *Tout rectangle a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur :* — c'est-à-dire que le rapport abstrait de l'aire du rectangle AD à *l'unité superficielle*, est égal au produit des rapports abstraits des lignes AB et AC à l'unité linéaire, *dans l'hypothèse où l'unité superficielle est le carré construit sur l'unité linéaire.*

Fig. 285. Par exemple, soit AB = 3 et AC = 4 (fig. 285); partageons AB en 3 parties égales et AC en 4 parties égales entre elles ainsi qu'aux premières ; puis menons, par les points de division, des parallèles aux côtés du rectangle AD : nous aurons décomposé ce rectangle en $4 \times 3 = 12$ carrés unitaires.

De là vient que l'on nomme quelquefois *rectangle de deux nombres*, leur produit.

On se sert aussi du nom commun de *dimension* (voyez la *note* de la *page* 3) pour désigner la base et la hauteur d'un rectangle ; et alors on dit — qu'*Un rectangle a pour mesure le produit de ses deux dimensions.*

La mesure d'une surface quelconque est toujours exprimée, comme on le verra dans ce chapitre, soit par un produit de *deux facteurs linéaires*, soit par une somme de produits de cette espèce : ces deux facteurs se nomment encore *dimensions*, quelle que soit la figure à évaluer.

Tout carré a pour mesure la seconde puissance de son côté. — De là le mot *carré* pour désigner la seconde puissance d'un nombre.

N° 343. Théorème III. Fig. 286.

Tout parallélogramme ABCD *est équivalent à un rectangle de même base et de même hauteur.* Fig. 286

En effet, prolongeons le côté CD; et par les extrémités du côté opposé AB élevons les perpendiculaires AE, BF, terminées à la droite CD en E et en F. Cela fait, si nous retranchons de la figure totale ABDE, le triangle ACE, il nous restera le parallélogramme AD; et si nous retranchons de la même figure le triangle BDF, nous aurons pour reste le rectangle AF; or, les deux triangles ACE, BDF, sont égaux (n° 170) : donc le parallélogramme AD est équivalent au rectangle AF de même base AB et de même hauteur AE.

Scolie. — *Tout parallélogramme* AD *a pour mesure le produit de sa base* AB *par sa hauteur* AE.

N° 344. Théorème IV. Fig. 144.

Tout triangle NOP *est équivalent à la moitié d'un rectangle de même base et de même hauteur.* Fig. 144.

En effet, si par les points N et O, on mène respectivement à OP et à NP les parallèles NM et OM, on formera un parallélogramme MP double du triangle (n° 196, *scol.* 2), et qui aura même base et même hauteur que lui ; or, le parallélogramme est équivalent à un rectangle de même base et de même hauteur : *donc, etc.*

Scolie. — *Deux triangles sont équivalens lorsqu'ils ont deux côtés égaux chacun à chacun comprenant des angles supplémentaires.*

N° 345. REMARQUE *sur la mesure du triangle.* — Tout polygone étant décomposable en triangles, l'évaluation de l'aire d'un polygone quelconque se ramène toujours à celle de l'aire du triangle; c'est pourquoi il est utile d'avoir plusieurs expressions de cette dernière; nous allons indiquer les principales.

1° Il résulte immédiatement du théorème précédent, que *Tout triangle a pour mesure la moitié du produit d'un quelconque de ses trois côtés, pris pour base, par la hauteur correspondante.*

2° On peut, au moyen de la formule trouvée dans le *numéro* 282, — *Exprimer l'aire d'un triangle en fonction de ses trois côtés.*—En effet, si dans l'expression $\frac{1}{2}ch$, laquelle, d'après ce qu'on vient de dire (1°), représente l'aire du triangle, on met pour h sa valeur, on obtient, pour nouvelle expression de cette aire, $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

3° Il suffit de se rappeler ce qui a été dit au *numéro* 167, et

Fig. 127. de jeter les yeux sur la *figure* 127, pour voir que

Tout triangle a encore pour mesure la moitié du produit de son périmètre par le rayon du cercle inscrit.

Fig. 242. 4° Enfin—*Tout triangle* ABC (fig. 242) *a pour mesure le produit de ses trois côtés, divisé par le double du diamètre du cercle circonscrit.*

En effet, BC étant pris pour base, et AI étant la hauteur correspondante, le triangle a pour mesure

$$\frac{1}{2}BC \times AI;$$

mais alors, en supposant que AD soit le diamètre du cercle circonscrit, on a

(n° 286, *scol.*), $AB \times AC = AD \times AI$;

d'où $BI = \frac{AB \times AC}{AD}$:

donc *triangle* $ABC = \frac{AB \times BC \times CA}{2.AD}$.

N° 346. REMARQUE *sur la mesure des autres figures planes.* — De la mesure du triangle dérive, comme nous venons de le dire, la mesure de toutes les figures planes.

Fig. 149. Ainsi — 1° *Tout trapèze* MP (fig. 149) *a pour mesure le produit de sa hauteur* par la demi-somme des côtés parallèles, ou *par la droite qui joint les milieux des côtés latéraux* (n° 206) :

Car, en menant la diagonale MP, on décompose le trapèze

en deux triangles qui ont respectivement pour base, chacune des bases du trapèze, et même hauteur que lui; *d'où, etc.*

2° *Tout polygone régulier* ABCDEF (fig. 167) *a pour mesure la moitié du produit de son périmètre par son apothème :* Fig. 167.

C'est ce que l'on voit facilement en faisant la somme de tous les triangles intégrans (n° 228, *scol.* 1er).

3° Plus généralement : — *Tout polygone circonscriptible au cercle a pour mesure la moitié du produit de son périmètre par le rayon du cercle inscrit.* — [Nous avons déjà vu ci-dessus (n° 345, 3°) le cas particulier du triangle.]

4° *Le cercle* étant la limite (n° 240) des polygones qui lui sont circonscrits, ou bien pouvant être considéré comme un polygone régulier d'une infinité de côtés infiniment petits, *a* aussi *pour mesure la moitié du produit de sa circonférence* [rectifiée], *par son rayon.*

De même — *Tout secteur de cercle a pour mesure la moitié du produit de l'arc correspondant, par le rayon.*

Quant aux segmens, suivant qu'ils sont plus petits ou plus grands qu'un demi-cercle, ils s'obtiennent toujours en augmentant ou en diminuant l'aire d'un secteur, de celle d'un triangle isocèle qui a pour base la corde correspondante et pour sommet le centre du cercle.

Au reste, pour ne rien laisser à désirer sur la mesure de l'aire du cercle, nous démontrerons tout à l'heure ces dernières propositions d'une autre manière.

N° 347. La décomposition en triangles n'est pas la seule que l'on puisse employer avec avantage pour évaluer l'aire d'un polygone. Nous avons indiqué (*fin* du n° 217), un autre genre de décomposition qui rend cette évaluation encore plus facile à effectuer : le polygone (fig. 162) se trouvant partagé en trapèzes et en triangles rectangles, on n'a à considérer, pour en avoir la mesure, que des distances comptées sur la droite AE, à partir du point A [distances que l'on nomme *abscisses*], et des perpendiculaires [ou *ordonnées* (n° 88, *scol.* 2)] à cette droite : l'aire du polygone total est la somme des aires des figures partielles. Fig. 162.

Si le polygone avait, au lieu du côté CD, un angle rentrant CKD tel que DK coupât la perpendiculaire C*c*, on mènerait CD et l'on opérerait de la même manière, en observant toutefois de retrancher du résultat obtenu, l'aire du triangle CKD. — *Etc., etc.*

On peut encore *enceindre* le polygone dans un rectangle MP dont on évaluera l'aire; puis, après avoir abaissé des perpendiculaires Bb', Dd'..., sur les côtés opposés MN, OP, on retranchera, de l'aire du rectangle, celles des triangles et des trapèzes AMb'B, Bb'C... : on aura ainsi l'aire du polygone.

On emploie des moyens analogues aux précédens, pour évaluer *par approximation*, l'aire d'une surface plane terminée par une ligne courbe
Fig. 287. ABCDEFGI (fig. 287). On peut d'abord en séparer un polygone ACEG; et alors il reste à évaluer les portions *mixtilignes* ABC, CDE, etc....

Pour évaluer ABC par exemple, partageons la droite AC en parties *égales* très petites, AM, MN, NO...; puis élevons, par les points de division, les perpendiculaires M*m*, N*n*, O*o*...., terminées à la courbe. Si les divisions de la droite AC sont suffisamment petites, les portions de courbe A*m*, *mn*, *no*..., pourront, sans erreur sensible, être regardées comme de petites lignes droites; et l'on aura approximativement :

$$AMm = \frac{1}{2} AM \times Mm,$$

$$MNnm = \frac{1}{2} MN \times (Mm + Nn),$$

$$NOon = \frac{1}{2} NO \times (Nn + Oo),$$

$$OPpo = \frac{1}{2} OP \times (Oo + Pp),$$

$$PCp = \frac{1}{2} PC \times Pp;$$

d'où, puisque $AM = MN = NO....,$

$$ABC = AM \times (Mm + Nn + Oo + Pp).$$

Etc., etc.

Si l'on voulait évaluer un espace tel que MNOP*ponm*, qui ne contient que des trapèzes, on obtiendrait l'expression

$$MN \times \left(\frac{1}{2} Mm + Nn + Oo + \frac{1}{2} Pp\right).$$

Cette méthode donnera un résultat d'autant plus exact, que les divisions AM, MN..., seront plus petites.

L'application des divers procédés que nous venons d'indiquer, à la mesure des terrains, constitue la science de l'*Arpentage*, branche de la *Géométrie pratique*, pour laquelle nous ne pouvons mieux faire que de renvoyer à l'excellent *Manuel d'Arpentage* de M. Lacroix.

Terminons par les démonstrations relatives au cercle, dont nous avons parlé ci-dessus, en donnant toutefois, à leurs énoncés, une forme propre à les rendre indépendans de *l'unité de surface* (n° 339).

N° 348. THÉORÈME V. Fig. 288.

Tout cercle OA *est équivalent à un triangle qui aurait pour* Fig. 288
base la circonférence rectifiée, et le rayon pour hauteur.

Supposons en effet que le produit $\frac{1}{2}$ OA $\times$ *circ.* OA, mesure du triangle que nous venons de désigner, ne soit pas en même temps la mesure du cercle OA. Alors, cette mesure appartiendra nécessairement à quelque autre cercle d'un rayon plus grand ou plus petit, attendu qu'il y a des cercles de toutes les grandeurs possibles. Soit donc, si l'hypothèse est admissible,

$$\tfrac{1}{2}\,\text{OA}\times circ.\ \text{OA} = cercle\ \text{OA}',$$

OA' étant, par exemple, $<$ OA.

Cela posé, *inscrivons* au cercle OA un polygone régulier dont les côtés ne rencontrent pas la circonférence OA' (n° 326); représentons l'aire de ce polygone par *pol.* OA, son périmètre par *périm.* OA; et soit OB son apothème. Nous aurons (n° 346):

$$\tfrac{1}{2}\,\text{OB}\times périm.\ \text{OA} = pol.\ \text{OA}.$$

Or, en comparant les deux égalités, comme on a OB $<$ OA et *périm.* OA $<$ *circ.* OA, il s'ensuit que l'on devrait trouver *pol.* OA $<$ *cercle* OA', tandis qu'au contraire on a

$$pol.\ \text{OA} > cercle\ \text{OA}';$$

d'où résulte une *absurdité.*

On prouverait de même que $\frac{1}{2}$ OA $\times$ *circ.* OA ne peut être la mesure d'un cercle plus grand que le cercle OA. [Le raisonnement est un peu plus simple dans cette seconde hypothèse quand on circonscrit un polygone au cercle OA, parce que le rayon OA est alors facteur commun.]

COROLLAIRE 1er. — Si l'on nomme r le rayon d'un cercle et d son diamètre, son aire aura pour expression πr^2 ou $\frac{1}{4}\pi d^2$ (*voyez* le n° 327, *coroll.*).

COROLL. 2. — *Le cercle est plus grand que tout polygone régulier isopérimètre* (n° 240).

On peut démontrer la même chose relativement à un polygone quelconque (*voyez la Géométrie* de M. LEGENDRE); et il s'ensuit que

Le cercle est, de toutes les figures, celle qui, pour un périmètre donné, a le MAXIMUM *d'aire, ou qui, pour une aire donnée, a le* MINIMUM *de périmètre.*

N° 349. THÉORÈME VI. Fig. 289.

Fig. 289. *Tout secteur de cercle,* AOB, *est équivalent à un triangle qui aurait pour base l'arc correspondant* AB [supposé rectifié], *et le rayon* OA *pour hauteur.*

En effet, on a (n° 125):

$$sect.\ AOB : \tfrac{1}{2}\,OA \times circ.\ OA :: arc\ AB : circ.\ OA;$$

d'où l'on tire $$sect.\ AOB = \tfrac{1}{2}.\ OA \times arc\ AB.$$

COROLLAIRE.—*Tout segment* ACB *plus petit qu'un demi-cercle a pour mesure la moitié du produit du rayon* OA *par l'excès de l'arc correspondant* ACB *sur le sinus* BD (n° 88, *scol.* 2).

En effet, on a: $segment\ ACB = secteur\ AOB - triangle\ AOB$;

or $secteur\ AOB = \tfrac{1}{2}\,OA \times arc\ AB$,

et $triangle\ AOB = \tfrac{1}{2}\,OA \times BD$:

donc $segment\ ACB = \tfrac{1}{2}\,OA \times (arc\,AB - BD)$.

On démontre de la même manière, que

Tout segment plus grand qu'un demi-cercle, a pour mesure la moitié du produit du rayon par la somme de l'arc et du sinus.

N° 350. THÉORÈME VII. Fig. 290.

Fig. 290. *La couronne circulaire* (n° 93, scol.) *comprise entre deux circonférences concentriques,* OA, OA′, *est équivalente à un cercle qui aurait pour diamètre une corde* CA′D *de la circonférence extérieure, menée tangentiellement à la circonférence intérieure.*

En effet, l'aire de la couronne a pour valeur (n° 348, *coroll.* 1er):

$$\pi(OA^2 - OA'^2) = \pi(OA + OA')\,(OA - OA'), \quad (page\ 218,\ note),$$
$$= \pi.BA' \times A'A = \pi.\ A'C^2 \ (n°\ 274,\ scol.\ 2,\ 1°); \quad C.\ Q.\ F.\ D.$$

Scolie. — On peut encore mesurer une couronne circulaire au moyen d'une formule analogue à celle que nous allons donner dans le théorème suivant.

N° 351. Théorème VIII. Fig. 291.

Le trapèze circulaire ABB'A', *formé de la différence* Fig. 291.
de deux secteurs semblables, AOB, A'OB', *est équivalent à un trapèze rectiligne qui aurait des bases équivalentes, et la différence des rayons pour hauteur.*

Superposons d'abord les deux angles au centre; puis, par le point B, élevons sur le rayon OB une perpendiculaire BC équivalente à l'arc AB supposé rectifié; tirons OC et menons encore, dans le triangle OBC, B'C' parallèle à BC. Nous aurons ainsi :

$$AB : A'B' :: OB : OB' :: BC : B'C';$$

or, par hypothèse, $AB = BC$: donc $A'B' = B'C'$.

Il résulte de là que le secteur AOB est équivalent au triangle EOC, et le secteur A'OB' au triangle B'OC'; donc le *trapèze circulaire* ABB'A' est équivalent au trapèze rectiligne BCC'B'; *C. Q. F. D.*

Scolie. — La figure ABB'A' a donc pour mesure

$$BB' \times \tfrac{1}{2}(BC + B'C'), \text{ (n° 346, 1°)}, = AA' \times \tfrac{1}{2}(AB + A'B');$$

et par conséquent, elle est équivalente à la somme de deux secteurs décrits d'un même rayon égal à AA', et dont les bases seraient respectivement équivalentes aux arcs AB et A'B'.

De plus, si par le point *a* milieu de AA', on décrit, du point O comme centre et du rayon O*a*, l'arc *ab* semblable aux arcs AB, A'B', on aura

$$AB : A'B' : ab :: BC : B'C' : bc,$$

d'où (*page* 199, *note* **)

$$AB + A'B' : ab :: BC + B'C' : bc;$$

et comme (n° 206) $bc = \tfrac{1}{2}(BC + B'C')$,

il en résulte encore $ab = \tfrac{1}{2}(AB + A'B')$;

et par conséquent la figure ABB'A' a aussi pour mesure le produit $AA' \times ab$.

18..

§ II. — *Comparaison des Aires.*

N° 352. Théorème IX. Fig. 292 *et* 293.

Fig. 292 et 293. *Les aires des triangles*, ABC, ADE, *qui ont un angle égal* A, *sont proportionnelles aux rectangles des côtés qui comprennent l'angle égal.*

Après avoir superposé les angles égaux, menons BE : les deux triangles ABC, ABE, pourront être considérés comme ayant respectivement pour bases AC, AE; ils auront donc pour hauteur commune la perpendiculaire abaissée du sommet commun B sur la droite AC; et par conséquent ils seront proportionnels à leurs bases (n° 345, 1°), c'est-à-dire que l'on aura :

$$ABC : ABE :: AC : AE.$$

En comparant de même les triangles ABE, ADE, on aura encore :

$$ABE : ADE :: AB : AD.$$

Maintenant, si l'on multiplie ces deux proportions par ordre, et que l'on supprime, dans les deux termes du premier rapport, le facteur commun ABE, il viendra :

$$ABC : ADE :: AB \times AC : AD \times AE;$$

C. Q. F. D.

Scolie 1er. — La réciproque n'est pas vraie.

Scol. 2. — Le théorème précédent pourrait se démontrer plus simplement d'après le *scolie* du *numéro* 341, en observant que chaque triangle est la moitié d'un parallélogramme construit sur deux de ses côtés et l'angle compris. — Et par conséquent on pourrait remplacer l'angle égal de l'énoncé, par l'angle supplémentaire.

Corollaire 1er. — Le triangle ABE (fig. 292) serait moyen proportionnel entre les triangles ABC, ADE, si BC et DE étaient parallèles; en effet, on aurait dans ce cas :

$$AB : AD :: AC : AE;$$

d'où il résulterait, d'après les deux premières proportions établies ci-dessus, Fig. 292.

ABC : ABE :: ABE : ADE.

Coroll. 2. — Les deux triangles ABC, ADE (fig. 293), seraient équivalens si AB × AC était égal à AD × AE, c'est-à-dire si DC était parallèle à BE (n° 259, *récipr.*); [c'est d'ailleurs ce qu'il est facile de voir directement, d'après le *numéro* 162, en considérant séparément les triangles partiels BEC, BED]. Fig. 293.

N° 353. Théorème X. Fig. 210 *et* 211.

Les aires des triangles semblables, ABC, A'B'C', *sont proportionnelles aux carrés de leurs côtés homologues.* Fig. 210 et 211.

En effet, les triangles ABC, A'B'C', étant équiangles (n° 261), on a, d'après le théorème précédent,

ABC : A'B'C' :: AB × AC : A'B' × A'C';

mais comme d'ailleurs (n° 252)

AC : A'C' :: AB : A'B',

on en conclut, en multipliant ces deux proportions par ordre et supprimant le facteur AC dans les antécédens et le facteur A'C' dans les conséquens,

ABC : A'B'C' :: AB^2 : $A'B'^2$, *ou* :: AC^2 : $A'C'^2$, *ou* :: BC^2 : $B'C'^2$.

N° 354. Théorème XI. Fig. 212 *et* 213.

Les aires des polygones semblables ABCDE, A'B'C'D'E', *sont proportionnelles aux carrés de leurs côtés homologues.* Fig. 212 et 213.

En effet, les deux polygones étant, d'après leur définition (n° 253), composés de triangles semblables, qui, comparés entre eux, sont, chacun à chacun, dans un même rapport, celui des carrés des côtés homologues, il s'ensuit, d'après la propriété des rapports égaux (*voyez* le n° 268), que les deux polygones sont aussi dans ce même rapport.

COROLLAIRE 1er. — *Les aires des figures semblables sont proportionnelles aux carrés de leurs lignes homologues* (nos 254 et 258).

Ainsi, — *Les polygones réguliers d'un même nombre de côtés sont proportionnels aux carrés de leurs côtés, ou de leurs rayons, ou de leurs apothèmes, ou de leurs périmètres* (n° 268).

De même, — *Les cercles sont proportionnels aux carrés de leurs rayons, ou de leurs diamètres, ou de leurs circonférences* [rectifiées].

De même encore, — *Les secteurs semblables* (n° 328, coroll. 1er) *sont proportionnels aux carrés de leurs rayons ou de leurs arcs* [rectifiés].

Fig. 294. COROLL. 2. — *Si, sur les côtés d'un triangle rectangle* ABC (fig. 294), *comme homologues, on construit trois figures semblables, la figure construite sur l'hypoténuse sera équivalente à la somme des figures construites sur les deux autres côtés.*

En effet, ces trois figures sont proportionnelles aux carrés des côtés sur lesquels elles sont respectivement construites (*coroll.* 1er); or, le carré de la valeur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des valeurs des deux autres côtés : *donc*, etc.

La décomposition du triangle rectangle, en deux triangles partiels semblables au triangle total (n° 274, 1°), rentre comme cas particulier dans le *corollaire* 2e.

Ce corollaire s'applique également à trois cercles qui auraient pour diamètres respectifs les côtés du triangle; de là résulte encore la conséquence suivante :

Fig. 295. COROLL. 3. — *Si, sur les côtés d'un triangle rectangle* ABC (fig. 295), *comme diamètres, on décrit trois circonférences, l'aire des deux* LUNULES *résultantes*, ADBF, AECG (*), comprises entre la grande circonférence et les deux petites, *est équivalente à celle du triangle.*

En effet, le demi-cercle BDAEC étant équivalent à la somme des demi-cercles AFB, AGC, si l'on retranche de part et d'autre les deux segmens ADB, AEC, il en résulte, d'une part le triangle, et d'autre part les deux lunules; *d'où*, *etc.*

(*) En supposant AB = AC, on a les *lunules* d'HIPPOCRATE.

N° 355. Théorème XII.

Si les lignes homologues de deux figures semblables sont proportionnelles aux lignes homologues de deux autres figures semblables [entre elles, mais non pas nécessairement semblables aux premières], *les aires des quatre figures seront proportionnelles ; — et réciproquement.*

Soient A, B, les deux premières figures, et a, b, deux de leurs lignes homologues : on aura (n° 354)

$$A : B :: a^2 : b^2.$$

Soient de même C, D, les deux dernières figures, et c, d, deux de leurs lignes homologues : on aura encore

$$C : D :: c^2 : d^2.$$

Mais, par hypothèse, $a : b :: c : d$,

d'où $a^2 : b^2 :: c^2 : d^2$;

donc $A : B :: C : D$; *CQ.F.D.*

— Il serait facile de prouver pareillement, en enversant la démonstration, que si

$$A : B :: C : D,$$

il en résulte *réciproquement*

$$a : b :: c : d.$$

Scolie. — La proposition a également lieu quand les quatre figures sont toutes semblables entre elles.

Corollaire. — Si trois figures sont semblables, et qu'une ligne de l'une soit moyenne proportionnelle entre les lignes homologues des deux autres, l'aire de la première figure sera moyenne proportionnelle entre les aires des deux dernières; — et *réciproquement.*

N° 356. Remarque *générale sur les aires.* Nous terminerons ce *chapitre* et le *second Livre* par un rapprochement très important.

Dans les deux derniers *paragraphes* du *premier chapitre* de ce *Livre*, ainsi qu'en divers autres endroits, nous avons démontré un grand nombre de théorèmes dans lesquels on considère le produit des valeurs numériques de deux lignes. Or, nous savons maintenant qu'un semblable produit représente le rectangle construit sur les deux lignes (n° 342): [rectangle qui devient un carré lorsque ces deux lignes sont égales]. — Or, de là résulte une nouvelle interprétation toute géométrique de ces théorèmes, et une nouvelle manière de les énoncer.

C'est ainsi, par exemple, que les formules d'*Algèbre* que nous avons rappelées aux *pages* 214, 215, *et* 218, donnent lieu aux *théorèmes* suivans :

Fig. 296. 1° *Le carré construit sur la somme* AC (fig. 296) *de deux lignes*, AB, BC, *est équivalent au carré construit sur la première, plus le carré construit sur la seconde, plus le double du rectangle construit sur les deux lignes ;*

2° *Le carré construit sur la différence* AB (fig. 296) *de deux lignes*, AC, BC, *est équivalent au carré construit sur la première, plus le carré construit sur la seconde, moins le double du rectangle construit sur les deux lignes ;*

Fig. 297. 3° *Le rectangle* AF (fig. 297) *construit sur la somme* AC *et la différence* AD [= AE] *de deux lignes*, AB, BC [= BD], *est équivalent au carré* AI *construit sur la plus grande, moins le carré* GI *construit sur la plus petite.*

Il suffit, pour ainsi dire, de jeter les yeux sur les figures relatives à ces théorèmes, pour en reconnaître sur-le-champ la vérité.

Mais toutes les propositions de ce genre ne sont pas immédiatement de la même évidence ; et un grand nombre d'entre elles exigeraient des démonstrations spéciales. Nous nous bornerons ici à considérer celles que l'on déduit des théorèmes démontrés aux *numéros* 275, 276, *et* 277, et dont la première, qui est la plus importante, n'est qu'un cas particulier du *corollaire* 2ᵉ du *théorème* XI (n° 354). — Il existe un très grand

nombre de manières de parvenir à cette proposition ; et en raison de son fréquent usage et de sa fécondité, nous allons donner ou indiquer d'abord quelques-unes des démonstrations qui y conduisent.

N° 357. Théorème XIII (*). Fig. 298 *et* 299.

Le carré BCDE *construit sur l'hypoténuse* BC *d'un triangle rectangle* ABC *est équivalent à la somme des carrés*, ABFG, ACIK, *construits respectivement sur les deux autres côtés*, AB, AC. — [*Voyez* le n° 275.] Fig. 298.

1re *Démonstration.* — Les trois carrés étant supposés construits en dehors du triangle ABC (fig. 298), abaissons, du sommet A de l'angle droit, une perpendiculaire AL sur l'hypoténuse, et prolongeons cette perpendiculaire jusqu'à la rencontre de DE en M : le carré BE se trouvera décomposé en deux rectangles BM et CM. — Menons de plus AD et CG.

Cela posé, les angles ABD et GBC sont égaux comme étant respectivement composés d'un angle droit et d'une partie commune ABC. De plus, AB = BG, et BC = BD, comme étant deux à deux les côtés d'un même carré ; donc

triangle DBA = *triangle* CBG (n° 170).

Maintenant, le triangle DBA est moitié du rectangle BM (n° 344) comme ayant même base BD et même hauteur BL ; et de même, le triangle CBG est moitié du carré AG comme ayant même base BG et même hauteur BA ; donc

rectangle BM = *carré* AG.

On prouverait de même que

rectangle CM = *carré* AK ;

et comme *rectangle* BM + *rectangle* CM = *carré* BE,
il en résulte

carré BE = *carré* AG + *carré* AK ; *C. Q. F. D.*

(*) Attribué à Pythagore, qui sacrifia, dit-on, une hécatombe, pour remercier les dieux de sa découverte.

2° *Démonstr.* — Les trois carrés étant disposés comme dans la démonstration précédente, construisons, en dehors de la figure, le triangle NED
Fig. 299. (fig. 299) égal au triangle ABC, en faisant l'angle DEN = ABC, et l'angle EDN = ACB ; puis menons les droites AN, GAK, et FI. Cela posé, il est facile de prouver que les quatre quadrilatères ABDN, NECA, GBCK, et GFIK, sont égaux (n° 221) ; d'où il résulte, d'abord que les deux hexagones ABDNEC et GBCKIF sont équivalens, et ensuite, par la soustraction des triangles égaux ABC, NED, AFI, que le carré BE équivaut à la somme des carrés AG et AK. — (*Voyez* le *Manuel de Géométrie* de M. Terquem.)

3° *et* 4° *Démonstr.* — On construit un carré sur la droite AO égale
Fig. 300. à la somme AB + AC (fig. 300), ou à la différence AB — AC (fig. 301), puis un autre carré sur l'hypoténuse BC, comme l'indiquent les deux figures. Alors, on voit que le carré construit sur cette somme (fig. 300) ou sur cette différence (fig. 301), se compose en augmentant (fig. 300) ou en di-
Fig. 301. minuant (fig. 301) le carré construit sur l'hypoténuse, de *quatre fois le triangle* proposé, c'est-à-dire de *deux fois le rectangle* construit sur les côtés de l'angle droit. Comparant ces résultats avec la composition connue du carré construit sur la somme ou sur la différence de deux lignes (n° 356, 1° *et* 2°), on en conclut facilement la proposition dont il s'agit.

Fig. 302. Corollaire. — *Le carré* MP (fig. 302) *construit sur la diagonale d'un autre carré* AD *est double de celui-ci* (voyez les n°s 275, *coroll.* 1er ; et 314, *scol.* 1er).

Scolie. — La proposition sur laquelle est fondée la *première* des démonstrations ci-dessus, n'est qu'un cas particulier d'un théorème plus général que nous allons donner, et sur lequel nous nous appuierons pour démontrer les deux autres théorèmes dont nous avons parlé plus haut (n° 356).

N° 358. Théorème XIV. Fig. 303 *et* 304.

Fig. 303 et 304. *Dans un triangle quelconque* ABC, *les rectangles construits sur deux côtés*, AB, AC, *et les projections mutuelles*, Ac, Ab, *de l'un sur l'autre, sont équivalens.*

En effet, soient faits les angles droits BAP, CAQ ; puis, AP = AB, et AQ = AC. En menant CP, BQ, on formera comme ci-dessus (n° 357 1re *démonstr.*), deux triangles CAP, BAQ, égaux entre eux comme ayant deux côtés égaux chacun à chacun, comprenant un angle égal, composé d'un angle droit *plus* l'angle BAC (fig. 303), ou *plus* son supplément (fig. 304). Or, le triangle CAP est moitié du rectangle cP, et le triangle BAQ est moitié du rectangle bQ (n° 344) ; donc les deux rectangles sont équivalens.

Scolie. — Les deux rectangles sont intérieurs ou extérieurs aux carrés construits sur les côtés de l'angle A, suivant que cet angle est aigu ou obtus; et les deux rectangles sont nuls lorsque l'angle A est droit.

COROLLAIRE 1er. — Dans le triangle *rectangle* ABC (fig. 298), on a Fig. 298.

$$LD = AG, \quad \text{et} \quad LE = AK:$$

Donc — *Le carré construit sur l'hypoténuse*.....etc. (n° 357).

COROLL. 2. — Dans le triangle *acutangle* ABC (fig. 305), on a Fig. 305.

$$aT = cR = AR -$$
$$aV = bS = AS - bQ;$$

d'où, en ajoutant, et observant que $bQ = cP$,

$$BV = AR + AS - 2.cP:$$

Donc — *Dans un triangle* ACUTANGLE, *le carré construit sur un côté* QUELCONQUE, *est équivalent à la somme des carrés construits sur les deux autres côtés*, MOINS *le double du rectangle construit sur l'un de ces deux côtés et la projection de l'autre côté sur ce dernier.*

De même dans le triangle *obtusangle* ABC (fig. 306), on a Fig. 306.

$$bS = aV = BV - aT,$$
$$bQ = cP = cR - BP;$$

d'où, en retranchant,

$$AS = BV + BP - 2.aT:$$

Donc — *Dans un triangle obtusangle, le carré construit sur un côté opposé à un angle aigu, est équivalent*....etc. (même conséquence).

De même dans le triangle *rectangle* ABC (fig. 298), Fig. 298.

$$AG = CD - 2.AK:$$

Donc — *Dans un triangle rectangle, le carré construit sur le côté opposé à un angle aigu*....etc. (même conséquence).

Et généralement : — *Dans un triangle* QUELCONQUE, *le carré construit sur un côté opposé à un angle* AIGU, *est équivalent à la somme des carrés construits sur les deux autres côtés*, MOINS.... etc.

[Voyez le n° 277.]

COROLL. 3. — Dans le triangle *obtusangle* ABC (fig. 306), on a Fig. 306.

$$aT = cR = AR + cP,$$
$$aV = bS = AS + bQ;$$

d'où

$$BV = AR + AS + 2.cP:$$

Donc — *Dans un triangle* OBTUSANGLE, *le carré construit sur* LE PLUS GRAND CÔTÉ, *est équivalent à la somme des carrés construits sur les deux autres côtés*, PLUS *le double du rectangle construit sur l'un de ces deux côtés et la projection de l'autre côté sur le prolongement de ce dernier.*

[Voyez le n° 276.]

CHAPITRE V.

PROBLÈMES SUR LES AIRES.

---

§ Ier. — *Problèmes Graphiques.*

N° 359. PROBLÈME I. Fig. 307.

Fig. 307. *Transformer un polygone quelconque en un polygone équivalent d'un nombre de côtés moindre d'une unité*, [et par suite le transformer *en un triangle*].

Soit, par exemple, à — *Transformer un pentagone* ABCDE (fig. 307) *en quadrilatère.*

Construction.— 1° Menons la diagonale CE.— 2° Menons une droite DD′ parallèle à CE (n° 154 *ou* 211) et terminée en D′ sur le côté AE. — 3° Menons CD′.

Le quadrilatère ABCD′ sera équivalent au pentagone ABCDE.

En effet, les triangles CDE, CD′E, seront équivalens (nos 162 et 345).

Scolie.— Lorsqu'on veut transformer en triangle, un polygone convexe, on peut opérer les transformations partielles dans tel ordre que l'on veut; mais quand il est concave, il y a souvent un choix à faire sous ce rapport. Ainsi, par exemple,
Fig. 308. dans la *figure* 308, il serait impossible de faire disparaître l'angle rentrant à la première opération partielle.

N° 360. PROBLÈME II.

Construire un carré équivalent à un parallélogramme ou *à un triangle donné.*

Pour cela, on cherche (n° 298) une moyenne proportionnelle entre la base et la hauteur du parallélogramme, ou

entre la base et la moitié de la hauteur du triangle. — Cette moyenne est le côté du carré cherché ; *etc*... (*Voyez* les nos 342 — 345).

Scolie. — En réunissant cette dernière question avec celle du *numéro* précédent (n° 359), on en déduit le moyen de

Transformer un polygone quelconque en un carré équivalent.

N° 361. Problème III. Fig. 141.

Construire un carré équivalent à la somme de deux carrés donnés [AB^2, AC^2]. Fig. 141.

Construction. — 1° Plaçons les côtés AB, AC, de manière à former un angle droit au point A (n° 129 *ou* 190). — 2° Menons BC. Ce sera le côté du carré cherché.

En effet, *etc*.... (n° 357).

Scolie 1er. — On peut, par le même moyen,

Construire un carré équivalent à la somme d'un nombre quelconque de carrés.

Scol. 2. — Au moyen des trois problèmes précédens, on peut

Transformer en un carré unique, une somme quelconque de polygones donnés.

N° 362. Problème IV. Fig. 141.

Construire un carré équivalent à la différence de deux carrés donnés [BC^2, AB^2].

Construction. — 1° Sur BC comme diamètre, décrivons une demi-circonférence (n° 102, 1°). — 2° Du point B comme centre, et d'un rayon BA, décrivons un petit arc de cercle qui coupe cette demi-circonférence en un point A. — 3° Menons AC.

Ce sera le côté du carré cherché.

En effet, *etc*.. . (n° 357).

SCOLIE Ier. — Cette construction peut servir à

Trouver un carré équivalent au rectangle fait sur la somme et la différence de deux longueurs données (voyez le n° 356, 3°; et la *note* de la *page* 218).

SCOL. 2. — On pourrait, au moyen des problèmes précédens,

Trouver un carré équivalent à la somme ou à la différence d'un nombre quelconque de carrés donnés, et, en général, *d'un nombre quelconque de polygones.*

N° 363. PROBLÈME V.

Construire, sur un côté donné [*a*], *un rectangle* [ou un parallélogramme] *équivalent à un rectangle* [ou à un parallélogramme] *donné*, et fait [avec le même angle] sur les côtés *b*, *c*.

ANALYSE. — En nommant x le second côté du rectangle cherché, on aura

$$ax = bc, \quad \text{d'où} \quad a : b :: c : x.$$

Il faut donc, pour avoir x, chercher (n° 291) une *quatrième proportionnelle* aux trois longueurs données a, b, c (voyez le n° 341).

Scolie. — Si l'on suppose $b = c$, le problème deviendra celui-ci :

Construire, sur un côté donné [*a*], *un triangle équivalent à un carré donné* [b^2];

Alors, x sera une *troisième proportionnelle* (n° 292 *ou* 299) aux deux longueurs a et b.

N° 364. PROBLÈME VI. Fig. 258, 259, *et* 260.

Fig. 258 — 260. *Construire un rectangle équivalent à un carré donné* AI^2, *et dont les côtés consécutifs fassent une somme donnée* AB.

Les côtés du rectangle cherché ne sont autre chose que les longueurs déterminées dans le problème du *numéro* 300.

N° 365. PROBLÈME VII. Fig. 261 *et* 262.

Construire un rectangle équivalent à un carré donné AI^2, *et dont les côtés consécutifs fassent une différence donnée* AB. Fig. 261 et 262.

Voyez, de même, le *numéro* 301.

N° 366. PROBLÈME VIII. Fig. 309 *et* 310.

Construire un carré qui soit à un carré donné, dans le rapport d'une longueur donnée DC *à une autre longueur donnée* BD. Fig. 309 et 310.

ANALYSE. — D'après l'analogie évidente qui existe entre cette question et la proposition du *numéro* 274 (*coroll.* 1er), plaçons à la suite l'une de l'autre, les deux droites données BD, DC (fig. 309); décrivons sur BC comme diamètre, une demi-circonférence ; élevons l'ordonnée DA ; puis menons AB et AC. — Nous aurons alors Fig. 309.

$$AB^2 : AC^2 :: BD : DC ;$$

et si AB était le côté du carré donné, AC serait le côté du carré cherché.

D'ailleurs, le même rapport doit exister entre les deux longueurs BD, DC, et deux carrés dont les côtés seraient proportionnels à ceux du premier.... *etc. etc.*

1re *Construction.* — 1° Sur BC comme diamètre, décrivons une demi-circonférence (n° 102, 1°). — 2° Menons l'ordonnée DA (n° 99), les cordes AB, AC; et prolongeons toutes ces droites. — 3° Sur AB, à partir du point A, prenons une longueur AB′ égale au côté du carré donné. — 4° Menons par le point B′, parallèlement à BDC, la droite B′D′C′ (n° 154 *ou* 211), coupant AD et AC respectivement en D′ et en C′.

AC′ sera le côté du carré cherché.

Fig. 309 En effet, on a

	AB : AC :: AB′ : AC′ (n° 260),
d'où	$AB^2 : AC^2 :: AB'^2 : AC'^2$;
de plus	$AB^2 : AC^2$ :: BD : DC (n° 274, *coroll.* 1er) ;
donc	$AB'^2 : AC'^2$ :: BD : DC.

Scolie 1er. — On pourrait varier cette construction en plaçant les deux lignes données, par exemple comme BD et BC, ou comme BC et BD ; *etc.*

Fig. 310. Synthèse. — 2e *Constr.* — 1o Menons une droite BD′ (fig. 310) égale au côté du carré donné. — 2o Tirons DD′. — 3o Menons, parallèlement à DD′, la droite CC′ terminée en C′ sur la droite BD′ prolongée. — 4o Sur BC′ comme diamètre, décrivons une demi-circonférence. — 5o Élevons l'ordonnée D′A.

D′A est le côté du carré cherché.

En effet, comme le triangle BAC′ est rectangle en A, il s'ensuit que $BD'^2 : D'A^2$ :: BD′ : D′C′ (no 274, *coroll.* 2) :: BD : DC (no 260).

Scol. 2. — Il y a aussi plusieurs manières de varier ce genre de construction : par exemple, on pourrait faire en sorte que les côtés des deux carrés fussent le diamètre BC′ et la corde BA.... *Etc.*

N° 367. Problème IX. Fig. 294.

Fig. 294. *Deux figures semblables étant données, construire une figure semblable aux premières et équivalente à leur somme.*

Construction.—Sur AB et AC, côtés homologues des figures données, construisons un triangle rectangle en A (n° 184, *ou* 129, *ou* 190) ; et menons l'hypoténuse BC.

Ce sera le côté homologue des premiers, dans la figure cherchée.

En effet, *etc....* (n° 354, *coroll.* 2).

N° 368. Problème X. Fig. 294.

Deux figures semblables étant données, construire une figure semblable aux premières et équivalente à leur différence.

Construction analogue à la précédente.

Scolie sur ces deux problèmes. — Les cercles étant des figures semblables (n° 269), les solutions des deux problèmes précédens sont applicables, en particulier, aux cercles décrits sur les côtés d'un triangle rectangle comme diamètres (n° 354, *coroll.* 2).

N° 369. PROBLÈME XI.

Construire un polygone, X, *semblable à un polygone donné*, P, *et qui soit à ce dernier dans un rapport donné* [*m* : *n*].

ANALYSE. — Soit a un côté du polygone donné, et x le côté homologue du polygone cherché; on aura

$$x^2 : a^2 :: X : P,$$

et

$$X : P :: m : n;$$

d'où

$$x^2 : a^2 :: m : n.$$

La question est alors ramenée à déterminer x d'après les conditions du problème VIII (n° 366).

N° 370. PROBLÈME XII.

Construire un polygone, X, *semblable à un polygone donné*, P, *et qui soit à un autre polygone donné*, Q, *dans un rapport donné* [*m* : *n*].

ANALYSE et *Construction.*—Soit a un côté du polygone P, et x le côté homologue du polygone X; on aura d'après les conditions du problème,

$$x^2 : a^2 :: X : P,$$

et

$$X : Q :: m : n.$$

Cela posé, admettons que l'on transforme les polygones P et Q en carrés (n° 359) ayant respectivement pour côtés p et q; et soit de même représenté par y, le côté du carré

équivalent au polygone cherché X ; les proportions précédentes se trouveront transformées en celles-ci :

$$x^2 : a^2 :: y^2 : p^2,$$

ou $$x : a :: y : p;$$

et $$y^2 : q^2 :: m : n.$$

Ainsi, la seconde de ces deux proportions fera connaître y par la construction du problème VIII (n° 366) ; et la première donnera x par une *quatrième* proportionnelle aux droites p, y, et a (n° 291) : ce sera le côté du polygone cherché, homologue de a.

Scolie. — Si le polygone cherché devait être équivalent au polygone Q, on aurait une construction de moins à effectuer : car alors y ne serait autre chose que q.

N° 371. PROBLÈME XIII.

Partager un triangle en parties proportionnelles à des longueurs données, au moyen de droites menées d'un sommet au côté opposé.

Le triangle total donné et les triangles partiels cherchés ayant tous même hauteur, sont proportionnels à leurs bases. La question se réduit donc à partager la base du triangle donné, en parties proportionnelles aux longueurs données (*voyez* le *numéro* 288).

N° 372. PROBLÈME XIV.

Partager un triangle donné, en parties proportionnelles à des longueurs données, au moyen de droites menées d'un même point pris sur son périmètre.

Fig. 311. Soit, par exemple, à partager le triangle ABC (fig. 311) en trois parties équivalentes DAG, DGCI, DIB, au moyen des droites DG, DI, menées d'un même point D pris sur le côté AB : [il sera facile de généraliser].

ANALYSE. — Supposons que le côté AB soit partagé en 3 parties égales par les points E, F. Dans cette hypothèse, si l'on mène les droites CE, CF, du sommet C opposé à ce côté, les parties ACE, ECF, FCB, vaudront aussi le *tiers* du triangle ABC (n° 344).

Ainsi DAG = ACE | DGCI = ECF | DIB = FCB; Fig. 311.

d'où l'on conclut EGD = EGC et FID = FIC :

donc GE et IF sont parallèles à la droite CD qui joint le point donné avec le sommet opposé (n° 141, *récipr.*).

Construction. — 1° Menons CD. — 2° Partageons AB, aux points E, F, en trois parties égales (n° 289) [et généralement proportionnelles aux longueurs données (n° 288)]. — 3° Menons les droites EG, FI, parallèles à CD (n° 154 ou 211); et soient G, I, leurs points d'intersection respectifs avec AC et BC. — 4° Menons DG, DI.

Ce seront les droites cherchées.

N° 373. Problème XV.

Partager un triangle donné, en parties proportionnelles à des longueurs données, au moyen de parallèles menées à l'un des côtés.

Soit par exemple, à partager le triangle ABC (fig. 312) en 3 parties équivalentes; et soient bc, $b'c'$, les droites cherchées, parallèles au côté BC. Fig. 312.

Analyse. — On a, d'après les conditions de la question,

$$Abc : Ab'c' : ABC :: 1 : 2 : 3;$$

et d'après la théorie des figures semblables,

$$Abc : Ab'c' : ABC :: Ab^2 : Ab'^2 : AB^2;$$

d'où $$Ab^2 : Ab'^2 : AB^2 :: 1 : 2 : 3.$$

Cela posé, décrivons, sur AB comme diamètre, une demi-circonférence; tirons, à partir du point A, les cordes AM, AM', respectivement égales à Ab et Ab'; puis abaissons, sur AB, les perpendiculaires MP, M'P'. Nous aurons encore

$$AM^2 : AM'^2 : AB^2 :: 1 : 2 : 3,$$

puis $$AM^2 : AM'^2 : AB^2 :: AP : AP' : AB;$$

d'où $$AP : AP' : AB :: 1 : 2 : 3.$$

Construction. — 1° Partageons AB en 3 parties égales, aux points P, P', (n° 289). — 2° Décrivons sur AB comme diamètre, une demi-circonférence (n° 102, 1°). — 3° Élevons les ordonnées PM, P'M'. — 4° Rabattons sur le diamètre AB, les cordes AM, AM', en Ab, Ab'. — 5° Menons à BC les parallèles bc, $b'c'$.

Ces droites sont les parallèles demandées.

N° 374. PROBLÈME XVI.

Trouver deux longueurs [x, y] *proportionnelles à deux rectangles donnés* [ab, $a'b'$], [ou en général à deux polygones donnés].

ANALYSE. — 1re *Construction.* — On a

$$x : y :: ab : a'b',$$

d'où

$$x = \frac{aby}{a'b'}.$$

L'une des longueurs, par exemple y, étant arbitraire, faisons-la égale à b', il viendra

$$x = \frac{ab}{a'}, \quad \text{d'où} \quad x : a :: b : a'.$$

Construction. — Cherchons une *quatrième* proportionnelle aux longueurs a', b', a (n° 291) : son rapport à la longueur b' sera le même que celui du rectangle ab au rectangle $a'b'$.

Scolie 1er. — Si les deux rectangles étaient des carrés, a^2, a'^2, il faudrait chercher une *troisième* proportionnelle aux longueurs a' et a (n° 292 *ou* 299) : le rapport de la longueur obtenue, à la longueur a', serait le rapport cherché.

SYNTHÈSE. — 2e *Constr.* — 1° Transformons les deux rectangles [ou Fig. 309. figures quelconques] en deux carrés (n° 360) ; et soient AB, AC (fig. 309), les côtés de ces deux carrés. — 2° Formons le triangle rectangle BAC (n° 184). — 3° Abaissons sur l'hypoténuse BC la perpendiculaire BD (n° 100).

Le rapport de BD à DC est le rapport cherché (n° 274, *coroll.* 1er).

N. B. — Toute droite B'D'C' parallèle à BDC est aussi coupée suivant le même rapport par les droites AB, AD, AC (n° 260, *coroll.*).

SCOL. 2. — On peut, par le même moyen,

Trouver, en lignes, le rapport de deux polygones semblables, P, Q :

Si p et q sont deux côtés homologues des polygones donnés, on a

$$P : Q :: p^2 : q^2 \quad (\text{n° } 354);$$

et la question est ramenée à trouver le rapport de p^2 à q^2 (*voyez* ci-dessus, *scol.* 1er, et 2e *constr.*).

Scol. 3. — On peut, au moyen d'une extension convenable donnée aux méthodes employées pour résoudre le problème précédent,

Trouver deux longueurs [x, y] dont la première soit à la seconde dans le même rapport qu'un produit de trois longueurs données [a, b, c], est à un autre produit de trois longueurs données [a', b', c'].

Pour cela, on a d'abord

$$x : y :: abc : a'b'c',$$

ou

$$x = \frac{abcy}{a'b'c'}.$$

Cela posé, y étant arbitraire, faisons $y = c'$; nous aurons

$$x = \frac{ab}{a'} \times \frac{c}{b'}.$$

Ainsi, l'on cherchera : — 1o une *quatrième* proportionnelle aux *longueurs* a', b, a [représentons-la par p]; — 2o une *quatrième* proportionnelle aux *longueurs* b', c, p : — ce sera la valeur de x.

Scol. 4. — On opérera de même pour résoudre la proportion

$$x : y :: a.b.c.d... : a'.b'.c'.d'...$$

§ II. — *Problèmes numériques.*

No 375. Problème XVII.

Une salle a 15m,76 *de longueur,* 8m,24 *de largeur, et* 4m,87 *de hauteur, dont* 0m,37 *pour le lambris ; on veut la tapisser avec des rouleaux de papier dont la largeur est de* 0m,6 : — *on demande combien de mètres en longueur il faudra en employer.*

La hauteur de la partie qui doit être tapissée est de

$$4^m,87 - 0^m,37 = 4^m,5;$$

et le contour de la salle est de

$$(15^m,76 + 8^m,24) \times 2 = 48^m :$$

donc la surface à recouvrir a pour mesure

$$4,5 \times 48 = 216^{mq}.$$

Maintenant, le papier a $0^m,6$ de largeur : donc la longueur nécessaire sera de

$$216 : 0,6 = 360 \textit{ mètres}.$$

Scolie. — On peut simplifier la résolution de ce problème, en observant que le contour de la salle étant de 48^m et la largeur du papier de $0^m,6$, il faudra employer $48 : 0,6 = 80$ fois cette largeur : ce qui fait, de même, $4^m,5 \times 80 = 360$ *mètres* de longueur.

De cette manière, le problème n'est plus qu'une question de pure *Arithmétique*.

N° 376. Problème XVIII.

Une salle a 8^m de longueur, $6^m,2$ de largeur, et $4^m,8$ de hauteur ; on veut en faire blanchir les murailles et le plafond : — on demande, à $0^f,75$ le mètre carré, ce que l'ouvrage coûtera.

Il y a d'abord deux rectangles de 8^m sur $4^m,8$, ce qui fait . . . $76^{mq},80$;

Ensuite, deux rectangles de $6^m,2$ sur $4^m,8$, ce qui donne . . . $59^{mq},52$;

Enfin, un rectangle de 8^m sur $6^m,2$, ce qui fait $49^{mq},60$;

Réunissant ces résultats, on a une somme égale à $185^{mq},92$.

Multipliant par cette somme le prix d'un mètre carré, ou $0^f,75$, on a, pour le prix de l'ouvrage, $139^f,44$.

N° 377. Problème XIX.

Trouver la hauteur d'un rectangle qui a $34^m,9$ de base et $9^a,25$ de surface.

Il suffit de diviser $9^a,25$, ou 925^{mq}, par $34^m,9$; ce qui donne $26^m,50$, à *un centimètre* près.

N° 378. PROBLÈME XX. Fig. 146.

Trouver l'aire d'un rectangle MP *dont on connaît un côté* Fig. 146.
OM *égal à* $26^m,45$, *et la diagonale* MP *égale à* $44^m,76$.

Il faut d'abord déterminer le côté OP. — Pour cela on a

$$OP = \sqrt{\overline{MP}^2 - \overline{OM}^2} = \sqrt{(44,76)^2 - (26,45)^2} = 36^m,11, \text{(n° 275)};$$

et l'on obtient alors, pour l'aire cherchée (n° 342),

$$26^m,45 \times 36^m,11 = 955^{mq},11.$$

N° 379. PROBLÈME XXI.

La surface d'un rectangle est $23^{mq},85$, *et sa base est à sa hauteur dans le rapport de* 5 à 3 : *— on demande ses deux dimensions.*

Soient b la base du rectangle et h sa hauteur, on aura

$$h = \frac{3}{5}.b;$$

d'où $\frac{3}{5}.b^2 = 23,85$, ou $b^2 = 39,75$.

On tire de là $2.log.b = log.39,75 = 1,5993371$;

d'où $log.b = 0,7996685 = log.6,30476$.

Ainsi l'on a $b = 6^m,305$, et $h = 3^m,783$, à *un millimètre* près.

N° 380. PROBLÈME XXII.

Trouver les deux côtés et l'aire d'un rectangle dont la diagonale est de $2^m,45$, *sachant qu'un côté est double de son contigu.*

Soit c le petit côté; le grand côté vaudra $2c$; l'aire sera $2c^2$ (n° 342); et l'on aura (n° 275):

$$5c^2 = (2,45)^2,$$

$$2.log.c = 2.log.2,45 - log.5;$$

$$2.log.2,45 = 0,7783322$$
$$C.log.5... = 9,3010300$$
$$2.log.c... = 0,0793622$$
$$log.c... = 0,0396811 = log.1,09567.$$

Ainsi les deux côtés sont de $1^m,09567$ et $2^m,19134$.

Maintenant, pour avoir le logarithme de l'aire du rectangle, il faut ajouter $2.log.c$ avec $log.2$; on a ainsi

$$2.log.c = 0{,}0793622$$
$$log.2 = 0{,}3010300$$

d'où $$log.2c^2 = 0{,}3803922 = log.2{,}4010;$$

l'aire cherchée vaut donc $2^{mq},4010$, *à un centimètre carré près.*

N° 381. Problème XXIII.

Trouver le côté et l'aire d'un carré dont la diagonale est de $0^m{,}25$.

En représentant par c le côté cherché, l'aire cherchée sera c^2 (n° 342); et l'on aura (n° 314, *scol.* 1er):

$$2.c^2 = (0{,}25)^2,$$
$$2.log.c = 2.log.0{,}25 - log.2;$$

$$2.log.0{,}25 = \bar{2}{,}79588002$$
$$C.log.2.. = 9{,}69897000$$
$$2.log.c... = \bar{2}{,}49485000 = log.0{,}03125;$$
$$log.c... = \bar{1}{,}24742500 = log.0{,}1767667.$$

Ainsi, le côté du carré cherché est de $0^m{,}1768$, et son aire de $0^{mq}{,}0312$.

N° 382. Problème XXIV.

Étant donné un triangle ayant pour base $39^m{,}25$ et pour hauteur $42^m{,}56$, on demande de le transformer en un carré équivalent.

Soit c le côté du carré cherché; on aura (n° 342)

$$c^2 = 39{,}25 \times 21{,}28,$$
$$2.log.c = log.39{,}25 + log.21{,}28;$$

$$log.39{,}25 = 1{,}5938397$$
$$log.21{,}28 = 1{,}3279716$$
$$2.log.c... = 2{,}9218113$$
$$log.c... = 1{,}4609056 = log.28{,}9005.$$

Ainsi $$c = 28^m{,}9005.$$

N° 383. PROBLÈME XXV.

Étant donné un carré dont le côté a 3^m,75 de longueur, trouver le côté d'un second carré dont l'aire soit les $\frac{3}{5}$ de celle du premier...

En nommant c le côté du carré cherché, on aura la proportion

$$c^2 : (3,75)^2 :: 3 : 5,$$

d'où
$$c^2 = \frac{3}{5} \cdot (3,75)^2 = 8,4375;$$

et par conséquent
$$c = \sqrt{8,4375} = 2^m,90,$$

à *un centimètre* près.

N° 384. PROBLÈME XXVI.

Trouver l'aire d'un trapèze dont les bases sont respectivement de 56^m,83 et 38^m,27, et la hauteur de 21^m,40.

L'aire du trapèze est, d'après le *numéro* 346 (1°), égale à

$$\frac{56,83+38,27}{2} \times 21,40 = 47,55 \times 21,40 = 1017^{mq},57.$$

N° 385. PROBLÈME XXVII.

Connaissant l'une des deux bases d'un trapèze, égale à 29^m,37, sa hauteur égale à 15^m,28, et son aire égale à 1139^mq,3860 : — trouver la seconde base.

Si l'on divise l'aire donnée par la moitié de la hauteur, ou par 7^m,64, le quotient 149^m,13, exact à *un centimètre* près, sera égal à la somme des deux bases ; et si l'on retranche de cette somme la base connue, le reste 119^m,76 sera la base cherchée, à *un centimètre* près.

N° 386. PROBLÈME XXVIII.

Étant données les bases d'un trapèze symétrique (n° 205), *respectivement égales à* 46^m,28 *et* 32^m,76, *et son aire valant* 5826^{mq},4360 : — *trouver les deux autres côtés.*

En divisant l'aire donnée par la demi-somme des deux bases, ou par 39^m,52, on obtient pour quotient 147^m,43 : c'est la hauteur du trapèze.

Maintenant, l'un des côtés cherchés, qui sont égaux entre eux, est l'hypoténuse d'un triangle rectangle qui aurait pour côtés de l'angle droit, la hauteur du trapèze et la demi-différence, 6^m,76, de ses deux bases; ainsi, la valeur de chacun de ces deux côtés, est

$$\sqrt{(147,43)^2 + (6,76)^2} = 147^m,58.$$

N° 387. PROBLÈME XXIX. Fig. 162.

Fig. 162. *Trouver l'aire d'un polygone* ABCDEFGI (n° 347), *en supposant*

Ab = 19^m,3	Bb = 25^m,3	....	....
....	....	Ai = 21^m,7	Ii = 13^m,1
....	....	Ag = 38,4	Gg = 8,2
Ac = 41,9	Cc = 29,4	....	....
....	....	Af = 64,5	Ff = 28,0
Ad = 75,3	Dd = 11,5	....	....
AE = 85,2		AE = 85,2	

Pour cela, on a d'abord

Ab = ... = 19^m,3	...... Bb = 25^m,3
bc = Ac − Ab = 22,6	Bb + Cc = 54,7
cd = Ad − Ac = 33,4	Cc + Dd = 40,9
dE = AE − Ad = 9,9	Dd ...... = 11,5

Ai = ... = 21^m,7	...... Ii = 13^m,1
ig = Ag − Ai = 16,7	Ii + Gg = 21,3
gf = Af − Ag = 26,1	Gg + Ff = 36,2
fE = AE − AF = 20,7	Ff .... = 28,0

Et de là on tire

$$
\begin{aligned}
2.ABb &= 19{,}3 \times 25{,}3 = \overset{mq}{488}{,}29 \\
2.BCcb &= 22{,}6 \times 54{,}7 = 1236{,}22 \\
2.CDdc &= 33{,}4 \times 40{,}9 = 1366{,}06 \\
2.CDd &= 9{,}9 \times 11{,}5 = 113{,}85 \\
2.AIi &= 21{,}7 \times 13{,}1 = 284{,}27 \\
2.IGgi &= 16{,}7 \times 21{,}3 = 355{,}71 \\
2.GFfg &= 26{,}1 \times 36{,}2 = 944{,}82 \\
2.FEf &= 20{,}7 \times 28{,}0 = 579{,}60
\end{aligned}
$$

Fig. 162.

D'où

$$2.ABCDEFGI = 5368{,}82;$$

et par conséquent,

$$ABCDEFGI = \overset{mq}{2684}{,}41 = \overset{a}{26}{,}8441.$$

Vérification :

$$
\begin{array}{l|l}
Mb' = Ab = 19{,}3 & AM + Bb' = 2Cc - Bb \ldots\ldots = 33{,}5 \\
b'C = bc = 22{,}6 & Bb' \ldots\ldots = Cc - Bb \ldots\ldots = 4{,}1 \\
Cd' = cd = 33{,}4 & \ldots\ldots Dd' = Cc - Dd \ldots\ldots = 17{,}9 \\
d'N = dE = 9{,}9 & Dd' + EN = 2Cc - Dd \ldots\ldots = 47{,}3
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
Oi' = Ai = 21{,}7 & AO + Ii' = 2.Ff - Ii \ldots\ldots = 42{,}9 \\
i'g' = ig = 16{,}7 & Ii' + Gg' = 2.Ff - (Ii + Gg) = 34{,}7 \\
g'F = gf = 26{,}1 & Gg' \ldots\ldots = Ff - Gg \ldots\ldots = 19{,}8 \\
FP = fE = 20{,}7 & EP \ldots\ldots = Ff - \ldots\ldots\ldots = 28{,}0
\end{array}
$$

$$Cc + Ff = 57{,}4$$

$$
\begin{aligned}
2.ABb'M &= 19{,}3 \times 33{,}5 = \overset{mq}{646}{,}55 \\
2.BCb' &= 22{,}6 \times 4{,}1 = 92{,}66 \\
3.CDd' &= 33{,}4 \times 17{,}9 = 597{,}86 \\
2.DENd' &= 9{,}9 \times 47{,}3 = 468{,}37 \\
2.AIi'O &= 21{,}7 \times 42{,}9 = 930{,}93 \\
2.IGg'i' &= 16{,}7 \times 34{,}7 = 579{,}49 \\
2.GFg' &= 26{,}1 \times 19{,}8 = 516{,}78 \\
2.FEP &= 20{,}7 \times 28{,}0 = 579{,}60 \\
\text{Total} \ldots\ldots\ldots\ldots &= 4412{,}14 \\
\text{La moitié} \ldots\ldots\ldots\ldots &= 2206{,}07 \\
MNPO = 85{,}2 &\times 57{,}4 = 4890{,}48
\end{aligned}
$$

$$ABCDEFGI = \overset{mq}{2684}{,}41.$$

N° 388. PROBLÈME XXX.

Trouver l'aire d'un cercle, connaissant les valeurs de deux cordes, $4^m,19$ et $3^m,25$, menées d'un même point de sa circonférence aux extrémités d'un même diamètre.

Le carré du diamètre est

$$(4,19)^2 + (3,25)^2 = 28,1186;$$

l'aire cherchée sera donc (n° 348, *coroll.* 1er) :

$$\frac{1}{2}.28,1186 \times 3,14159 = 22^{mq},0843.$$

N° 389. PROBLÈME XXXI.

Étant donnée l'aire d'un cercle, égale à $33^{mq},1830$: trouver son rayon [r].

On a $33,1830 = \pi r^2$, (n° 348, *coroll.* 1er) ;

d'où l'on tire $2.\ log.\ r = log.\ 33,1830 - log.\ \pi$;

$$\begin{aligned} log.\ 33,1830 &= 1,5209156 \\ C.\ log.\ \pi \ldots\ldots &= 9,5028501 \\ \hline 2.\ log.\ r \ldots\ldots &= 1,0237657 \\ log.\ r \ldots\ldots &= 0,5118828 = log.\ 3,25. \end{aligned}$$

Ainsi $r = 3^m,25$, à *un centimètre* près.

N° 390. PROBLÈME XXXII.

Trouver l'aire d'un secteur de cercle décrit d'un rayon égal à $5^m,4$, la base du secteur ayant $45°20'$.

D'après le problème du *numéro* 338, la base du secteur a $4^m,2726$ de longueur ; donc son aire a pour mesure (n° 349) :

$$\frac{1}{2}.4,2726 \times 5,4 = 11^{mq},536.$$

N° 391. Problème XXXIII.

Calculer le côté [c] d'un carré équivalent à la surface comprise entre deux circonférences concentriques dont les rayons sont $R = 1^m{,}3456$ *et* $r = 0^m{,}3458$.

On a $$c^2 = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2) = \pi(R + r)(R - r),$$

(*voyez la note de la page* 218);

d'où $$2.\log.c = \log.\pi + \log.(R + r) + \log.(R - r);$$

$$R + r = 1{,}6914,$$
$$R - r = 0{,}9998;$$

$$\log.\pi \ldots\ldots = 0{,}4971499$$
$$\log.1{,}6914 = 0{,}2282463$$
$$\log.0{,}9998 = \bar{1}{,}9999131$$
$$2.\log.c \ldots\ldots = 0{,}7253093$$
$$\log.c \ldots\ldots = 0{,}3626546 = \log.2{,}30491.$$

Ainsi $c = 2^m{,}305$, à *un millimètre* près.

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE.


Digitized by Google

SECONDE PARTIE.

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE.

N. B.—Dans cette *seconde Partie* qui a pour objet la *Géométrie dans l'espace* (n° 15), toutes les figures doivent être supposées pénétrables et transparentes.—En divers endroits nous donnerons, pour plus de clarté, sous le même *numéro*, une figure ombrée, en même temps que la figure au simple trait.

Digitized by Google

PRÉLIMINAIRES DE LA GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE.

N° 392. Jusqu'à présent, les figures que nous avons étudiées avaient tous leurs points situés dans un même plan : nous allons maintenant considérer les choses d'une manière plus générale, et traiter des figures DANS L'ESPACE (*voyez* le n° 15).

Pour cela, nous supposerons que l'on ait présentes à la mémoire, les propriétés générales de la *ligne droite* et de la *surface plane*, précédemment exposées dans l'*Introduction* (n°s 5 — 14) ; et nous y ajouterons quelques nouveaux détails.

Nous rappellerons d'abord que trois points non situés en ligne droite, ou que deux droites qui se coupent, déterminent un plan (n°s 11 *et* 12). Il en est de même de deux droites parallèles (n°s 71 *et* 132) ; car d'abord, deux pareilles droites sont toujours dans un même plan d'après leur définition ; et ensuite, s'il était possible qu'il existât plusieurs plans passant à la fois par les deux parallèles, il s'ensuivrait que par deux points quelconques de la première et par un point de la seconde, on pourrait faire passer plusieurs plans, *ce qui est absurde* (n° 11). — Cette observation était nécessaire pour confirmer ce que nous avons dit dans le *numéro* 132, et en même temps pour motiver l'expression que nous avons employée en disant : *le plan des deux parallèles.*

Il s'ensuit en outre, que

Dans l'espace comme sur un plan, on ne peut mener par un point donné, qu'une seule parallèle à une droite donnée ;

Et que — *Toutes les parallèles qu'il est possible de mener par les différens points d'une même droite, sont dans un même plan.*

N° 393. Soient deux droites parallèles AB, CD (fig. 313). Fig.313.
— Par l'une d'elles, la droite CD par exemple, on peut mener

Digitized by Google

Fig. 313. une infinité de plans (n° 14). Or, de tous ces plans, aucun ne rencontrera la droite AB, excepté le plan des deux parallèles qui la contiendra tout entière : en effet, si tout autre que ce dernier, si le plan MN par exemple, pouvait rencontrer la droite AB en un certain point, ce plan se confondrait avec celui des parallèles (n° 11).

Cela posé, on dit qu'un *plan* MN et une *droite* AB sont *parallèles*, lorsque le plan et la droite *ne se rencontrent pas*, quoique indéfiniment prolongés.

On voit en même temps, que

Quand une droite AB *est parallèle à une autre droite* CD *tracée dans un plan* MN, *elle est parallèle à ce plan;*

Ou bien que — *Quand deux droites*, AB, CD, *sont parallèles, tout plan* MN [le plan des parallèles excepté] *mené suivant l'une d'elles* DC, *est parallèle à l'autre* AB.

Et par conséquent,

Par un point donné, C par exemple, *on peut mener une infinité de plans parallèles à une droite donnée* AB.

N° 394. On conçoit sans peine qu'il existe aussi des *plans qui ne peuvent se rencontrer quelque loin qu'on les prolonge* : tels seraient par exemple [comme nous pourrions aisément le prouver si cela n'était inutile pour le moment],
Fig. 314. les plans, MN, M'N' (fig. 314), déterminés par deux couples de droites, AB et CD, se coupant en un point O, A'B' et C'D', se coupant en un point O', et parallèles, chacune à chacune, aux deux premières (*voyez* ci-après le n° 439, *scol.* 1er). — On désigne de pareils plans, par la dénomination de Plans Parallèles.

Il est évident que

Quand deux plans sont parallèles, toute droite menée dans l'un est parallèle à l'autre;

Et que, par suite,

Par un point donné, on peut mener une infinité de droites parallèles à un plan donné.

Il n'est pas moins évident que

Les intersections respectives, AB, CD (fig. 315), *de deux plans parallèles*, MN, PQ, *avec une troisième* AD, *sont parallèles :* Fig. 315.

Car ces intersections sont dans un même plan ; et si elles se rencontraient, les plans parallèles se rencontreraient.

Mais la *réciproque* est *fausse :* car il est évident que par chacune de deux parallèles et par un *même* point quelconque pris hors de leur plan, on peut toujours mener deux autres plans ; or ces plans se rencontrent nécessairement en ce point.

Il serait facile d'établir, par un raisonnement semblable à celui du *numéro* 134, que la portion d'espace comprise entre deux plans parallèles, est contenue un nombre infini de fois dans l'espace indéfini.

N° 395. Supposons actuellement — *Une droite* OA (fig. 316) *ayant* UN SEUL *point*, O, *commun avec un plan* MN : je dis qu'une pareille droite *perce* ou *traverse le plan*, et que *le plan coupe la droite* — et la partage en deux segmens indéfinis (n° 5) qui sont situés respectivement de part et d'autre de ce plan. Fig. 316.

Admettons en effet que la droite puisse prendre, par rapport au plan MN, la position AOB, tout entière d'un même côté de ce plan ; il en résulterait une absurdité : car en menant dans le plan, par le point O, une droite COD, on aurait deux droites AOB, COD, nécessairement situées dans un même plan (n° 12), et qui se rencontreraient sans se traverser.

N° 396. Il est facile de conclure de là, que

Deux droites peuvent ne pas se rencontrer, sans cependant être parallèles.

Soit en effet une droite AB (fig. 317) qui vient *percer* d'une manière quelconque, un plan MN en un point O. — Il est clair d'abord que toute droite CD tracée dans ce plan sans passer par le point O, ne pourra rencontrer la droite AB ; et ensuite que les deux droites ne peuvent être contenues à la fois dans un même plan, puisque ce plan, renfermant la droite CD et passant par le point O, se confondrait nécessairement avec le plan MN. Les deux droites AB, CD, ne satisfont donc qu'à Fig. 317.

Fig. 317. une seule des deux conditions que suppose à la fois la définition des parallèles (n°s 71 *et* 132).

N° 397. Soient maintenant — *Deux plans qui passent par*
Fig. 316. *un même point* O (fig. 316); je dis qu'ils *se traversent* mutuellement :

Car sans cela, en menant par le point commun O, une droite AOB dans l'un des deux plans, et une droite COD dans l'autre, on aurait encore deux droites qui se rencontreraient en un point O sans se traverser.

Deux plans qui passent par un même point O *ont* donc *une série de points communs.*

Cela posé, — *L'intersection de deux plans* qui se rencontrent, *est une ligne droite.*

En effet, si par deux points de cette intersection, on mène une droite, cette droite sera contenue tout entière dans l'un et dans l'autre des deux plans (n° 9); et de plus, ses différens points seront évidemment les seuls qui puissent ainsi appartenir aux deux surfaces, puisque celles-ci ne sauraient, sans se confondre, avoir trois points communs (n° 11) non situés en ligne droite.

D'ailleurs, il résulte évidemment de la définition de la surface plane, que la propriété précédente lui appartient exclusivement, et que par conséquent elle en est encore une propriété *caractéristique.* — Il existe bien, à la vérité, d'autres surfaces qui peuvent se couper suivant des droites, mais seulement dans certaines positions relatives; tandis que, dans aucun cas, deux plans ne peuvent se rencontrer autrement que suivant une ligne droite.

N° 398. De même que *deux droites*, en se coupant, partagent l'étendue de leur plan en *quatre* portions que nous avons nommées *angles plans,* ou plus simplement *angles*
Fig. 318. (n° 69) : de même, *deux plans* AF, CK (fig. 318), en se coupant, partagent l'espace en *quatre* portions indéfinies que l'on nomme Angles Dièdres. Les côtés de chaque angle plan sont ici remplacés par deux *moitiés* de plan, ou *régions* indéfinies

(n° 13), qui comprennent chaque angle dièdre, et que l'on nomme ses *faces;* et le sommet de l'angle est remplacé par l'intersection OP des deux plans, que l'on nomme l'*arète* de l'angle dièdre. — Un angle dièdre se désigne, quand il est isolé, par *deux* points pris sur son arète; mais quand plusieurs angles dièdres ont la même arète, on emploie pour désigner chacun d'eux, *quatre* points [ou *quatre* lettres], dont les deux intermédiaires sont pris sur l'arète, et les deux extrêmes dans chacune des deux faces. Ainsi, les *quatre* angles dièdres de la *figure* 318, s'énonceront respectivement: AOPG, COPF, BOPK, DOPE; tandis que chacun d'eux, pris isolément, serait désigné simplement par OP. Fig. 318.

N° 399. Lorsque, par un point quelconque de l'intersection de deux plans, on en fait passer un troisième qui coupe cette intersection, on décompose chacun des *quatre* angles dièdres formés par les deux premiers plans, en *deux* portions indéfinies d'espace, de même nature, par conséquent, que les angles dièdres, et que l'on nomme des Angles Trièdres; d'où l'on voit que *trois plans* qui se coupent en un même point (fig. 319), décomposent toujours l'espace en *huit angles trièdres*, comme on le voit dans la *figure* 319. — Mais nous n'avons pas besoin, pour le moment, d'entrer dans plus de détails sur cette figure; nous y reviendrons. Fig. 319.

N° 400. Avant de donner les définitions des autres objets que nous aurons à étudier dans cette *seconde partie* de la *Géométrie*, nous nous arrêterons un instant pour indiquer différentes analogies remarquables qui sont comme le résumé de ce qui précède, et qui acquerront beaucoup d'importance par la suite.

1° — *Un point* est contenu dans une infinité de droites, et aussi dans une infinité de plans (n° 1er).

Une droite contient une infinité de points; — elle est contenue dans une infinité de plans.

Un plan contient une infinité de points; — et aussi une infinité de droites.

2°.— *Deux points* déterminent une droite, qui les contient tous deux (n° 8).

Deux droites [lorsqu'elles se rencontrent, ce qui, toutefois n'est qu'un cas particulier], déterminent un point qu'elles contiennent toutes les deux ; — et un plan où elles sont contenues ensemble (n° 12).

Deux plans déterminent [ordinairement, et en se rencontrant] une droite qui est contenue (n° 397) tout entière dans chacun d'eux.

3° — *Trois points* déterminent [ordinairement] trois droites qui les contiennent deux à deux, et un plan qui les contient tous trois (n° 11).

Enfin, — *Trois plans* déterminent [ordinairement] trois droites, dont chacune est contenue dans deux de ces plans, et un point qui est contenu dans tous trois (n° 399).

Il faut se rappeler néanmoins, que les dernières de ces analogies sont sujettes, comme nous avons eu le soin de l'indiquer, à quelques exceptions qui ont été suffisamment expliquées par ce qui précède.

Reprenons maintenant les définitions que nous avons encore à faire connaître pour terminer les préliminaires de la *Géométrie dans l'espace.*

N° 401. On nomme en général Angle Polyèdre [et plus ordinairement, mais improprement, Angle Solide], la *portion indéfinie de l'espace, comprise entre plusieurs plans qui se coupent* Fig. 320. *en un même point* S (fig. 320). — Ce point se nomme le *sommet ;* on appelle *face*, chacun des angles plans qui comprennent l'angle polyèdre ; leur ensemble forme la *surface ;* et les intersections de ces mêmes faces prises deux à deux, SA, SB, SC, SD, SE, sont les *arêtes*. Chacune des arêtes sert en même temps de côté à deux faces contiguës. — Il faut encore distinguer dans un angle polyèdre, autant d'angles dièdres qu'il a de faces.

Un angle polyèdre se désigne par la lettre de son sommet, après laquelle on énonce ordinairement [à moins que cet angle ne soit isolé] des lettres qui servent à représenter respectivement un point de chaque arête.

Pour indiquer le nombre des faces, on remplace ordinairement la dénomination générale d'angle polyèdre, par celles d'*angle trièdre*, *tétraèdre*, *pentaèdre*, etc., suivant que le nombre des faces est *trois*, *quatre*, *cinq*, *etc.* — L'angle trièdre est évidemment, d'après la définition ci-dessus, le plus simple des angles polyèdres.

Un angle polyèdre de plus de trois faces peut avoir un ou plusieurs angles dièdres *rentrans :* il est alors *concave ;* si tous ses angles dièdres sont *saillans*, il est *convexe.* — On peut dire encore qu'un angle polyèdre est convexe ou concave, suivant qu'une droite peut percer sa surface en deux points seulement ou en un plus grand nombre de points ; *etc.* (*voyez* le n° 215).

On nomme *plan diagonal*, tout plan, SAC, SAD, mené par deux arètes qui n'appartiennent pas à la même face. — Au moyen d'un nombre convenable de pareils plans,

Tout angle polyèdre est décomposable en angles trièdres,

De la même manière que tout polygone est décomposable en triangles au moyen de diagonales.

Un angle polyèdre est *régulier* quand il a toutes ses faces égales et tous ses angles dièdres égaux ; il est alors nécessairement convexe.

N° 402. On nomme en général POLYÈDRE (*) (fig. 321), une portion d'espace, ou plus simplement, un *espace entièrement circonscrit par plusieurs plans qui se coupent deux à deux.* — Le polyèdre se trouve ainsi limité par une série de polygones que l'on nomme ses *faces*, et dont l'ensemble constitue la *surface* du polyèdre ; les côtés de ces faces sont les *arètes* du polyèdre ; et les points d'intersection de ces arètes en sont les *sommets.* On nomme *diagonale* toute droite menée entre deux sommets qui ne terminent pas une même arète, et *plan diagonal* tout plan mené par trois sommets non situés sur la même face. — Il y a encore à considérer dans un polyèdre, autant d'angles dièdres qu'il a d'arètes, et autant d'angles polyèdres qu'il a de sommets. — Le polyèdre est *convexe* lorsque Fig. 321.

(*) De πολύς, *multiple* ; et ἕδρα, *base.*

tous ses *angles polyèdres* sont *saillans;* il est *concave* si quelqu'un d'eux est *rentrant*. Ou bien, un polyèdre est convexe lorsqu'une droite ne peut rencontrer sa surface en plus de deux points, ou que le plan prolongé d'une face quelconque ne peut couper la figure, ou, ce qui est la même chose, lorsque le polyèdre est tout entier d'un même côté d'une face quelconque indéfiniment prolongée. — Deux polyèdres convexes coïncident lorsqu'ils ont les mêmes sommets (*voyez* le n° 215).

Les plus simples des *polyèdres* sont, d'abord les PRISMES
Fig. 322. (fig. 322), qui *ont pour faces, deux polygones égaux et parallèles, et une série de parallélogrammes en nombre égal à ce-*
Fig. 323 *lui des côtés de chaque polygone;* puis les PYRAMIDES (fig. 323), qui *ont pour faces, un polygone d'un nombre quelconque de côtés, et une série de triangles dont le sommet est commun.*

Un POLYÈDRE est dit RÉGULIER lorsque *toutes ses faces sont des polygones réguliers égaux entre eux,* et que *tous ses angles dièdres sont égaux.* — D'après cette définition, un polyèdre régulier est nécessairement convexe (*voyez* le n° 75).

N° 403. Nous avons vu précédemment (n° 1er), que *Sur une surface quelconque on peut concevoir une infinité de lignes;* d'où il résulte que toutes les surfaces peuvent être considérées comme *engendrées par le mouvement d'une ligne.*
Fig. 324 et 325. —Cette ligne, MN (fig. 324 *et* 325), généralement variable de forme en même temps que de position, se nomme par cette raison, la *génératrice* de la surface; et pour achever de déterminer cette dernière, on suppose que la génératrice est assujettie à glisser le long d'une ligne droite ou courbe AB, que l'on nomme la *directrice.*

Cela posé, il est naturel de considérer comme les plus simples, les *surfaces qui ont pour génératrice une ligne droite,* et que l'on nomme SURFACES RÉGLÉES pour exprimer que *l'on peut, en chaque point, y appliquer une droite, au moins dans un sens.* Chacune des positions de la génératrice, ou chacune des directions suivant lesquelles on peut appliquer ainsi une droite sur la surface, se nomme une *arête* de cette surface.

Digitized by Google

Le *genre* des surfaces réglées se divise en trois *espèces*.

Le plan, par sa nature, étant nécessairement une surface réglée, et la plus simple de toutes, en constitue à lui seul la première espèce; les deux autres ne contiennent que des surfaces courbes.

Dans les surfaces réglées de la seconde espèce, composant la première espèce des surfaces réglées courbes, *deux arêtes consécutives, c'est-à-dire infiniment voisines, sont constamment dans un même plan;* on les nomme SURFACES DÉVELOPPABLES, en raison de ce qu'elles peuvent se dérouler, s'étendre, ou *se développer* sur un plan : il résulte en effet de leur définition, qu'elles peuvent être considérées comme composées de portions de plan, infiniment étroites dans un sens, mais infiniment allongées dans celui de leurs arètes; et comme d'ailleurs chaque arète se trouve commune à deux portions consécutives, il s'ensuit que deux portions consécutives quelconques peuvent s'appliquer l'une à côté de l'autre sur un même plan, et que par conséquent il en est de même pour la surface entière.

Au reste, il est facile de voir que les portions de plan consécutives infiniment petites dont il est ici question peuvent être de deux sortes; savoir : des angles infiniment petits, lorsque les arètes consécutives se coupent deux à deux; et au contraire des bandes infiniment étroites et indéfinies en longueur, lorsque les arètes consécutives sont parallèles.

Enfin, la troisième espèce des surfaces réglées, ou la seconde espèce des surfaces réglées courbes, comprend toutes celles dans lesquelles *deux arètes consécutives quelconques ne se trouvent pas dans un même plan :* on les nomme SURFACES GAUCHES (*).

(*) Les arts nous offrent une multitude d'exemples de surfaces réglées : ainsi, les surfaces des *voûtes* dites *en berceau*, *en plein ceintre*, sont des surfaces développables; il en est de même généralement des surfaces exécutées par les *cartonniers*, les *ferblantiers*, etc., puisqu'on les construit en *pliant*, en *courbant*, en *contournant* de diverses manières, des surfaces planes. Au contraire, la surface inférieure d'un escalier tournant, engendrée par une droite horizontale qui glisse le long d'une verticale, et nommée *conoïde*, est une surface gauche, etc.

N° 404. Mais revenons aux surfaces développables, les seules surfaces réglées que l'on considère dans les élémens de *Géométrie*.

Les plus simples parmi ces surfaces, sont les SURFACES
Fig. 324. CYLINDRIQUES (fig. 324).— On nomme ainsi, les *surfaces engendrées par le mouvement d'une droite dont deux positions consécutives* [ou *infiniment rapprochées*], *sont constamment parallèles entre elles.* — Toutes les génératrices consécutives se trouvant ainsi deux à deux dans un même plan puisqu'elles sont parallèles, il est clair que la surface est développable.

On nomme CYLINDRE, *l'espace renfermé entre une surface cylindrique et deux plans parallèles entre eux* [ce qui suppose que la directrice de la surface est une courbe fermée]. — Les sections parallèles sont les *bases* du cylindre. — Le *cylindre* est dit *circulaire* quand les bases sont des cercles.

Après les surfaces cylindriques viennent les SURFACES CONI-
Fig. 325. QUES (fig. 325). — On nomme ainsi, les *surfaces engendrées par le mouvement d'une droite qui passe constamment par un même point.*— Ce point se nomme le *sommet* ou le *centre* de la surface. Toute surface conique est nécessairement composée de *deux* portions indéfinies qui se réunissent au sommet : ces deux portions se nomment les *nappes* de la surface.—Les génératrices étant encore deux à deux dans un même plan puisqu'elles se coupent, la surface est développable.

On nomme CÔNE, *l'espace renfermé entre une surface conique et un plan* [ce qui suppose que la directrice est une courbe fermée.] — Cette section plane se nomme la *base* du cône ; le *cône* est dit *circulaire* quand cette base est un cercle.

Enfin, restent les surfaces dont les génératrices consécutives se coupent deux à deux, mais en des points variables : [c'est le cas le plus général des surfaces développables].—On ne donne pas de nom spécial à ces surfaces ; mais le lieu des intersections consécutives des génératrices se nomme *l'a-*

rête de rebroussement. Il est facile de voir que cette arête [qui est toujours une courbe à double courbure (n° 14)] partage encore la surface en deux portions distinctes, que l'on nomme de même *ses deux nappes.*

N° 405. Les plus simples des surfaces, après les surfaces réglées, sont les Surfaces de Révolution (fig. 326). — On appelle ainsi, les *surfaces engendrées par la révolution d'une ligne droite ou courbe, à simple ou à double courbure* (n° 14), *tournant autour d'une droite* que l'on nomme l'Axe de *révolution* (n° 46), de manière que, dans ce mouvement, *chaque point de la génératrice décrive une circonférence de cercle ayant son centre sur l'axe, et dont tous les rayons restent constamment perpendiculaires à cet axe* (*), comme on l'expliquera avec plus de détails quand il en sera temps. Fig. 326.

On nomme *lignes méridiennes,* ou *sections méridiennes*, les intersections de la surface par les plans que l'on peut mener suivant l'axe. — *Toutes les sections méridiennes sont* évidemment *égales entre elles.*

On nomme *cercles parallèles* de la surface, les différens cercles dont les circonférences sont décrites par chaque point de la génératrice; et quand cette génératrice est une ligne à simple courbure dont le plan contient l'axe de révolution, les rayons de ces cercles restent constamment parallèles entre eux dans leur mouvement.

Celles des surfaces coniques et cylindriques que l'on considère ordinairement dans la Géométrie élémentaire, sont aussi des surfaces de révolution, comme la suite le fera voir.

On appelle généralement et improprement *corps rond*, tout espace renfermé, soit dans une surface de révolution, soit entre une portion de surface de révolution et les divers cercles parallèles de la surface.

Le cône et le cylindre que l'on obtient (n° 404) en coupant les surfaces conique et cylindrique de révolution, par des plans perpendiculaires à l'axe, sont donc des corps ronds.

(*) Telles sont les surfaces que l'on construit au moyen du *tour* ordinaire.

N° 406. La plus simple des surfaces de révolution, après celles dont nous venons de parler, est la SURFACE SPHÉRIQUE
Fig. 327. (fig. 327). — Cette surface est *engendrée par la révolution d'une demi-circonférence qui tourne autour du diamètre qui lui sert de corde*. Il résulte de là qu'on peut encore en donner la définition suivante : une *surface courbe entièrement fermée, dont tous les points sont également distans d'un point intérieur que l'on nomme* CENTRE (voyez le n° 16).

La SPHÈRE est *l'espace renfermé dans la surface sphérique :* [cependant ce nom s'applique aussi à *la surface* elle-même]; c'est le troisième et dernier des principaux *corps ronds* (n° 405) que l'on considère ordinairement dans la Géométrie élémentaire.

La sphère est donc, dans l'espace, relativement aux surfaces courbes, ce que le cercle est par rapport aux courbes planes.

Ainsi, l'on nomme de même, RAYON de la sphère, *la distance constante du centre à la surface*, et DIAMÈTRE, toute *droite* qui, *passant par le centre*, aboutit de part et d'autre à la surface. — *Tous les diamètres sont égaux* et doubles du rayon, comme dans le cercle. — *Deux sphères sont égales lorsqu'elles ont même rayon* ou *même diamètre* (voyez le n° 16 *et* les *suiv.*).

Une sphère se désigne ordinairement, soit par un rayon, OA
Fig. 328. (fig. 328) [le centre étant énoncé le premier], soit simplement par la lettre, O, du centre, soit enfin par *quatre* points de sa surface, non situés dans un même plan : [la suite justifiera cette énonciation].

N° 407. Tout *plan* PQ (fig. 328) *passant par le centre* O de la sphère, coupe sa surface suivant une ligne courbe, qui est évidemment un *cercle de même centre et de même rayon* que la surface elle-même (n°s 16 *et* 406).

De plus, il est facile de prouver, par un raisonnement analogue à celui du *numéro* 18, qu'un pareil plan *partage la sphère et sa surface en deux parties égales :* on les nomme *hémisphères*.

Pour suivre en tous points, relativement à la Géométrie dans l'espace, la marche que nous avons suivie pour la Géométrie plane, nous devrions examiner les diverses propriétés de la sphère simultanément avec celles de la ligne droite et de la surface plane. — Mais, en nous hâtant de traiter du cercle, nous avions pour but d'habituer les élèves à manier le *compas* en même temps que la *règle*, et de les mettre à même d'exécuter le plus tôt possible les principales opérations graphiques de la Géométrie. N'étant plus, dans le cas actuel, sollicité par un motif aussi puissant, nous étudierons de préférence les propriétés de la sphère dans un chapitre spécial.

N° 408. De même qu'une ligne courbe peut être regardée comme composée d'une infinité de lignes droites infiniment petites (n° 240): de même aussi

On peut considérer toute surface, comme composée d'une infinité de facettes planes infiniment petites.

En effet, on peut d'abord prendre sur la surface, une infinité de points infiniment rapprochés; on peut ensuite supposer tous les points voisins réunis deux à deux par des droites qui seront infiniment petites, et qui par conséquent pourront être regardées comme étant toutes sur la surface. Comme d'ailleurs trois points déterminent un plan, et que pour réunir trois points deux à deux, trois droites sont nécessaires, il s'ensuit que la surface se trouvera ainsi décomposée en une infinité de triangles plans *infiniment petits*. — Ces *facettes triangulaires* infiniment petites sont ce que l'on nomme encore (voyez le n° 242) les *élémens* de la surface courbe; et l'on peut conclure de la possibilité de cette décomposition de toute surface courbe en élémens plans, que

Les surfaces courbes jouissent, en général, des mêmes propriétés que les surfaces polyèdres.

N° 409. Cela posé, on nomme *plan tangent* à la surface (fig. 329), chacun des plans de ces élémens indéfiniment prolongés à l'entour. Si par l'élément ou par le point de tangence, on trace une série quelconque de courbes sur la surface, et que par le même point on mène des tangentes à ces courbes, toutes ces tangentes, qui seront aussi des *tangentes à la surface*, se trouveront dans le plan tangent. En effet, chacune des courbes tracées sur la surface, a un élément dans le plan du triangle élémentaire commun à la surface et au plan tangent; donc le prolongement de l'élément de la courbe est dans le plan du triangle élémentaire, indéfiniment prolongé. Fig. 329.

Le *plan tangent* peut aussi être considéré comme la limite d'un *plan sécant* [c'est-à-dire qui coupe la surface], dont plusieurs points communs avec la surface se sont réunis en un seul. Et lorsqu'il n'y a plus aucun autre point commun entre le plan et la surface courbe, on dit, en employant une définition analogue à celle que l'on a adoptée pour la tangente au cercle (n° 21), que le *plan tangent* est celui qui n'a qu'*un point commun* avec la surface; mais cette définition n'est pas admissible en général, et ne peut présenter l'idée de contact, que pour les surfaces qui [comme la sphère] satisfont à deux conditions : la première d'être convexes, c'est-à-dire de ne pouvoir être percées par une ligne droite en plus de deux points (n° 7), et la seconde d'être fermées de toutes parts. —Ainsi par exemple, dans les surfaces développables, qui ont une infinité d'élémens situés dans un même plan et en ligne droite (n° 403), le plan tangent touche la surface suivant toute la longueur d'une arête. On peut alors le définir ainsi : un *plan dont deux arètes d'intersection avec la surface sont réunies en une seule*, ou un *plan qui n'a qu'une arète commune avec la surface* (voyez le n° 21).

LIVRE TROISIÈME.

DES FIGURES CONSIDÉRÉES DANS L'ESPACE.

CHAPITRE PREMIER.

DES DROITES ET DES PLANS PERPENDICULAIRES ENTRE EUX; ET DES OBLIQUES AU PLAN.

N° 410. On sait (n° 81, 2°) que par un point pris sur une droite, on ne peut mener, *dans un même plan avec la droite*, qu'une seule perpendiculaire à cette ligne. Mais aussi, comme par une droite (n° 14) on peut mener une infinité de plans, il s'ensuit que

Par un point O (fig. 330) *pris sur une droite* AB, *on peut mener une infinité de perpendiculaires distinctes*, Fig. 330.

Lesquelles déterminent, conjointement avec la droite AB, une infinité de plans distincts, ayant tous, deux à deux, cette droite pour intersection commune.

Or, on peut considérer ces perpendiculaires, comme n'étant autre chose que les positions successives d'une même droite, mobile autour de la première de manière à faire toujours avec elle, au point O, deux angles égaux entre eux; [et nous établirons tout à l'heure que ces perpendiculaires sont toutes dans un même plan].

N° 411. Cela posé, en admettant la vérité de l'assertion précédente, tout Plan, *lieu des perpendiculaires menées à une droite par un de ses points*, est dit Perpendiculaire *à la droite*;

Et *réciproquement*, une Droite est dite Perpendiculaire *à un plan*, lorsque [rencontrant cette surface] elle est *perpendiculaire à toutes les droites que l'on peut mener par son* Pied (n° 76) *dans le plan*.

Lorsqu'une *droite* perce un plan sans cependant satisfaire à la condition que l'on vient d'énoncer, elle est dite Oblique *au plan*, et le *plan* est dit *oblique à la droite*. Le point d'intersection de la droite avec le plan est encore dit le *pied de l'oblique* (n° 79).

Nous démontrerons de plus (n° 423), que *le* Lieu *des perpendiculaires élevées par les différens points d'une droite tracée dans un plan*, est un autre plan : et cette propriété étant réciproque, les *deux* Plans sont dits Perpendiculaires *entre eux*.

N° 412. Lemme I. Fig. 331.

Fig. 331. *Si une droite* OA *est perpendiculaire à deux autres droites*, OB, OC, *menées par un de ses points* O, *elle est perpendiculaire à toutes celles que l'on peut mener par le même point dans le plan* MN *de ces deux autres droites*.

Soit OD une *quelconque* de ces droites : il suffit de prouver que OA est perpendiculaire à OD. Pour cela, prolongeons OA de l'autre côté du plan, d'une quantité OA' = OA ; prenons sur les deux droites OB, OC, deux points quelconques B, C [de manière toutefois que la droite OD se trouve dans l'angle BOC] ; tirons BC, et soit D le point d'intersection de BC avec OD ; enfin menons AB, AC, AD, A'B, A'C, A'D.

Cela posé, AB = A'B (n° 85), et AC = A'C ; donc (n° 169) les deux triangles ABC et A'BC sont égaux de telle manière que, dans leur superposition mutuelle, les droites AD, A'D, coïncideraient : donc OD est perpendiculaire à OA (n° 85).

Corollaire. — *Si une droite est perpendiculaire à deux autres droites menées par son pied dans un plan, elle est perpendiculaire au plan* (n° 411).

N° 413. Lemme II. Fig. 332.

Réciproquement : — *Si une droite* OA *est perpendiculaire à* Fig.332.
trois autres, OB, OC, OD, *menées par un de ses points*, O,
celles-ci sont toutes trois dans un même plan.

Pour le prouver, soit MN le plan des deux droites OB, OC; et supposons que OD ne soit pas dans ce plan. Soit encore AD le plan des deux droites OA et OD. Les deux plans se couperont suivant une droite OD′ qui, par hypothèse, différera de OD. Mais Alors OD et OD′ seront perpendiculaires à OA, et *dans un même plan* avec OA ; — *Ce qui est absurde* (n° 81, 2°).

Corollaire. — *Tant de droites que l'on voudra, perpendiculaires à une même droite en un même point, sont toutes dans un même plan.*

Par conséquent : — Si l'on fait tourner un angle droit autour de l'un de ses côtés, l'autre côté *engendrera* (n° 379) un plan; ou en d'autres termes, le lieu *des perpendiculaires* élevées sur le premier côté par un de ses points, est un plan, comme nous l'avons énoncé ci-dessus (n° 410).

N° 414. Théorème I. Fig. 333.

Par un point O *pris sur une droite* AB, — *1° On peut tou-* Fig.333.
jours élever un plan perpendiculaire ; — et — *2° On n'en peut élever qu'un.*

1° La première partie de la proposition est évidente, puisque d'après ce qui précède (n° 412) elle revient à dire que l'on peut élever à la droite AB, par le point O, deux droites perpendiculaires distinctes. Et en effet, le plan de ces perpendiculaires est lui-même perpendiculaire à la droite AB.

2° Soient MN et M′N′ deux plans perpendiculaires à AB au même point O, et GK leur intersection commune. Par la droite AB menons un plan qui ne passe pas suivant GK, ce qui est possible d'une infinité de manières (n° 14). Soient OC,

Fig. 333. OC′, les intersectious respectives de ce troisième plan avec les deux premiers : OC et OC′ seront à la fois perpendiculaires à AB, et *dans un même plan avec* AB ; — *Ce qui est absurde* (n° 81, 2°).

N° 415. Théorème II. Fig. 334.

Fig. 334. *D'un point* O *pris hors d'une droite* AB, — 1° *On peut toujours abaisser un plan perpendiculaire ;* — et — 2° *On n'en peut abaisser qu'un.*

1° Dans le plan déterminé par la droite AB et le point O on peut toujours abaisser du point O une perpendiculaire sur AB (n° 82, 1°). Puis, par le pied de cette perpendiculaire on peut toujours en élever une seconde sur la même droite AB [puisque l'on peut en élever une infinité (n° 410)]. Or, le plan de ces deux droites perpendiculaires, est lui-même perpendiculaire à AB (n° 412).

2° Soient encore MN et M′N′ deux plans menés par le point O perpendiculairement à la droite AB, le premier coupant la droite au point C et le second au point C′ : [les deux points C, C′, ne sauraient coïncider, sans quoi l'on pourrait, par un même point C de la droite AB, mener deux plans perpendiculaires à cette droite]. Cela posé, tirons OC, OC′ : nous aurons ainsi deux perpendiculaires menées à une même droite AB par un même point O *extérieur* à cette droite ;— *Ce qui est absurde.*

Corollaire. — *Deux plans perpendiculaires à une même droite sont parallèles* (voyez le n° 394).

N° 416. Théorème III. Fig. 335.

Fig. 335. *Tout point* E *du plan perpendiculaire* MN *mené sur une droite* AB *par son milieu* C, *est également distant des deux extrémités de la droite ;*

Tout point F *extérieur au plan, est inégalement distant des mêmes extrémités.*

En effet : — 1° En menant AE, BE, CE, on aura, comme dans le *numéro* 85,

$$AE = BE ;$$

2° En menant AF, BF, et nommant E le point d'intersection de BF avec le plan MN, on aura encore (*même* n°) Fig. 335.

$$AF < AE + EF, \quad \text{ou} \quad AF < BF.$$

Scolie 1er. — Ce théorème a aussi plusieurs *réciproques* pour lesquelles nous renvoyons au *numéro* 85.

COROLLAIRE 1er. — *Le plan perpendiculaire mené par le milieu d'une droite, est le* LIEU *des points qui sont également distans des extrémités de cette droite.* — On le nomme *plan de symétrie* (voyez le n° 86).

SCOL. 2. — *Si trois points* [non situés en ligne droite] *sont respectivement à égale distance de deux autres points, le plan mené par les trois premiers est perpendiculaire sur le milieu de la droite qui joint les deux derniers.*

Scol. 3. — Il est clair que dans le théorème précédent, un point F est toujours, par rapport au plan, du même côté que l'extrémité A dont il est le plus rapproché (*voyez le* n° 85).

COROLL. 2. — *Les plans perpendiculaires menés respectivement aux trois côtés d'un triangle par leurs milieux, se coupent suivant une même droite perpendiculaire au plan du triangle, et passant par le centre du cercle circonscrit.*

N° 417. THÉORÈME IV. Fig. 336 *et* 337.

Par un point O *pris sur un plan* AB, — 1° *On peut toujours élever une perpendiculaire;* — et — 2° *On n'en peut élever qu'une.* Fig. 336 et 337.

1° Supposons que par le point O (fig. 336), dans le plan AB, on mène une droite quelconque MN : on pourra toujours, par ce même point, mener à la droite MN le plan perpendiculaire GI (n° 414, 1°). Soit GK l'intersection de ce plan avec le plan AB. Élevons sur GK, et dans le plan GI, la perpendiculaire OP. Cette droite OP sera perpendiculaire au plan AB. En effet, la droite OP est menée perpendiculairement à GK, et se trouve de plus, perpendiculaire à MN puisqu'elle est située dans un plan GI perpendiculaire à MN (n° 411), et qu'elle passe par

Fig. 336. leur point d'intersection O. Donc cette droite OP est perpendiculaire au plan des deux droites GK, MN, c'est-à-dire au plan AB.

Fig. 337. 2° Soient, s'il est possible, OP, OP′ (fig. 337), deux perpendiculaires au plan AB : le plan de ces deux droites coupera le plan AB suivant une droite GK; mais alors (n° 411) OC et OC′ seront perpendiculaires à GK et *dans un même plan avec* GK; — *Ce qui est absurde* (n° 81, 2°).

N° 418. Théorème V. Fig. 338 *et* 339.

Fig. 338 et 339. *D'un point O pris hors d'un plan AB, — 1° On peut toujours abaisser une perpendiculaire, —* et — *2° On n'en peut abaisser qu'une.*

1° Supposons de même que l'on mène, dans le plan AB (fig. 338), une droite quelconque MN, puis par le point O un plan perpendiculaire à MN, dont l'intersection avec cette droite soit le point I, et dont l'intersection avec le plan AB soit la droite IP. Cela posé, du point O abaissons sur IP la perpendiculaire OP; prolongeons OP d'une quantité P′O = PO; et menons les droites OI, O′I : ces droites seront égales (n° 84, 1°); et la droite MN leur sera perpendiculaire, puisqu'elle est perpendiculaire à leur plan. Alors, si l'on prend sur MN un point quelconque L, et que l'on mène OL, O′L, on aura deux triangles OIL, O′IL, rectangles en I, et égaux entre eux (n° 170). Donc OL = O′L; donc PL est perpendiculaire sur OP; donc OP, perpendiculaire à la fois aux deux droites PI, PL, est perpendiculaire à leur plan; *C. Q. F. D.*

2° (fig. 339). — Même raisonnement que pour le théorème précédent (n° 417, 2°).

Scolie. — La considération des droites MN et OP (fig. 338), perpendiculaires à la fois sur la droite IP, et non comprises dans un même plan (n° 396), fait voir que

Dans l'espace, deux droites peuvent être perpendiculaires à une troisième sans être pour cela *parallèles entre elles.*

N° 419. Théorème VI. Fig. 340.

La perpendiculaire OC *abaissée sur un plan* AB, *d'un* point extérieur O, *est le plus court chemin de ce point au plan.* Fig. 340.

En effet, soit une oblique quelconque OD menée du point O au plan AB. En tirant la droite CD, on formera un triangle OCD dont OD sera l'hypoténuse ; d'où OC < OD (n° 83) ;

C. Q. F. D.

Corollaire. — *La perpendiculaire abaissée d'un point sur un plan mesure la vraie distance du point à ce plan.*

Scolie. — [La distance CD est dite la *projection* de la droite OD sur le plan AB. — [En général, la projection d'une droite déterminée de grandeur, MN (fig. 341), sur un plan indéfini AB, est la *distance* PQ *des pieds des perpendiculaires* abaissées des extrémités de la droite sur le plan. — Nous démontrerons plus loin (n° 423, *coroll.* 1er) que les perpendiculaires abaissées des différens points de MN sur le plan AB, sont toutes dans un même plan, et que leurs pieds sont tous situés sur la droite PQ (*voyez* le n° 411). — [Quand la droite est perpendiculaire au plan, la projection se réduit à un point qui est le pied de la perpendiculaire.] Fig. 341.

L'angle ODC (fig. 340) que la droite OD fait avec sa projection CD, est dit *l'angle de projection*, ou *l'inclinaison* de la droite sur le plan AB, ou simplement *l'angle de la droite et du plan* : il est complémentaire de l'angle que fait la même oblique OD avec la perpendiculaire OC menée par le même point O. Fig. 340.

N° 420. Théorème VII. Fig. 342.

Si d'un point O pris hors d'un plan AB on mène la perpendiculaire OC et différentes obliques OD, OD′, OD″,.,. OE, à ce plan : Fig. 342.

1° *Deux obliques*, OD, OD′, *qui s'écartent également de la perpendiculaire, sont égales ; et elles sont également inclinées sur le plan ;*

2° *De deux obliques*, OD, OE, *qui s'écartent inégalement de la perpendiculaire, celle*, OE, *qui s'en écarte le plus est la plus longue ; et elle est la plus inclinée sur le plan.*

Fig. 342. 1° Puisque, par l'hypothèse, CD = CD' = CD"......, les triangles OCD, OCD', OCD",..... sont égaux (n° 170); donc, d'abord

OD = OD' = OD".....,

et ensuite ODC = OD'C = OD"C....;

Généralement : — Si du point C comme centre, et d'un rayon égal à CD, on décrit une circonférence dans le plan AB, toutes les obliques qui lieront le point O aux divers points de la circonférence, seront égales; et elles seront également inclinées sur le plan;

2° Si, les trois points C, D, E, étant supposés en ligne droite, on a CE > CD,
on aura aussi OE > OD, et OEC < OED (n° 117);

D'ailleurs, la même conséquence aurait encore lieu quand bien même les trois points C, D, E, ne seraient pas en ligne droite, puisque, d'après la première partie de la proposition, on peut remplacer l'oblique OD par toute oblique OD' dont la distance à la perpendiculaire serait la même.

Scolie. — Le théorème précédent donne lieu à plusieurs *réciproques* analogues à celles des *numéros* 84 *et* 117, auxquels il nous suffira de renvoyer.

COROLLAIRE. — *D'un même point on peut concevoir une infinité de droites égales menées à un même plan* [pourvu qu'elles soient plus grandes que la perpendiculaire].

De plus, toutes ces droites étant également distantes de la perpendiculaire, il s'ensuit que

Un point quelconque O *d'une perpendiculaire* OC *à un plan, peut servir à décrire dans ce plan une circonférence dont son pied soit le centre.*

Cette perpendiculaire se nomme l'*axe* du cercle. Tous les points de l'axe peuvent être considérés comme autant de centres du cercle, et les obliques comme des rayons correspondans, lesquels peuvent être également employés à le décrire.

N° 421. Théorème VIII. Fig. 343.

1° *Tout point* O *de la perpendiculaire élevée sur le plan d'un cercle* CA *par son centre* C, *est également distant de tous les points de la circonférence ;* Fig. 343.

2° *Tout point* G *extérieur à la perpendiculaire, est inégalement distant des divers points de la circonférence.*

En effet : — 1° Les distances du point O à tous les points de la circonférence CA sont des obliques égales (n° 84) ;

2° Si du point G on abaisse, sur le plan du cercle, la perpendiculaire GI, les distances du point I aux divers points de la circonférence CA n'étant pas égales entre elles (n° 179), les obliques correspondantes, c'est-à-dire les distances du point G aux points correspondans de cette circonférence, ne le seront pas non plus (n° 420).

Corollaire 1er. — *L'axe d'un cercle est le* lieu *des points qui sont également distans de tous les points de sa circonférence.*

Scolie. — Tout point pris dans le plan du cercle CA, et différent du centre C, ne pouvant être à la fois également distant que de deux points au plus de la circonférence (n° 166, *coroll.* 3), il s'ensuit aussi que tout point G extérieur à la perpendiculaire CO ne peut être également distant que de deux points au plus de la même circonférence. — De là résultent encore les corollaires suivans :

Coroll. 2 — *Tout point également distant de trois points de la circonférence d'un cercle* CA *appartient à son axe ;*

Et par suite il est également distant de tous les points de cette circonférence.

Coroll. 3. — Puisque deux points déterminent une droite,

Si deux points sont respectivement à égale distance de trois points d'une circonférence de cercle, la droite menée par les deux premiers points sera l'axe du cercle.

Coroll. 4. — Si du point G on mène des droites à tous les points de la circonférence :

1° La *plus grande* et la *plus petite* de toutes ces droites seront les droites GA et GB, contenues dans le plan déterminé par l'axe CO et le point G (*voyez* le n° 178).

2° De deux droites GP, GQ, celle-là sera la plus longue qui sera la plus rapprochée de la distance *maximum* GA, et celle-là sera la plus courte qui sera la plus rapprochée de la distance *minimum* GB (*voyez* le n° 179).

Fig. 343. Toutes ces propositions résultent de la comparaison des triangles rectangles GIA, GIB, GIP, GIQ, dans lesquels le côté GI étant commun, les côtés IA, IB, IP, IQ, sont les distances des obliques à la perpendiculaire (n° 420); et les hypoténuses sont les obliques elles-mêmes.

N. B. — Nous supprimons les *réciproques* qui n'offrent aucune difficulté d'après tout ce qui précède.

N° 422. Théorème IX. Fig. 344.

Fig. 344. *L'angle que fait une oblique* GC *à un plan* MN *avec sa projection* IC *sur ce plan, est le* MINIMUM *des angles que fait cette oblique avec toutes les droites que l'on peut mener par son pied dans le plan.*

En effet, décrivons dans le plan MN, du centre C, et du rayon CI, une circonférence; menons divers rayons CP, CQ..., à cette circonférence; par le point I menons le diamètre ICA; et enfin menons GA, GP, GQ,..GI.

Cela posé, comme on a

IA > IP > IQ..... ...... (n° 90),

il en résulte GA > GP > GQ.... > GI (n° 420):

d'où GCA > GCP > GCQ... > GCI (n° 171, *récipr.*);

C. Q. F. D.

Scolie. — Le raisonnement précédent prouve de plus, que les angles GCA, GCP, GCQ... vont en diminuant depuis GCA qui est leur *maximum*, jusqu'à GCB qui est leur *minimum* et le supplément de GCA.

Il en résulte, par suite, que

Une droite est nécessairement perpendiculaire à un plan lorsqu'elle est également inclinée sur trois autres droites menées par son pied dans le plan.

N° 423. Théorème X. Fig. 345.

Fig. 345. *Deux droites,* AB, CD, *perpendiculaires à un même plan* MN, *sont parallèles.*

Pour le prouver, menons la droite BD par les pieds de ces perpendiculaires. Puis, par un point quelconque O de cette droite, élevons, dans le plan MN, la perpendiculaire EF; et prenons OE = OF.

Cela posé, nous aurons BE = BF (n° 84); d'où AE = AF (n° 420). Par conséquent, la droite AB a deux points A, B, situés dans le plan perpendiculaire à la droite EF, menés par le point O; donc elle y est contenue tout entière.

Même démonstration pour la seconde droite CD.

Digitized by Google

Donc les droites AB, CD, sont dans un même plan; et comme elles y sont perpendiculaires à une même droite BD, elles sont parallèles; *C. Q. F. D.* Fig. 345.

Corollaire 1er. — *Tant de droites que l'on voudra, menées perpendiculairement à un plan* MN *par les différens points d'une droite* [contenue ou non dans ce plan : on suppose seulement qu'elle ne lui soit pas perpendiculaire] *sont toutes dans un même plan ;*

C'est ce plan, nécessairement *unique* pour la même droite, que nous avons nommé *perpendiculaire* au plan MN (*voyez* les nos 411 ; *et* 419, *scol.*).

Par suite — *Les pieds des perpendiculaires sont tous sur une même droite*, intersection des deux plans, et *projection* de toutes les droites que l'on peut tracer dans le plan de ces perpendiculaires (n° 419 *scol.*).

Coroll. 2. — La propriété énoncée dans le corollaire précédent, étant nécessairement réciproque, il s'ensuit que

Quand un plan est perpendiculaire à un autre, réciproquement *celui-ci est perpendiculaire au premier ;*

C'est pourquoi *les* deux *plans* sont dits *perpendiculaires entre eux* (n° 411).

Scolie. — *Deux plans perpendiculaires entre eux partagent l'*espace indéfini *en quatre angles dièdres égaux.*

N° 424. Théorème XI. Fig. 346.

Lorsqu'une droite AB *est perpendiculaire à un plan* MN, *tout autre plan* CF *mené suivant la droite, est perpendiculaire au premier ; — et réciproquement.* Fig. 346.

En effet, toutes les droites menées perpendiculairement au plan MN, par les différens points de l'intersection commune EF, sont dans un même plan qui a les deux droites AB, EF, communes avec le plan CF (n° 423, *coroll.* 1er), et qui par conséquent se confond avec lui; *donc, etc.*

Réciproquement : — *Lorsque deux plans,* MN, CF, *sont perpendiculaires entre eux,*

Fig 346. 1° *Toute droite* AB *menée dans l'un des deux* CF *perpendiculairement à l'intersection commune* EF, *est perpendiculaire à l'autre;*

2° *Toute droite menée perpendiculairement à l'un d'eux* MN, *par un point pris sur l'autre, est tout entière dans ce dernier.*

SCOLIE. — On peut encore énoncer le théorème précédent de la manière suivante :

Un plan MN *perpendiculaire à une droite* AB, *est perpendiculaire à tout plan* EF *mené suivant cette droite.*

COROLLAIRE. — *Un plan perpendiculaire à l'intersection de deux autres, est perpendiculaire à ces derniers.*

N° 425. THÉORÈME XII.

Tout plan C *perpendiculaire à deux autres plans*, A, B, *qui se coupent, est perpendiculaire à leur intersection.*

En effet, si par un point de l'intersection commune des deux plans A, B, on mène une perpendiculaire au plan C, elle se trouvera tout entière dans chacun des deux premiers (n° 424, *récipr.*, 2°), et se confondra par conséquent avec leur intersection.

Réciproquement : — 1° Si un plan C est perpendiculaire à l'intersection de deux autres plans A, B, il est perpendiculaire à ces derniers (n° 424).

SCOLIE. — *Lorsque trois droites passant par un même point, sont, deux à deux, perpendiculaires entre elles, chacune d'elles est perpendiculaire au plan des deux autres* (n° 412) *; et les trois plans sont perpendiculaires entre eux* (n° 424) *;*

Et réciproquement : — *Si trois plans sont perpendiculaires entre eux, leurs intersections sont aussi perpendiculaires entre elles.*

N.B. — Voyez, *Note* A, l'article du *niveau* et du *fil-à-plomb.*

CHAPITRE II.

DU PARALLÉLISME DANS L'ESPACE.

§ Ier. — *Conditions du Parallélisme des Droites et des Plans.*

N° 426. THÉORÈME I. Fig. 347.

Par un point O *pris hors d'un plan donné* MN, — 1° *On peut toujours mener un plan parallèle ;* — et — 2° *On n'en peut mener qu'un.* Fig. 347.

En effet : — 1° Par le point O l'on peut toujours à la fois, abaisser sur le plan MN une perpendiculaire OL (n° 418, 1°), et élever sur la droite OL, un plan perpendiculaire PQ (n° 414, 1°). Or les plans MN et PQ sont alors parallèles (n° 415, *coroll.*).

2° Supposons que par le point O, on puisse mener, au plan MN, les deux plans parallèles, PQ, RS; et soit XOY leur intersection. Suivant la droite OL, imaginons un plan quelconque [pourvu qu'il n'ait de commun avec la droite XY que le seul point O] : ce plan couperait les plans MN, PQ, RS, respectivement suivant les droites ALB, COD, EOF, dont les deux dernières, COD, EOF, seraient à la fois parallèles à ALB (n° 394) ; — *Ce qui est absurde* (n° 392).

COROLLAIRE. — *Deux plans respectivement parallèles à un troisième, sont parallèles entre eux.*

N° 427. THÉORÈME II. Fig. 313.

Fig. 313. *Lorsqu'une droite* AB *est parallèle à un plan* MN, *tout autre plan* AD *mené suivant la droite, et non parallèle au premier, coupe celui-ci suivant une seconde droite* CD *parallèle à la première.*

En effet, les droites AB et CD sont dans un même plan; et de plus, elles ne peuvent se rencontrer, puisque la droite AB est parallèle au plan MN qui contient la droite CD tout entière : *donc, etc.* (n° 71).

SCOLIE. — On peut encore énoncer ce théorème de la manière suivante :

Lorsque deux plans, AD, MN, *se coupent, toute droite* AB *menée dans l'un des deux parallèlement à l'autre, est parallèle à l'intersection commune* CD.

Ce théorème est *réciproque* de la proposition du *numéro* 393.

Fig. 348. COROLLAIRE. — *Les intersections des plans quelconques menés par deux droites parallèles*, AB, CD (fig. 348), *sont toutes parallèles à ces droites.*

Soit EF l'intersection de deux pareils plans : AB étant parallèle à la droite CD, sera parallèle au plan CF (n° 393), et par suite à la droite EF (n° 427).

On prouverait de même que CD est parallèle à EF.

N° 428. THÉORÈME III. Fig. 349.

Fig. 349. *Lorsque deux plans*, MN, PQ, *sont parallèles, toute droite* AB *parallèle à l'un d'eux*, PQ, *et passant par un point* A *pris sur l'autre* MN, *est contenue tout entière dans ce dernier.*

En effet, supposons que la droite AB ne soit pas contenue dans le plan MN. Par cette droite et par un point quelconque C pris sur le plan PQ, menons un troisième plan : il coupera le plan MN suivant une droite AB', et le plan PQ sui-

vant une droite CD parallèle à la première AB′ (n° 394) ; mais déjà CD est parallèle à AB (n° 427) ; donc les droites AB et AB′ seraient à la fois parallèles à CD ; — *Ce qui est absurde* (n° 392).

Scolie 1er. — Le plan MN est le *lieu* des droites parallèles au plan PQ, menées par le point A.

Scol. 2. — Ce théorème forme la *réciproque* de la proposition du *numéro* 393. Il y a une autre *réciproque* qui est *fausse* et que voici : Si la droite AB est parallèle au plan PQ, et que AB soit dans le plan MN, MN est parallèle à PQ. On voit que cette réciproque est contradictoire avec le principe établi au *numéro* 427.

Corollaire. — Du théorème précédent il est facile de tirer cette conséquence, que

Les plans parallèles ont toutes leurs droites parallèles communes ;

Et que par conséquent,

Lorsque deux plans sont parallèles, toute droite qui perce l'un des deux perce aussi l'autre.

N° 429. Théorème IV. Fig. 350.

Lorsque deux droites, AB, CD, *sont parallèles, tout plan* MN *parallèle à l'une d'elles* AB *et passant par un point* C *pris sur l'autre* CD, *contient celle-ci tout entière.* Fig 350

En effet, si la droite CD n'était pas tout entière dans le plan MN, celui-ci couperait le plan des deux parallèles suivant une droite CD′ parallèle à AB (n° 427) ; et par un même point C on pourrait mener deux parallèles à la droite AB ; — *Ce qui est absurde* (n° 392).

Corollaire. — Il est facile de conclure de là, que

Les droites parallèles ont tous leurs plans parallèles communs ;

Et que par conséquent

Lorsque deux droites sont parallèles, tout plan qui coupe l'une des deux coupe aussi l'autre.

N° 430. THÉORÈME V. Fig. 351.

Fig. 351. *Toute droite* AB *parallèle à la fois à deux plans qui se coupent,* MN, PQ, *est parallèle à leur intersection.*

En effet, si par un point M de l'intersection commune on mène une parallèle à la droite AB, elle sera contenue à la fois dans les deux plans (n° 429); donc elle se confondra avec cette intersection : *donc, etc.*

N° 431. THÉORÈME VI. Fig. 352.

Fig. 352. *Lorsque deux droites concourantes,* AB, CD, *sont respectivement parallèles à un plan* MN, *celui-ci est parallèle au plan des deux droites.*

En effet, le plan MN ne saurait rencontrer le plan des deux droites AB, CD, que suivant une troisième droite parallèle à la fois à chacune des deux premières (n° 427); — *Ce qui est impossible* (n° 392).

COROLLAIRE.—*Lorsque deux droites qui se coupent,* AB, CD
Fig. 314. (fig. 314), *sont respectivement parallèles à deux autres droites qui se coupent,* A'B', C'D', *le plan des deux premières est parallèle à celui des deux dernières.*

En effet, les droites AB, CD, par exemple, étant parallèles au plan des deux autres droites A'B', C'D' (n° 393), ce plan est, d'après le théorème précédent, parallèle à celui des droites AB, CD. — (*Voyez* le n° 394, et, ci-après, le n° 439, *scol.* 1er.)

§ II. — *Propriétés des Droites et des Plans Parallèles.*

N° 432. Théorème VII. Fig. 353.

Deux plans parallèles, MN, PQ, *ont leurs droites perpendiculaires communes.* Fig. 353.

Soit la droite AC perpendiculaire en A au plan MN : elle sera aussi perpendiculaire au plan PQ. En effet, d'abord elle rencontrera PQ (n° 428, *coroll.*) : soit C le point de rencontre. Par la droite AC menons un plan *quelconque;* soient AB et CD ses intersections respectives avec les plans parallèles : les droites AB et CD seront aussi parallèles (n° 394). Or AB est perpendiculaire à AC ; donc CD est aussi perpendiculaire à AC (n° 140). Mais le plan ABCD étant quelconque, la droite CD est aussi quelconque ; donc AC est perpendiculaire à une droite quelconque menée par son pied dans le plan PQ : donc AC est perpendiculaire au plan PQ (n° 411).

Corollaire. — *Deux plans parallèles ont leurs plans perpendiculaires communs* (voyez le n° 424).

N° 433. Théorème VIII. Fig. 354.

Deux droites parallèles, AB, CD, *ont leurs plans perpendiculaires communs.* Fig. 354.

Soit le plan MN perpendiculaire à la droite AB au point B ; je dis que CD est perpendiculaire au plan MN.

D'abord le plan MN rencontrera la droite CD (n° 429, *coroll.*) : soit D le point où la droite CD perce le plan MN. Cela posé, si CD n'est pas perpendiculaire à MN, élevons par le point D, sur ce plan, la perpendiculaire DC′ : les droites BA et DC′ seront parallèles (n° 423) ; d'où il résulterait que par le point D on pourrait mener deux parallèles à la droite AB ; — *Ce qui est absurde* (n° 392).

Fig. 355. Corollaire 1er. — *Deux droites*, AB, CD (fig. 355), *respectivement parallèles à une troisième* EF [dans l'espace], *sont parallèles entre elles.*

En effet, si l'on menait un plan MN perpendiculaire à EF, il serait perpendiculaire à AB et à CD : donc AB et CD sont parallèles (n° 423).

N. B. — Le raisonnement du *numéro* 136 (*coroll.* 1er) ne suffirait pas pour démontrer le corollaire précédent, par la raison que les droites AB, CD, pourraient ne pas se rencontrer, sans cependant être parallèles (n° 396 ; *ou* 418, *scol.*).

Coroll. 2.—*Les intersections de deux plans parallèles entre eux, par deux autres plans parallèles entre eux, sont toutes, deux à deux, parallèles entre elles* (voyez le n° 394).

Coroll. 3. — *Deux plans respectivement perpendiculaires à un troisième, et passant par deux droites parallèles entre elles et non perpendiculaires à ce dernier, sont parallèles entre eux :*

En effet, ces deux plans ne pourraient se rencontrer que suivant une droite qui devrait être à la fois perpendiculaire au plan donné (n° 425), et parallèle aux droites données (n° 427, *coroll.*) : d'où il résulterait que celles-ci seraient perpendiculaires au plan donné ; — *Ce qui est contraire à l'hypothèse.*

Scolie 1er.— *Lorsque deux plans sont respectivement perpendiculaires à un troisième, ou ils sont parallèles, ou ils se coupent suivant une perpendiculaire à ce troisième plan* (n° 425).

Scol. 2. — Le théorème précédent est réciproque de celui du *numéro* 423.

N° 434. Théorème IX (*). Fig. 313.

Fig. 313. *Deux droites concourantes*, AB, AC, *sont perpendiculaires entre elles, lorsque l'une*, AC, *est perpendiculaire, et l'autre*, AB, *parallèle à un même plan* MN.

(*) Quoique ce théorème ainsi que le suivant (nos 434 *et* 435), ne soient pas écrits en petit caractère, on pourra, sans beaucoup d'inconvénient, les considérer comme tels.

En effet, le plan des deux droites coupe le plan MN suivant une droite CD parallèle à AB (n° 427) et perpendiculaire à AC (n° 411) : donc (n° 140) les droites AB et AC sont perpendiculaires entre elles. Fig. 313.

Réciproquement : — *Lorsque deux droites concourantes* AB, AC, *sont perpendiculaires entre elles, tout plan* MN *perpendiculaire à l'une*, AC, *est parallèle à l'autre* AB.

En effet, le plan des deux droites coupera le plan MN suivant une droite CD perpendiculaire à AC (n° 411); donc (n° 71) AB et CD seront parallèles : *donc, etc.*

Scolie 1[er]. — Il y a une seconde réciproque que voici : si les deux droites AB et AC sont perpendiculaires entre elles, et que le plan MN soit parallèle à AB, il sera perpendiculaire à AC; mais cette *réciproque* est évidemment *fausse* : car le plan des deux droites peut prendre toutes les positions possibles autour de AB sans que les deux hypothèses cessent d'avoir lieu; et si, dans ce mouvement, AC restait continuellement perpendiculaire au plan MN, il en résulterait que du point A on pourrait abaisser une infinité de perpendiculaires sur ce plan; — *Ce qui est absurde* (n° 418, 2°).

Scol. 2. — Toutes les perpendiculaires au plan MN, menées par les divers points de AB, sont perpendiculaires à la droite AB. — Mais la *réciproque* est *fausse*.

N° 435. THÉORÈME X. Fig. 356.

Deux plans, MN, PQ, *sont perpendiculaires entre eux, lorsque l'un*, MN, *est perpendiculaire, et l'autre*, PQ, *parallèle à une même droite* AB. Fig. 356.

D'abord, le plan MN rencontrera le plan PQ, sans quoi il lui serait parallèle et contiendrait la droite AB (n° 428) : soit donc NO l'intersection des deux plans. Du point C où la droite AB perce le plan MN, abaissons la perpendiculaire CD sur NO, et menons le plan ABD qui rencontrera le plan PQ suivant une droite EF : cette droite EF étant parallèle à AB (n° 427),

sera aussi perpendiculaire à CD (n° 440). Ainsi, CD étant perpendiculaire au plan PQ, les deux plans MN, PQ, seront perpendiculaires entre eux (n° 424).

Réciproquement : — *Lorsque deux plans*, MN, PQ, *sont perpendiculaires entre eux, toute droite* AB *perpendiculaire à l'un* MN *est parallèle à l'autre* [à moins d'être tout entière dans ce dernier].

Cette réciproque résulte du *numéro* 424 (*récipr.*, 2°).

Scolie. — Il y a une autre réciproque qui est la suivante : si les plans MN, PQ, sont perpendiculaires entre eux, et que la droite AB soit parallèle au plan PQ, elle sera perpendiculaire au plan MN. Cette *réciproque* est évidemment *fausse* : car la droite AB peut prendre une infinité de positions différentes autour du point C, dans un plan parallèle à PQ, sans que les deux hypothèses cessent d'avoir lieu ; et si dans ce mouvement, la droite AB restait continuellement perpendiculaire au plan MN, il en résulterait que par un même point C, on pourrait élever une infinité de perpendiculaires à ce plan ; — *Ce qui est absurde* (n° 417, 2°).

N° 436. Théorème XI. Fig. 357.

Fig. 357. *Les portions de deux droites parallèles*, AB, CD, *comprises entre un plan* PQ *et une droite* MN *parallèles, sont égales.*

En effet, le plan des deux parallèles coupe le plan PQ suivant une droite BD parallèle à AC (n° 427) ; donc le quadrilatère ABCD est un parallélogramme (n° 194) : *donc, etc.* (n° 196).

Corollaire. — La droite la plus courte que l'on puisse mener entre une droite et un plan parallèles, est leur perpendiculaire commune (n°s 419 *et* 434) : cette perpendiculaire mesure donc la distance de la droite au plan ; or, le théorème ayant encore lieu dans le cas où les parallèles sont perpendiculaires au plan et à la droite, il s'ensuit que les perpendiculaires communes

à une droite et à un plan parallèles, sont toutes égales entre elles ; d'où il résulte que

Un plan et une droite parallèles sont partout également distans.

Réciproquement : — *Si un plan et une droite sont partout également distans, ils sont parallèles ;*

Et comme deux points déterminent une droite,

Une droite est parallèle à un plan lorsqu'elle a deux de ses points également distans du plan.

Mais si l'on supposait que c'est le plan qui a *deux* ou même *trois* de ses points également distans de la droite, la droite et le plan pourraient n'être pas parallèles, parce que *généralement*, les distances dont il est question ne sont pas parallèles entre elles.

N° 437. Théorème XII. Fig. 358.

Les portions de deux droites parallèles, AB, CD, *comprises entre deux plans parallèles*, MN, PQ, *sont égales.* Fig. 358.

En effet, le plan des deux parallèles coupe les deux plans MN, PQ, suivant deux autres droites, AC, BD, aussi parallèles entre elles (n° 394) ; donc ACBD est un parallélogramme (n° 194) : *donc, etc.* (n° 196).

Corollaire. — La droite la plus courte que l'on puisse mener entre deux plans parallèles, est leur perpendiculaire commune (n°s 419 *et* 432) : cette perpendiculaire mesure donc la distance des deux plans ; or, le théorème ayant encore lieu dans le cas où les droites sont perpendiculaires aux plans, il s'ensuit que les perpendiculaires communes à deux plans parallèles sont toutes égales entre elles ; d'où il résulte que

Deux plans parallèles sont partout également distans.

Réciproquement : — *Si deux plans sont partout également distans, ils sont parallèles ;*

Et comme trois points [non situés en ligne droite] déterminent un plan, il s'ensuit que

Deux plans sont parallèles lorsque trois points de l'un, non situés en ligne droite, *sont également distans* [et d'un même côté] *de l'autre.*

Scolie. — Tous les points qui sont également distans et du même côté d'un plan, se trouvent sur un même plan parallèle au premier (*voyez* le n° 141, *scol.*).

§ III. — *Conséquences des propriétés précédentes.* — *Plus courte Distance de deux Droites.*

N° 438. Théorème XIII. Fig. 359.

Fig. 359. *Les portions de deux droites quelconques,* AB, CD, *interceptées entre trois plans parallèles,* MN, PQ, RS, *sont en proportion.*

Lorsque les droites AB, CD, sont dans un même plan, la proposition est évidente, soit d'après les *numéros* 394 *et* 259 si elles se coupent, soit d'après les *numéros* 394 *et* 437 si elles sont parallèles.

Supposons donc que les droites AB, CD, ne soient pas dans un même plan; et, dans cette hypothèse, soient A, B, E, les points où la première droite perce les plans extrêmes MN, PQ, et le plan intermédiaire RS; puis C, D, F, les points où la seconde droite perce les mêmes plans. Menons la droite AD, et soit O le point d'intersection de cette dernière avec le plan RS; nous aurons (nos 394 *et* 260) :

AE : EB :: AO : OD :: CF : FD,

ou simplement AE : EB :: CF : FD; *C. Q. F. D.*

Scolie. — La *réciproque* est *fausse* : c'est-à-dire que trois plans qui couperaient les deux droites en parties proportionnelles, ne seraient pas pour cela parallèles : parce que la position des *six* points A, E, B, C, F, D, ne suffit pas pour déterminer celle des *trois* plans MN, RS, PQ; et que d'ailleurs, on peut faire tourner les plans MN, PQ, autour de AC, BD.

Mais on peut affirmer que si la proportion a lieu, il existe toujours *un* système de trois plans parallèles qui passent par ces six points. En effet, le point O de la droite AD est déterminé par la première des proportions ci-dessus; et à son tour, conjointement avec les points E, F, il détermine le plan RS, et par suite les plans parallèles MN, PQ. Fig. 359.

N° 439. Théorème XIV. Fig. 360.

Lorsque deux angles, BAC, B'A'C' [non situés dans le même plan], *ont les côtés parallèles chacun à chacun, ils sont égaux ou supplémentaires.* Fig. 360.

Il peut se présenter plusieurs cas, les mêmes que si les angles étaient dans le même plan (n° 144).

En supposant d'abord les côtés AB et A'B', AC et A'C', dirigés chacun à chacun *dans le même sens*, prenons AB=A'B', AC=AC', et menons AA', BB', CC' : les deux quadrilatères AB', AC', seront des parallélogrammes (n° 198); donc les droites BB' et CC' sont égales et parallèles entre elles, comme étant respectivement égales et parallèles à AA' (n° 433, *coroll.* 1er). Maintenant, menons BC et B'C' : le quadrilatère BC' sera aussi un parallélogramme; donc les droites BC et B'C' sont égales et parallèles. Donc les deux triangles BAC et B'A'C' sont égaux (n° 169) : donc les angles BAC et B'A'C' sont aussi égaux.

Pour les autres cas, la démonstration s'achève comme dans le *numéro* 144.

Scolie 1er. — Il résulte en outre du *numéro* 431 (*coroll.*), que les plans BAC, B'A'C', sont parallèles. — Et l'on voit d'ailleurs par le raisonnement précédent, que la droite BC tracée arbitrairement dans le premier plan, ne peut rencontrer le second; *et vice versâ : — donc, etc.*

Scol. 2. — *Si trois droites sont égales et parallèles, les droites qui joignent leurs extrémités* correspondantes *forment des triangles égaux et parallèles :* [c'est-à-dire dont les côtés sont, chacun à chacun, égaux et parallèles.]

Plus généralement : — *Si, des sommets d'un polygone, on mène* [dans l'espace] *des droites égales et parallèles* [et dirigées dans le même sens], *leurs extrémités opposées seront les sommets d'un polygone égal et parallèle au premier.*

La proposition est également vraie, soit lorsque toute la figure est contenue dans un même plan, soit lorsque le polygone est gauche (n° 14), *etc.*, *etc.*

N° 440. **Théorème XV.** Fig. 361.

Fig. 361. *Deux droites quelconques*, AB, EF, *sont toujours situées, ou dans un même plan, ou dans des plans parallèles.*

En effet, si les deux droites AB, EF, ne sont pas dans un même plan, par un point A pris sur la première, menons AC parallèle à EF, et par un point E pris sur la seconde, menons EG parallèle à AB : les deux angles BAC et GEF seront situés dans des plans parallèles (n° 431, *coroll.; ou* 439, *scol.* 1er) ;

C. Q. F. D.

Scolie 1er. — Ce système de deux plans parallèles, contenant respectivement chacune des deux droites AB, EF, non situées dans un même plan, est *unique*.

Car tout plan passant par la droite AB par exemple, et faisant partie d'un pareil système de plans parallèles, doit contenir toutes les droites parallèles à EF qui rencontrent AB ; et par conséquent ce plan ne saurait différer du plan ABC. — Même raisonnement pour le second plan.

Pour désigner les plans ABC, EFG, nous les nommerons *les plans parallèles des deux droites* AB, EF.

Deux droites non situées dans un même plan ne peuvent évidemment offrir de distance plus courte que celle de leurs plans parallèles.

Scol. 2. — Lorsque deux droites ne sont pas dans un même plan, on peut toujours, par chacune d'elles, faire passer un plan parallèle à l'autre (n° 426) ; et ce plan est *unique*.

N° 441. Théorème XVI.

Lorsque deux droites ne sont pas situées dans un même plan, leurs plans perpendiculaires respectifs se coupent toujours.

D'abord, ces plans ne sauraient se confondre, sans quoi les droites proposées seraient parallèles (n° 423), ce qui est contraire à l'hypothèse. Ensuite, ces plans ne peuvent être parallèles, car alors leurs droites perpendiculaires seraient communes (n° 432) : et les droites proposées seraient encore parallèles.

Corollaire. — Chacun des plans perpendiculaires dont il s'agit, étant perpendiculaire en même temps aux plans parallèles des deux droites (n°s 424 ; *et* 432, *coroll.*), il s'ensuit que l'intersection des deux premiers plans est aussi perpendiculaire au système des deux derniers (n° 424).

Et comme toute perpendiculaire à une droite est située dans un plan perpendiculaire à cette droite, il s'ensuit que

Toute perpendiculaire commune à deux droites non situées dans un même plan [s'il existe de pareilles perpendiculaires, comme nous allons le démontrer] *est en même temps perpendiculaire à leurs plans parallèles.*

Scolie. — Le théorème précédent, ainsi que sa démonstration, seraient également applicables à deux droites concourantes substituées à celles de l'énoncé.

N° 442. Théorème XVII. Fig. 362. Fig. 362.

Entre deux droites, AB, EF, *non situées dans un même plan* : — 1° *On peut toujours mener une perpendiculaire commune*; — 2° *On n'en peut mener qu'une*; — et — 3° *Elle mesure la plus courte distance des deux droites.*

Supposons en effet que suivant AB et suivant EF, on mène respectivement deux plans ANB, EMF, perpendiculaires aux plans parallèles, RS, TU, des deux droites : ces deux plans

Fig. 362. perpendiculaires ne pourront, d'après les hypothèses, ni se confondre, ni être parallèles (n° 433, *coroll.* 2); ils se couperont donc suivant *une* droite MN qui sera à la fois perpendiculaire aux deux plans parallèles (n° 424), ainsi qu'aux deux droites elles-mêmes (n° 411), ce qui démontre les deux premières parties de l'énoncé; et quant à la troisième, elle se trouve démontrée par le *scolie* 1[er] du *numéro* 440.

Scol. 3.—*L'angle de deux droites non situées dans un même plan* se mesure par celui de deux autres droites qui leur seraient respectivement parallèles, menées par un même point quelconque de l'espace; ou bien, ce qui est la même chose, par l'angle que fait l'une des deux droites avec une parallèle à l'autre, menée par un point de la première. — Ainsi, par exemple, MK (fig. 362) étant l'intersection du plan EMF avec le plan RS, l'angle AMK, ou BMK, mesurera l'angle des deux droites AB, EF. — Quand cet angle est droit, les *droites* sont dites *perpendiculaires entre elles*.

On voit donc que, dans l'espace, deux droites peuvent être perpendiculaires entre elles ou faire un angle quelconque, sans cependant se couper (*voyez* les n[os] 396; *et* 418, *scol.*).

On voit encore, par la même raison, que deux parallèles font un angle nul [ce qui confirme la remarque du *numéro* 142], et qu'une droite perpendiculaire à un plan est perpendiculaire à toutes les droites contenues dans ce plan ou parallèles à ce plan; *etc.*

N° 443. Terminons cette théorie par les énoncés de quelques théorèmes dont on trouvera facilement les démonstrations en leur appliquant les principes établis dans les deux chapitres qui précèdent, et par l'indication de quelques *propositions fausses*, que les élèves, trompés par une analogie apparente, sont souvent portés à admettre un peu trop légèrement.

THÉORÈMES A DÉMONTRER.

Théorème 1. — *Deux droites parallèles sont également inclinées sur un plan quelconque.*

THÉOR. II. — *Deux plans parallèles sont également inclinés sur une droite quelconque.*

THÉOR. III. — *Lorsque deux plans parallèles sont coupés par un troisième, les angles dièdres alternes-internes sont égaux*, etc., etc. (voyez le n° 140).

THÉOR. IV. — *Lorsqu'une droite et un plan se rencontrent, toute droite perpendiculaire au plan et tout plan perpendiculaire à la droite, se rencontrent aussi.*

PROPOSITIONS FAUSSES.

I. Il est faux que si deux plans se coupent, leurs droites perpendiculaires respectives se coupent aussi.

II. Il est faux que si deux droites se coupent, leurs plans perpendiculaires respectifs se coupent aussi.

III. Il est faux que si deux droites se coupent, leurs droites perpendiculaires respectives se coupent aussi.

IV. Il est faux que si une droite et un plan se rencontrent, toute droite perpendiculaire à la droite et tout plan perpendiculaire au plan se rencontrent aussi.

V. Il est faux que deux droites également inclinées sur un même plan, soient parallèles.

VI. Il est faux que deux plans également inclinés sur une même droite, soient parallèles.

VII. Il est faux que deux plans qui font avec un troisième, des angles dièdres égaux, soient parallèles.

VIII. Il est faux que deux droites également inclinées sur une même droite, soient parallèles.

IX. Il est faux que deux droites respectivement parallèles à un même plan, soient parallèles entre elles.

X. Il est faux que deux plans respectivement parallèles à une même droite, soient parallèles entre eux.

CHAPITRE III.

DES ANGLES DIÈDRES, TRIÈDRES, ET POLYÈDRES.

---

§ Ier. — *Des Angles Dièdres.*

N° 444. Nous avons donné dans le *numéro* 398 la définition des angles dièdres ; et nous avons démontré dans le *chapitre premier* de ce Livre (n° 424), plusieurs propositions relatives au cas particulier où les quatre angles dièdres formés par deux plans qui se coupent, étant égaux, sont dits des *angles dièdres droits* ou *rectangles*, et où les plans eux-mêmes sont dits *perpendiculaires* entre eux.

Considérons maintenant le cas général, où les deux plans se coupent en faisant des angles dièdres quelconques
Fig.318. (fig. 318).

Les *deux angles dièdres* AOPG, BOPK, *dont chacun est compris entre les prolongemens des faces de l'autre*, sont dits des *angles dièdres opposés ;* il en est de même des angles dièdres AOPK, BOPG. — (*Voyez* le n° 70.)

Et au contraire, *deux angles dièdres consécutifs qui ont une face commune et dont les autres faces sont* mutuellement *les prolongemens l'une de l'autre,* sont dits des *angles dièdres adjacens :* tels sont les angles dièdres AOPG et COPF, COPF et BOPK, BOPK et DOPE, DOPE et AOPG, pris ainsi deux à deux. — (*Voyez* le *même* n° 70.)

Fig.363. N° 445 Cela posé par un point I (fig. 363) pris sur l'arête OP, supposons qu'on élève une perpendiculaire IG dans le plan OC, et une perpendiculaire IK dans le plan OD; il en résultera un angle plan GIK : nous le nommerons *l'angle plan correspondant à l'angle dièdre* OP ; et nous appellerons ainsi,

en général, l'*angle formé par deux perpendiculaires à l'arête, menées respectivement dans chacune des deux faces, par un de ses points.* Fig. 363.

Réciproquement, l'angle dièdre correspondant à un angle plan IGK, s'obtiendra en élevant, par le sommet de ce dernier, une perpendiculaire OP sur son plan, puis menant un plan par chacun des deux côtés IG, IK, et par la perpendiculaire OP.

Or il est important d'observer, que, d'après le *numéro* 439,

L'angle plan correspondant à un angle dièdre, a la même grandeur pour tous les points de l'arête.

Cette proposition n'est d'ailleurs qu'un cas particulier de cette autre plus générale, qui se déduit du même théorème et de la proposition du *numéro* 394, savoir : que

Les angles plans résultant de l'intersection d'un angle dièdre par deux plans parallèles, sont égaux.

Il est d'ailleurs évident, que

Les angles dièdres droits sont ceux qui *correspondent aux angles plans droits.*—(Voyez le n° 423, *coroll*. 1er, 2e, *et* 3e.)

N° 446. De ce qui précède il est aisé de tirer les conséquences générales suivantes :

D'abord — *A des angles plans égaux entre eux*, GIK, G'I'K' (fig. 363), *correspondent des angles dièdres égaux entre eux.*

En effet, faisons coïncider les angles GIK, G'I'K' : les droites OP, O'P', coïncideront (n° 417, 2°) ; donc les plans OC et O'C' coïncideront (n° 12), ainsi que les plans OD et O'D' : *donc, etc.*

Il résulte de là, qu'à un angle plan *double*, *triple*, *quadruple*..... correspond un angle dièdre *double*, *triple*, *quadruple*.....; — et plus généralement :

A un plus grand angle plan correspond un angle dièdre plus grand.

D'ailleurs, les *réciproques* de ces propositions sont évidentes d'après le *numéro* 51.

Nous allons maintenant généraliser.

N° 447. Théorème I. Fig. 364.

Fig. 364. *Les angles dièdres*, AOPD, AOPD′, *sont proportionnels aux angles plans correspondans*, AOB, AOB′.

Supposons que les angles dièdres proposés soient placés de manière à avoir la même arète OP et une face commune AOPC, et que de plus, les pieds des perpendiculaires élevées sur l'arète dans les diverses faces, pour former les côtés des angles plans respectivement correspondans, se confondent en un même point O de cette arète.

On voit d'abord que ces perpendiculaires OA, OB, OB′, seront dans un même plan (n° 413, *coroll.*) : ce qui rend comparables les angles AOB, AOB′ (n°s 63, *scol.* 2 ; 121 ; *etc.*), aussi bien que les angles dièdres AOPD, AOPD′.

Cela posé, si l'on effectue les deux séries d'opérations nécessaires pour trouver, d'une part, la plus grande mesure commune aux deux angles plans, et d'autre part la plus grande mesure commune aux deux angles dièdres correspondans, il est évident — 1° que les quotiens successifs obtenus de part et d'autre seront constamment égaux deux à deux et dans le même ordre ; — et 2° que l'une des divisions successives ne peut donner de reste, sans que sa correspondante donne aussi un reste. — Donc les deux conditions nécessaires à la proportionnalité des angles et des arcs, étant remplies (*voyez* les n°s 66 *et* 121), on a

AOPD : AOPD′ :: AOB : AOB′.

Scolie 1er. — On voit par ce théorème, que les angles dièdres sont dans l'espace, ce que sont sur un plan les angles formés par deux droites.

Aussi — *Les angles dièdres jouissent*-ils, *en général*, *des mêmes propriétés que les angles plans qui leur correspondent.*

Ainsi, — De même que les angles opposés, formés par deux droites qui se coupent, sont égaux deux à deux (n° 114),

De même — *Les angles dièdres opposés, formés par deux plans qui se coupent*, *sont* aussi *égaux deux à deux ;*

De même qu'un angle ne peut être contenu dans un plan, qu'un nombre de fois limité (n° 133),

De même — *Un angle dièdre ne peut être contenu dans l'espace, qu'un nombre de fois limité.*

[On pourrait même, en s'appuyant sur ce qu'on a vu dans le *numéro* 394, démontrer la seconde partie du théorème du *numéro* 426, par un raisonnement analogue à celui du *numéro* 136.]

Scol. 2. — On nomme *plan bissecteur* d'un angle dièdre, le plan qui, passant par son arête, partage l'angle plan correspondant, et par suite l'angle dièdre lui-même, chacun en deux parties égales ou superposables (*voyez* le n° 70).

N° 448. Remarque. — D'après le théorème précédent, si l'on prend pour *unité des angles dièdres*, celui qui *correspond à l'unité des angles plans*, on pourra établir que

Tout angle dièdre AOPD (fig. 364) *a la même mesure que l'angle plan correspondant* AOB, — [ou bien que *l'arc correspondant* à ce dernier (*voyez* le n° 122)]. Fig. 364.

Car, si dans la proportion du *numéro* précédent (n° 447), on suppose que l'angle dièdre AOPD′, et l'angle plan correspondant AOB′, sont respectivement, l'unité des angles dièdres, et l'unité des angles plans, l'énoncé de la proportion se réduira simplement à l'*égalité numérique :*

$$AOPD = AOB,$$

[ou même AOPD = AB, en nommant AB l'arc correspondant à l'angle plan AOB (*voyez* le n° 122)].

Maintenant, de même que l'on a pris l'*angle plan droit* pour *unité des angles* (n° 109) [et le *quadrant* pour *unité des arcs* (n° 122)], de même, on prend l'*angle dièdre droit* pour *unité des angles dièdres*; — et alors, la *mesure* ou la *valeur numérique* d'un angle dièdre, n'est autre chose que son rapport à l'angle dièdre *rectangle*, rapport qui est le même que celui de l'angle plan correspondant, à l'angle *droit*, — [ou enfin, que le rapport de l'arc correspondant, au *quadrant*].

Lorsque l'angle dièdre de deux plans n'est pas droit, les *plans* sont dits *obliques* l'un à l'autre : l'*angle dièdre* est alors *obliquangle ;* et il est dit *aigu* ou *obtus* dans les mêmes circonstances que l'angle plan qui lui correspond.

Les dénominations d'*angles dièdres complémentaires*, ou *supplémentaires*, s'appliquent également aux angles dièdres, en même temps qu'aux angles plans [ou aux arcs correspondans].

[Nous reviendrons plus loin sur ce sujet, pour faire voir encore que l'angle correspondant est le seul qui puisse servir de mesure à l'angle dièdre].

N° 449. THÉORÈME II. Fig. 365.

Fig. 365. *Si d'un point* O *pris dans l'intérieur d'un angle dièdre* MPNQ, *on abaisse des perpendiculaires*, OA, OB, *sur ses faces*, *l'angle* AOB *de ces perpendiculaires sera le supplément de l'angle dièdre.*

En effet, le plan AOB est perpendiculaire à chacun des plans MN, PQ (n° 424), et par suite à leur intersection PN (n° 425) qu'il coupe en un point C ; donc ACB est l'angle correspondant à l'angle dièdre (n° 445). Or celui-ci est le supplément de AOB (n° 193, *coroll.*) : — *donc, etc.*

Scolie. — Au lieu d'abaisser les perpendiculaires d'un point pris dans l'intérieur de l'angle dièdre, on pourrait les élever par un point de l'arête. Alors, en les supposant indéfinies dans les deux sens, on obtiendrait quatre angles, dont deux égaux à celui qui correspond à l'angle dièdre, et chacun des deux autres supplémentaires des deux premiers.

N° 450. THÉORÈME III. Fig. 366.

Fig. 366. 1° *Tout point* E *pris sur le plan bissecteur* OE *d'un angle dièdre* BOAC, *est également distant des deux faces de cet angle dièdre ;*

2° *Tout point situé dans l'intérieur de l'angle dièdre et hors du plan bissecteur, est inégalement distant des mêmes faces.*

1° Soient EG, EI, les perpendiculaires abaissées respectivement du point E sur les faces AB, AC, de l'angle dièdre proposé : le plan GEI sera perpendiculaire à chacune de ces deux faces (n° 424), et par suite à l'arète OA (n° 425). De plus, les angles GAE, EAI, GAI, correspondront respectivement aux angles dièdres partiels BOAE, DOAI, et à l'angle dièdre total BOAI (n° 445); et l'intersection AE du plan perpendiculaire GEI avec le plan bissecteur OE, sera la bissectrice de l'angle GAI (n° 446). Les droites EG, EI, seront donc égales entre elles (n° 115). Fig. 366.

2° Pour la démonstration de la seconde partie du théorème, nous nous contenterons de renvoyer au *numéro* 115.

Scolie 1er — Le plan bissecteur d'un *angle dièdre* est le lieu des points qui sont également distans des deux faces de cet angle dièdre. — C'est un *plan de symétrie* (voyez le n° 416, *coroll.* 1er).

Scol. 2. — En nommant *plan bissecteur* d'un angle plan, le plan élevé perpendiculairement suivant la bissectrice de celui-ci, dont il est aussi un *plan de symétrie*, on aura, pour l'angle plan, un autre théorème analogue au précédent, et d'où il résulte que le plan bissecteur d'un angle plan, est le *lieu* des points également distans de ses côtés.

§ II. — *Des Angles Trièdres en général.*

N° 451. Soient les *huit* angles trièdres SABC, SA'BC, SAB'C, SA'B'C, SA'B'C', SAB'C', SA'BC', SABC' (fig. 367), formés par *trois* plans qui se coupent au point S. [On peut, pour plus de facilité, se représenter les deux droites AA', BB', comme étant dans le plan de la figure, puis l'arète SC avec les quatre premiers angles trièdres, comme étant *en avant* de ce plan, et l'arète SC' avec les quatre autres angles trièdres, comme étant *derrière*.] Examinons les relations qui lient chacun de ces angles trièdres, SABC par exemple, avec les autres. Fig. 367.

D'abord, SABC et SA'BC ont une face commune BSC, et un angle dièdre égal, opposé, dans chacun d'eux, à cette face

Fig.367. commune. De plus, les faces ASB et ASC du premier, sont respectivement supplémentaires (nº 111) des faces A'SB et A'SC du second ; et il en est de même des angles dièdres SB et SC du premier, qui sont respectivement supplémentaires des angles dièdres SB et SC du second. A cause de ces propriétés, nous dirons que l'*angle tièdre* SA'BC est *conjugué de l'angle trièdre* SABC *par la face* BSC, et *réciproquement*. De même, les angles trièdres SABC, SAB'C, sont conjugués par la face ASC, et les angles trièdres SABC, SABC', par la face ASB. [Si plusieurs couples d'angles trièdres conjugués avaient la même face, BSC par exemple, il faudrait dire que les *angles trièdres* SABC et SA'BC sont *conjugués par la face* BSC *et par l'arète* AA', ce qui les déterminerait complètement.]—L'angle trièdre SABC augmenté de son conjugué par la face BSC, forme une somme égale à l'angle dièdre AA' opposé à cette face. Il en est de même pour les autres angles trièdres conjugués de SABC.

Nº 452. Maintenant, les angles trièdres SABC et SA'B'C' *ont les faces égales chacune à chacune* [comme opposées (nº 114)], *mais inversement disposées;* pour cette raison, ces deux *angles trièdres* sont dits *symétriques entre eux,* ou simplement *symétriques*. — On remarquera d'ailleurs : — 1º que trois faces données ne peuvent être disposées pour faire un angle trièdre, que de l'une de ces deux manières (*voyez* le nº 175);—2º que deux angles trièdres peuvent être symétriques indépendamment, de leur position relative dans l'espace ;—3º que la symétrie des angles trièdres diffère de celle des triangles, en ce qu'il suffit de renverser un triangle symétrique d'un autre, pour les faire coïncider (nºs 43 *et* 175)), tandis que deux angles trièdres symétriques ne sauraient [en général] coïncider *en aucune manière ;* —et enfin 4º que les angles dièdres SA', SB', SC', de l'angle trièdre SA'B'C', sont respectivement égaux chacun à chacun, comme opposés, aux angles dièdres SA , SB, SC, de l'angle trièdre SABC symétrique du premier.

Quant aux angles trièdres SAB'C', SA'BC', SA'B'C, dont on Fig. 367.
n'a pas encore parlé, ils sont, chacun à chacun, symétriques des angles trièdres SA'BC, SAB'C, et SABC', ou des conjugués de l'angle trièdre SABC; et par suite, ils sont eux-mêmes les conjugués de l'angle trièdre SA'B'C'. L'un d'eux, par exemple SAB'C', et l'angle trièdre SABC, ont un angle dièdre égal comme opposé par l'arète SA; et les faces de ces deux angles dièdres sont supplémentaires chacune à chacune.

Enfin, il faut observer que dans la même figure, *quatre* angles trièdres qui se trouvent du même côté d'un même plan, forment toujours une somme égale à 2 *angles dièdres droits :* c'est ce qui a lieu, par exemple, pour les quatre angles trièdres SABC, SA'BC, SAB'C, et SA'B'C.

N° 453. Théorème IV. Fig. 368.

Si d'un point quelconque **[*s*]** ***pris dans l'intérieur d'un*** Fig. 368.
angle trièdre **SABC,** ***on abaisse des perpendiculaires sur ses faces*** **[*sa* sur BSC, *sb* sur CSA, *sc* sur ASB],** ***il en résultera un nouvel angle trièdre*** **[*sabc*]** ***dont les faces seront les supplémens respectifs des angles dièdres du premier ; — et réciproquement*** **les faces du premier seront les supplémens respectifs des angles dièdres du second.**

Soient A, B, C, les points d'intersection respectifs des arètes SA, SB, SC, de l'angle trièdre SABC, par les faces *bsc*, *csa*, *asb*, de l'angle trièdre *sabc* : les droites A*b*, A*c*, seront les intersections respectives des faces CSA, ASB, du premier angle trièdre [S], par la face *bsc* du second angle trièdre [*s*]; de même, B*c*, B*a*, seront les intersections respectives des faces ASB, BSC, par la face *csa*; et enfin C*a*, C*b*, seront les intersections des faces BSC, CSA, par la face *asb*.

Cela posé, d'après la démonstration du *numéro* 449, les arètes SA, SB, SC, de l'angle trièdre S, sont respectivement

Fig. 368. perpendiculaires aux faces *bsc*, *csa*, *asb*, de l'angle trièdre *s*; d'où il suit que l'angle trièdre S est par rapport à l'angle trièdre *s*, dans la même situation que celui-ci par rapport au premier.

Or, il résulte encore du théorème (n° 449) déjà cité, que les angles *bAc*, *cBa*, *aCb*, qui correspondent respectivement aux angles dièdres SA, SB, SC, de l'angle trièdre S, sont supplémentaires, chacun à chacun, des angles *bsc*, *csa*, *asb*, qui ne sont autre chose que les faces de l'angle trièdre *s*; et que *réciproquement* les angles BaC, CbA, AcB, qui correspondent aux angles dièdres *sa*, *sb*, *sc*, de l'angle trièdre *s*, sont les supplémens respectifs des faces BSC, CSA, ASB, de l'angle trièdre S; *C. Q. F. D.*

Scolie. — En raison de la propriété qui vient d'être démontrée, les deux Angles Trièdres S et *s* sont dits Supplémentaires.

Chacun des deux angles trièdres peut d'ailleurs être remplacé par son symétrique (*voyez* le n° 452) : car dans la définition précédente, c'est uniquement à la valeur des angles plans ou dièdres qu'il faut avoir égard, et nullement à leur situation relative.

Ainsi, au lieu de prendre le sommet *s* dans l'intérieur de l'angle trièdre S, nous eussions pu le prendre sur une de ses arètes, ou au point S lui-même : mais alors, les trois perpendiculaires, indéfiniment prolongées, déterminant *huit* angles trièdres (n° 451), il eût été difficile de reconnaître parmi eux les deux supplémentaires [symétriques l'un de l'autre] de l'angle trièdre proposé.

N° 454. Théorème V. Fig. 369.

Fig. 369. *Dans tout angle trièdre* S, *une face quelconque est* — 1° *plus petite que la somme des deux autres*, — et — 2° *plus grande que leur différence.* — (Voyez le n° 80.)

1° Il n'y a lieu à démontrer la première partie de ce théo- Fig. 369.
rème, que pour la plus grande des trois faces. Ainsi, supposons que l'on ait séparément

$$\mathrm{ASB} > \mathrm{ASC} \quad \text{et} \quad \mathrm{ASB} > \mathrm{BSC};$$

et démontrons que $\mathrm{ASB} < \mathrm{ASC} + \mathrm{BSC}$.

Pour cela, menons une droite AB d'un point quelconque A de l'arète SA à un point quelconque B de l'arète SB. Puis, par le point S et dans le plan ASB, menons une droite SC' qui fasse un angle BSC' égal à l'angle BSC, et qui coupe AB en un point C'. Prenons sur l'arète SC une longueur SC égale à SC'. Enfin, tirons AC et BC.

D'après cette construction, les triangles BSC et BSC' sont égaux (n° 170); donc $\mathrm{BC} = \mathrm{BC'}$. Or, dans le triangle ABC,

on a $\mathrm{AB} < \mathrm{AC} + \mathrm{CB}$, ou $\mathrm{AC'} + \mathrm{C'B} < \mathrm{AC} + \mathrm{CB}$;

donc $\mathrm{AC'} < \mathrm{AC}$;

et par conséquent (n° 171)

$$\mathrm{ASC'} < \mathrm{ASC}.$$

Ajoutant respectivement de part et d'autre BSC et BSC', on obtient

$$\mathrm{ASC'} + \mathrm{BSC'} < \mathrm{ASC} + \mathrm{BSC}, \quad \text{ou} \quad \mathrm{ASB} < \mathrm{ASC} + \mathrm{BSC}.$$

2° En supposant $\mathrm{ASC} > \mathrm{BSC}$, on aura

$$\mathrm{ASB} > \mathrm{ASC} - \mathrm{BSC}:$$

car c'est une conséquence de ce que

$$\mathrm{ASB} + \mathrm{BSC} > \mathrm{ASC}.$$

COROLLAIRE. — *Si par le sommet* S (fig. 370) *d'un angle trièdre quelconque* SABC, *on mène une droite* SD *dans l'intérieur, et par cette droite deux plans aboutissant aux deux côtés*, SA, SB, *d'une même face* ASB, *la somme des deux angles plans*, ASD, BSD, *qui en résulteront, sera moindre que la somme des deux autres faces*, ASC, BSC. Fig. 370.

Fig. 370. En effet, si l'on prolonge le plan ASD par exemple, jusqu'à la rencontre de la face BSC suivant une droite SE, on aura, en opérant comme au *numéro* 80 (*coroll.*) :

1° dans l'angle trièdre SACE, ... $ASE < ASC + CSE$,

et 2° dans l'angle trièdre SDEB, ... $DSB < DSE + ESB$;

d'où l'on tire [en ajoutant ces deux inégalités membre à membre]

$$ASE + DSB < ASC + DSE + CSE + ESB,$$

ou bien $ASD + DSE + DSB < ASC + DSE + CSB$,

ou enfin, en retranchant DSE des deux membres,

$$ASD + DSB < ASC + CSB;$$

C. Q. F. D.

N° 455. Remarque *sur la mesure de l'angle dièdre.* — Le théorème précédent conduit à une conséquence qui a déjà été annoncée précédemment (n° 448) : c'est que l'angle plan formé par les perpendiculaires à l'arête d'un angle dièdre, élevées par un même point dans chacune de ses faces, ou, en un mot,

L'angle plan correspondant à l'angle dièdre (n° 445), *est le seul qui puisse lui servir de mesure.*

En effet : — il faut d'abord que les côtés de l'angle plan soient également inclinés sur l'arête, puisqu'il doit devenir nul en même temps que l'angle dièdre; ainsi, pour que l'on ait constamment

Fig. 364. AOPD : AOPD' :: AOB : AOB' (fig. 364),

il faut que les angles AOP, BOP, B'OP, soient égaux.

En second lieu, puisque l'on a, entre les angles dièdres, la relation

$$AOPD = AOPD' + B'OPD,$$

il faut aussi qu'entre les angles plans, on ait la relation

$$AOB = AOB' + B'OB ;$$

d'où il suit, d'après le théorème précédent, que les trois droites OA, OB', OB, doivent être dans un même plan.

Enfin, puisque ces droites sont dans un même plan, et qu'elles sont également inclinées sur la droite OP, celle-ci est perpendiculaire au plan des trois premières (n° 422, *scol.*).

N° 456. THÉORÈME VI. Fig. 371.

Dans tout angle trièdre S, *la somme des trois faces est moindre que 4 angles* DROITS. Fig. 371.

Pour le prouver, menons un plan qui coupe les faces suivant AB, AC, BC; puis, d'un point quelconque O pris dans le triangle ABC, menons les droites AO, BO, CO. Nous aurons trois triangles ayant respectivement pour bases les droites AB, AC, BC, et le point S pour sommet commun; puis trois autres triangles ayant respectivement les mêmes bases, et leur sommet en O. Cela posé, l'angle CAB, formé de la somme des angles OAC et OAB, est moindre que la somme des angles SAC et SAB (n° 454); de même ABC $<$ SBA $+$ SBC, et BCA $<$ SCB $+$ SCA; donc la somme des angles à la base des triangles qui ont leur sommet en O, est moindre que la somme des angles à la base des triangles qui ont leur sommet en S. Mais la somme des angles des trois triangles de chaque système est la même (n° 163); donc la somme des angles en S est moindre que la somme des angles en O; et puisque celle-ci vaut 4 *droits*, il s'ensuit que la première est moindre que 4 *droits*; *C. Q. F. D.*

N° 457. THÉORÈME VII.

Dans tout angle trièdre, la somme des angles dièdres est plus grande que 2 DROITS *est plus petite que* 6.

En effet, la somme des *angles dièdres* de l'angle trièdre proposé, augmentée de la somme des faces de son angle trièdre supplémentaire, forme 6 *droits* (n° 453). Or la seconde somme partielle est comprise entre *zéro* et 4 *droits*: donc la première est moindre que 6 *droits* et plus grande que 2; *C. Q. F. D.*

Scolie. — La somme des angles dièdres d'un angle trièdre n'est pas constante comme celle des angles plans d'un triangle:

il s'ensuit qu'un angle trièdre peut avoir *deux* et même *trois* angles dièdres *droits*. C'est d'ailleurs ce qu'il est facile de reconnaître directement, d'après ce que l'on a déjà vu (n° 399).

Cela posé, un angle trièdre est dit *rectangle*, *birectangle*, ou *trirectangle*, suivant qu'il a *un*, *deux*, ou *trois* angles dièdres droits.

N° 458. Remarque *sur les angles trièdres.* — On pourrait établir, sur l'angle trièdre, des propositions analogues à plusieurs des théorèmes démontrés pour le triangle dans le *premier livre* (*chap* IV, § I, n°s 164 *et suiv.*); mais la théorie des angles trièdres ne présente pas d'analogues pour tous ces théorèmes, parce que plusieurs d'entre eux dépendent de ce que la somme des angles d'un triangle est constante, ce qui, comme nous venons de le voir, n'est pas vrai pour les angles dièdres d'un angle trièdre.

Ainsi, par exemple, il est *faux* que deux angles trièdres aient toujours leurs trois angles dièdres égaux chacun à chacun lorsque deux angles dièdres de l'un sont égaux à deux angles dièdres du second (*voyez* le n° 163, *coroll.* 3); il est *faux* que la face opposée à un angle dièdre droit ou obtus soit toujours la plus grande (*voyez* le n° 164, *scol.* 3); *etc.*, *etc.*

Mais il n'en est pas de même des propositions suivantes, qui sont *vraies*, et dont nous recommandons aux élèves de rechercher les démonstrations, ce qui sera facile à ceux qui se seront bien pénétrés des théories qui précèdent :

Théorème I. — 1° *Lorsque deux faces d'un angle trièdre sont égales, les angles dièdres opposés sont égaux ;*

2° *Lorsque deux faces sont inégales, à la plus grande face est opposé le plus grand angle dièdre ;*

Réciproquement :—etc. (*voyez* les n°s 164; *et* 450, *scol.* 2).

Du théorème précédent il résulte que

Un angle trièdre est régulier (n° 401) *quand il a ses trois faces égales*, ou *ses trois angles dièdres égaux.*

Quant aux angles trièdres qui n'ont que deux faces égales entre elles, et les angles dièdres opposés, égaux entre eux, on peut, par analogie, les nommer *angles trièdres isoèdres* : — Nous nommerons encore *base* la face inégale aux deux autres, *angle dièdre culminant* et *arète culminante*, l'angle dièdre opposé à la base, et son arète. — On observera que — *Tout angle trièdre isoèdre est à lui-même son symétrique.*

Théor. ii. — *Le plan mené suivant l'arète culminante d'un angle trièdre isoèdre et suivant la bissectrice de sa base, est perpendiculaire à cette base* (voyez le no 164, *scol.* 1er);

Les deux angles trièdres rectangles partiels qui en résultent, sont symétriques entre eux; — La face qui leur est commune est un *plan de symétrie* (no 450, *scol*s. 1er *et* 2e).

Théor. iii. — *Dans tout angle trièdre, les plans perpendiculaires élevés suivant les bissectrices des faces, se coupent tous les trois suivant une même droite* (voyez le no 166).

Théor. iv. — *Dans tout angle trièdre, les plans qui partagent les angles dièdres en deux parties égales, se coupent tous les trois suivant une même droite* (voyez le no 167).

§ III. — *Comparaison et Mesure des Angles Trièdres.*

N° 459. Lemme. Fig. 372.

Si deux angles plans ASB, CSD, *ayant même sommet* S, *se coupent suivant une droite* SI *dirigée dans leur intérieur, et qu'on lie leurs côtés par deux autres angles*, ASC, DSB, *de manière à former deux angles trièdres opposés par une arète* SI, *la somme des deux derniers angles plans est toujours moindre que celle des deux premiers.* Fig. 372.

En procédant comme dans le *numéro* 168, on a de même les inégalités

$$ASC < ASI + ISC$$

et

$$DSB < DSI + ISB.$$

Puis, ajoutant membre à membre et observant que

$$ASI + ISB = ASB$$

et

$$DSI + ISC = DSC,$$

on obtient $ASC + DSB < ASB + DSC$; *C. Q. F. D.*

N° 460. THÉORÈME VIII. Fig. 373.

Fig. 373. *Deux angles trièdres*, SABC, S'A'B'C', *sont égaux lorsqu'ils ont les faces égales chacune à chacune et semblablement disposées.*

[Pour suivre une méthode analogue à celle que nous avons employée dans le *numéro* 169 relativement aux triangles] appliquons la face A'S'B' sur son égale ASB, de manière que les arètes correspondantes, SA, S'A', se confondent, ainsi que les arètes SB, S'B'. Je dis qu'alors les arètes SC, S'C', se confondront aussi, et que par suite les deux angles trièdres coïncideront.

En effet, si cela n'avait pas lieu, quelque face de l'un des deux angles trièdres, par exemple la face A'S'C', pénétrerait dans l'intérieur du second angle trièdre SABC. Alors, l'arète S'C' [ou SC'] serait dirigée, soit dans l'angle trièdre SABC, suivant SD, soit sur la face SBC, suivant SE, soit enfin en dehors de l'angle trièdre, suivant SF. On aurait ainsi

Dans le *premier* cas :

$$A'S'C' + B'S'C' < ASC + BSC \text{ (n° 454, } \textit{coroll.}\text{)};$$

Dans le *deuxième* : $B'S'C' < BSC$;

Et dans le *troisième* :

$$ASC + B'S'C' < A'S'C' + BSC \quad \text{(n° 459)};$$

— *Ce qui est absurde* dans tous les cas.

COROLLAIRE 1er. — *Un angle trièdre n'a qu'un seul symétrique.*

Fig. 374. En effet : soient deux angles trièdres SABC, S'A'B'C' (fig. 374), ayant les faces égales chacune à chacune. Si la disposition de ces faces n'est pas la même, prolongeons en sens inverse les arètes S'A', S'B', S'C' : il en résultera un troisième angle trièdre S'A"B"C", symétrique de S'A'B'C' (n° 452). Or ce nouvel angle trièdre sera égal à l'angle trièdre SABC, comme ayant avec lui les faces égales chacune à chacune et semblablement disposées; *donc, etc.*

Il suit encore de là :

1° Que — *Deux angles trièdres symétriques d'un troisième sont* toujours *égaux entre eux ;*

Et 2° que — *Deux angles trièdres symétriques entre eux ont les angles dièdres égaux chacun à chacun :* — ce qui complète la *remarque* 4ᵉ du *numéro* 452.

Coroll. 2. — *Deux angles trièdres qui ont leurs faces égales chacune à chacune* [quelle qu'en soit la disposition] *ont leurs angles dièdres égaux chacun à chacun* [ainsi que les *inclinaisons* (n° 419, *scol.*)].

Coroll. 3. — *Deux angles trièdres sont égaux lorsqu'ils ont les arètes parallèles et dirigées dans le même sens, chacune à chacune* (voyez le n° 439).

Coroll. 4. — *Deux angles trièdres sont symétriques entre eux lorsqu'ils ont les arètes parallèles et dirigées en sens contraire, chacune à chacune.*

Scolie. — Lorsque deux angles trièdres ont les arètes parallèles chacune à chacune, il existe entre eux, quelles que soient les directions respectives de ces arètes, la même relation qu'entre l'angle trièdre SABC (nᵒˢ 451 *et* 452, fig. 367) Fig. 367.
et l'un des *sept* autres formés par les mêmes plans.

N° 461. Théorème IX.

Deux angles trièdres sont égaux lorsqu'ils ont les angles dièdres égaux chacun à chacun et semblablement disposés.

En effet, dans cette hypothèse, les faces qui composent les deux angles trièdres respectivement supplémentaires des deux proposés (n° 453), seront égales chacune à chacune ; donc ces angles trièdres supplémentaires seront égaux [ou symétriques] (n° 460); donc ils auront les angles dièdres égaux chacun à chacun ; donc les faces des deux angles trièdres proposés seront égales chacune à chacune ; et comme elles seront d'ailleurs, ainsi que les angles dièdres, semblablement disposées, il s'ensuit que les deux angles trièdres proposés seront égaux.

Scolie. — Cette proposition n'a pas d'analogue dans la théorie des triangles, parce que les trois angles ne suffisent pas pour déterminer un triangle (n° 174), tandis que les trois angles dièdres suffisent, comme on vient de le voir, pour déterminer un angle trièdre.

N° 462. · Théorème X. Fig. 375.

Fig. 375. *Deux angles trièdres*, SABC, S'A'B'C', *sont égaux lorsqu'ils ont un angle dièdre égal*, SA = S'A', *compris entre des faces égales chacune à chacune et semblablement disposées.*

Appliquons la face A'S'B' sur la face ASB, comme dans le *numéro* 460 : les angles dièdres SA et S'A' étant égaux, la face A'S'C' se placera sur le plan de la face ASC; et comme ces faces sont égales, l'arête S'C' se confondra avec l'arête SC : d'où il résulte que les deux angles trièdres coïncideront.

N° 463. Théorème XI.

Deux angles trièdres sont égaux lorsqu'ils ont une face égale, adjacente à des angles dièdres égaux chacun à chacun et semblablement disposés.

On peut démontrer ce théorème, soit par la superposition, comme les *théorèmes* VIII *et* X (n°s 460 *et* 462), soit en appliquant le théorème précédent (n° 462) aux angles trièdres supplémentaires des deux proposés, comme on l'a fait pour le *théorème* IX (n° 461).

N° 464. Remarques *sur l'égalité et la symétrie des angles trièdres et polyèdres.*

On pourrait établir un théorème analogue à celui du *numéro* 173, pour le cas où deux angles trièdres auraient *deux faces égales chacune à chacune ainsi que l'angle dièdre opposé à l'une d'elles*, et un second théorème correspondant pour le cas de *deux angles dièdres égaux chacun à chacun ainsi que la face opposée à l'un d'eux* ; mais, à cause de la difficulté

de discuter exactement sans entrer dans de trop longs détails, les restrictions auxquelles ces deux théorèmes sont soumis, nous avons cru devoir les passer sous silence et nous borner aux *quatre* théorèmes précédens (nos 460—463). Les *problèmes* v *et* vi du paragraphe suivant (no 471 *et* 472) suppléeront jusqu'à un certain point, à cette lacune.

Au lieu de supposer [dans les *quatre* propositions précédentes] que la disposition des *six* élémens donnés [faces ou angles dièdres] est la même, si l'on supposait qu'elle est inverse, les angles trièdres seraient symétriques : car en construisant, comme on l'a fait ci-dessus (no 460, *coroll.* 1er), un troisième angle trièdre, symétrique de l'un des deux proposés, ce troisième angle trièdre aurait les mêmes élémens donnés que le second angle trièdre proposé, et de plus ces élémens y seraient disposés de la même manière ; donc les deux derniers angles trièdres seraient égaux : donc les deux angles trièdres proposés seraient symétriques.

Toutefois, il faut observer que cette condition relative à la disposition des *six* élémens, devient inutile lorsque les angles trièdres sont isoèdres, parce que les angles trièdres qui offrent cette particularité, sont à eux-mêmes leurs symétriques (*voyez* le no 458, *théor.* II).

Ainsi, un angle trièdre est déterminé par *trois* quelconques des *six* élémens [faces ou angles dièdres] qui le constituent, pourvu — 1° que les trois élémens donnés soient consécutifs, — et 2° que la disposition soit la même. — Si cette seconde condition n'était pas énoncée, les élémens conviendraient à deux angles trièdres symétriques entre eux ; mais toutefois ils ne conviendraient à aucun autre.

Observons en outre que —*Dans deux angles trièdres égaux ou symétriques, aux faces égales sont opposés des angles dièdres égaux ; — et réciproquement ;*

Et que —*Dans deux angles trièdres égaux ou symétriques, les inclinaisons* [des arêtes homologues sur les faces égales (no 419, *scol.*)] *sont égales chacune à chacune.*

Indiquons encore, relativement aux angles trièdres, les énoncés de *deux* théorèmes. Le *premier*, analogue au théorème du *numéro* 171 relatif aux triangles, se démontrerait par des raisonnemens analogues à ceux du *nu-*

méro 454; et pour le *second*, on emploierait la propriété de l'angle trièdre *supplementaire* (n° 453).

1° *Lorsque deux faces d'un angle trièdre sont égales, chacune à chacune, à deux faces d'un autre angle trièdre, si l'angle dièdre compris par les premières est plus grand que l'angle dièdre compris par les dernières, la troisième face du premier angle trièdre est plus grande que la troisième face du second angle trièdre;—et réciproquement* (voyez le n° 171);

2° *Lorsque deux angles dièdres d'un angle trièdre sont égaux, chacun à chacun, à deux angles dièdres d'un autre angle trièdre, si la face adjacente aux deux premiers est plus grande que la face adjacente aux deux derniers, le troisième angle dièdre de la première figure est plus grand que le troisième angle dièdre de la seconde figure; —et réciproquement.*

N 465. Théorème XII. Fig. 376.

Fig. 376. *Deux angles trièdres symétriques entre eux*, SABC, S'A'B'C', *sont équivalens.*

Pour le prouver, prenons, sur les arêtes, les six distances égales SA, SB, SC, S'A', S'B', S'C', et menons AB, AC, BC, A'B', A'C', B'C' : les triangles SAB et S'A'B', SAC et S'A'C', SBC et S'B'C', seront égaux chacun à chacun (n° 170) : donc les deux triangles ABC et A'B'C' seront aussi égaux (n° 169). Cela posé, circonscrivons des circonférences aux deux triangles ABC et A'B'C' : ces circonférences seront aussi égales entre elles (n° 166, *coroll*.) : soient O et O' leurs centres respectifs. Les droites SO et S'O' seront respectivement perpendiculaires aux plans ABC et A'B'C' (n° 421, *coroll*.); et de plus, les rayons OA, OB, OC, O'A', O'B', O'C', étant égaux, les triangles rectangles SOA, SOB, SOC, S'O'A', S'O'B', S'O'C', seront aussi égaux (n° 177). Donc les deux angles trièdres SOBA, S'O'A'B', par exemple, ont les trois faces égales chacune à chacune; et comme ils sont en même temps isoèdres (n° 458), ils sont nécessairement égaux (n° 460). Il en est de même des angles trièdres SOAC et S'O'A'C', SOBC et S'O'B'C'.

Maintenant, il peut se présenter *trois cas* (n° 166, *scol.*) : les centres O, O', tomberont tous deux à la fois, ou dans l'intérieur des triangles ABC, A'B'C' (fig. 376), ou sur deux côtés correspondans tels que BC, B'C', ou enfin hors des triangles.

Dans le *premier cas*, les deux angles trièdres SABC, S'A'B'C', sont composés de *trois* parties égales chacune à chacune, et sont par conséquent [non pas égaux (n° 3), mais] équivalens.

Dans le *deuxième cas*, deux angles trièdres partiels se trouvant réduits à *zéro*, les deux angles trièdres proposés sont composés seulement de *deux* parties égales chacune à chacune; mais ils sont encore équivalens.

Enfin dans le *troisième cas*, les deux angles trièdres SABC, S'A'B'C', Fig. 376.
sont composés de la somme de deux angles trièdres égaux chacun à chacun, *diminuée* d'un troisième angle trièdre aussi égal de part et d'autre : ainsi ils sont encore équivalens.

N° 466. THÉORÈME XIII. Fig. 367.

Tout angle trièdre* SABC *est équivalent à la demi-somme de ses trois angles dièdres, moins* UN *angle dièdre droit. Fig. 367.

Les trois droites SA, SB, SC, indéfiniment prolongées, déterminent *huit* angles trièdres pour lesquels on a (n° 451) :

$$\text{SABC} + \text{SA'B C} = \textit{dièdre}\ \text{CAA'B},$$
$$\text{SABC} + \text{SAB'C} = \textit{dièdre}\ \text{ABB'C},$$
$$\text{SABC} + \text{SABC'} = \textit{dièdre}\ \text{BCC'A}.$$

Remplaçons, dans la dernière égalité, l'angle trièdre SABC' par son symétrique équivalent SA'B'C ; ajoutons membre à membre les trois égalités ; et observons (n° 452) que

$$\text{SABC} + \text{SA'BC} + \text{SAB'C} + \text{SA'B'C} = 2$$

[en prenant l'*angle dièdre droit* pour *unité*]. — Nous obtiendrons :

$$2.\text{SABC} + 2 = \textit{dièdre}\ \text{CAA'B} + \textit{dièdre}\ \text{ABB'C} + \textit{dièdre}\ \text{BCC'A}; \text{ d'où}$$

$$\text{SABC} = \frac{3}{2}\,(\textit{dièdre}\ \text{CAA'B} + \textit{dièdre}\ \text{ABB'C} + \textit{dièdre}\ \text{BCC'A}) - 1\,;$$

C. Q. F. D.

COROLLAIRE 1er. — *L'angle trièdre trirectangle* (n° 457, *scol.*) *est équivalent à la moitié d'un angle dièdre droit.*

COROLL. 2. — *Un angle trièdre birectangle est équivalent à la moitié de son angle dièdre obliquangle.*

COROLL. 3. — *Un angle trièdre* simplement *rectangle est équivalent à la demi-somme de ses deux angles dièdres obliquangles, moins un angle trièdre trirectangle.*

§ IV. — *Problèmes sur les Angles trièdres.*

N° 467. PROBLÈME I.

Étant données les trois faces d'un angle trièdre SABC (fig. 377), *déterminer ses trois angles dièdres.* Fig. 377.

Déterminons, par exemple, l'angle dièdre SA.

ANALYSE. — Pour cela, prenons les trois distances SA, SB, SC, égales entre elles ; et menons AB, AC, BC.

Fig.377. **Les droites SA, SB, SC, étant égales entre elles, seront** obliques au plan ABC (*voyez* les nos 419 *et suiv.*). Donc en menant, par un point P de l'arète SA, un plan perpendiculaire à cette arète, ce plan coupera le plan ABC (*voyez* le n° 432) et les plans ASB, ASC, respectivement suivant les trois côtés d'un triangle MPN, [côtés que l'on peut supposer contenus tout entiers dans les triangles SAB, SBC, SCA, en prenant AP suffisamment petit]; et l'angle MPN ainsi formé mesurera l'angle dièdre SA (nos 445 *et* 448).

Cela posé, coupons la figure suivant les droites SC, AC, BC ; et *développons* ou *rabattons* les quatre triangles qui en résultent,
Fig.378. sur le plan de la face SAB (fig. 378) : les sommets C, A, B, C', des faces SAB, SAC, SBC, se trouveront sur un arc de cercle moindre qu'une circonférence (n° 456), décrit du point S comme centre avec un rayon SC = SA = SB = SC'; et cet arc sera décomposé en trois parties ayant respectivement pour cordes CA, AB, BC' [égale à BC de la *figure* 377]. De plus, MP et PN formeront une seule perpendiculaire à la droite SA ; et enfin, le triangle ABC prendra la position ABC''.

Construction. — Après avoir développé la figure, *etc.* (*voyez* l'*analyse*) : — 1° Élevons, par un point P (fig. 378) pris arbitrairement sur SA [mais assez rapproché de A], une perpendiculaire terminée aux deux côtés AB, AC, par les points M, N. — 2° Du point A comme centre, et du rayon AN, décrivons un arc de cercle qui vienne couper AC'' en N', et menons MN'. — 3° Avec les trois côtés MP, PN, MN', construisons le triangle MP*n* [ce qui est toujours possible si l'angle trièdre demandé est lui-même possible, puisque alors l'existence du triangle est une conséquence nécessaire de celle de l'angle trièdre].

L'angle MP*n* sera l'angle cherché.

SCOLIE. — On peut employer la méthode précédente pour

Construire les faces de l'angle trièdre supplémentaire d'un angle trièdre donné (voyez le n° 453) :

Pour cela, il suffit de prendre les supplémens des angles dièdres de l'angle trièdre proposé, déterminés comme il vient d'être dit.

N° 468. PROBLÈME II.

Étant donnés les angles dièdres d'un angle trièdre, construire ses faces.

En remplaçant l'angle trièdre proposé par son supplémentaire (n° 467, *scol.*), on ramène la question au problème précédent.

N° 469. PROBLÈME III.

Étant données deux faces, ASB, ASC, *d'un angle trièdre* S (fig. 377), *et l'angle dièdre compris, déterminer la troisième face et les deux autres angles dièdres.* Fig. 377.

La question sera ramenée au problème I (n° 467) si seulement on détermine la face BSC. — Cela posé :

ANALYSE. — Comme ci-dessus (n° 467).

Construction. — 1° Du point S (fig. 378) comme centre et d'un rayon arbitraire SA, décrivons un arc de cercle; et menons les deux cordes AC, AB. — 2° Par un point P pris sur SA, élevons une perpendiculaire MPN terminée aux deux côtés AB, AC, respectivement en M et en N. — 3° Avec les deux côtés MP, PN, et l'angle compris MPN qui est donné, construisons le triangle MP*n*. — 4° Avec les trois côtés AM, AN, et M*n*, construisons le triangle MAN′ [ce qui est toujours possible dans la même hypothèse que ci-dessus (n° 467)]. — 5° Sur AN′ prolongé prenons AC″ égal à AC; et formons ainsi le triangle ABC″. — 6° Prenons une corde BC′ égale à BC″; et menons SC′. Fig. 378.

L'angle BSC′ sera égal à la face demandée.

N° 470. PROBLÈME IV.

Étant donnés dans un angle trièdre, deux angles dièdres et la face comprise entre leurs arètes, trouver les deux autres faces.

Au moyen de l'angle trièdre supplémentaire (n° 467, *scol.*), le problème est ramené au précédent (n° 469).

N° 471. PROBLÈME V.

Fig. 379. *Étant données deux faces*, ASC, BSC (fig. 379), *d'un angle trièdre* S, *et l'angle dièdre* SA *opposé à l'une d'elles* BSC, *trouver la troisième face et les deux autres angles dièdres.*

La question se ramène comme précédemment (n° 469) à déterminer la face ASB.

Analyse. — D'un point quelconque C (fig. 379) de l'arête SC abaissons une perpendiculaire CP sur la face ASB ; et du point P les perpendiculaires PA et PB sur les arêtes SA et SB. Menons de plus CA et CB. — Cela posé, les triangles APC, BPC, sont rectangles en P ; le premier a un angle A égal à l'angle dièdre donné (n° 424) ; et tous deux ont un côté commun PC ; — *etc.*

Construction. — 1° Construisons sur un même plan les deux angles
Fig. 380. ASC, BSC (fig. 380), ayant le côté commun SC. — 2° D'un point quelconque C pris sur SC, abaissons sur SB et sur SA les perpendiculaires respectives CB, CA ; et prolongeons celle-ci indéfiniment dans le sens CAP... — 3° Faisons au point A, sur le prolongement AP, l'angle PAC′ égal à l'angle dièdre donné [SA de la figure précédente] ; et prenons AC′ égal à AC. — 4° Abaissons sur AP la perpendiculaire C′P. — 5° Du point C′ comme centre, et du rayon CB, marquons un petit arc de cercle qui coupe la droite AP en un point *b*. — 6° Du point P comme centre, et du rayon P*b*, décrivons une circonférence. — 7° Du point S comme centre, et d'un rayon égal à SB, décrivons une autre circonférence ; et soient B′, B″ ses points d'intersection avec la précédente. — 8° Menons SB′, SB″.

Les angles ASB′, ASB″, sont en général deux solutions du problème.

Scolie. — Ce problème, comme celui du *numéro* 186 auquel il est analogue, est susceptible d'avoir *deux* solutions, ou *une* seule, ou de n'en avoir *aucune*. — Nous nous dispenserons, pour les raisons données au *numéro* 464, de *discuter* les divers cas qui peuvent se présenter, ainsi que les résultats qui leur correspondent. Nous observerons seulement que si quelqu'un des angles CSA, CSB, était obtus, les perpendiculaires CA, CB, ne tomberaient pas sur les droites SA, SB, mais sur leurs prolongemens respectifs.

N° 472. PROBLÈME VI.

Étant donnés deux angles dièdres d'un angle trièdre, et la face opposée à l'un d'eux, trouver les deux autres faces et le troisième angle dièdre.

Au moyen de l'angle trièdre supplémentaire (n° 467, *scol.*), le problème est ramené au précédent (n° 471).

§ V. — *Des Angles Polyèdres en général.*

N° 473. Théorème XIV. Fig. 381.

Dans tout angle polyèdre convexe, SABCDE, *la somme des faces est moindre que 4 angles* droits. Fig. 381.

D'abord, l'angle polyèdre étant supposé convexe, il est toujours possible de faire passer par son sommet S un plan MN [différent des faces], tel que cet angle polyèdre soit tout entier situé d'un même côté du plan ; en menant alors, par un point A d'une arête SA, un plan PQ parallèle au premier, celui-ci coupera toutes les arêtes (n° 428, *coroll.*) ; et de là résultera un polygone ABCDE. Supposons que d'un point O pris dans l'intérieur de ce polygone, on mène des droites à tous les sommets. Il restera à prouver que la somme des angles en S est moindre que la somme des angles en O, ce qui se fait absolument comme au *numéro* 456.

Scolie. — Tout angle polyèdre convexe peut donner lieu, comme l'angle trièdre, à un angle polyèdre supplémentaire, que l'on obtient en abaissant, d'un point quelconque de son intérieur, des perpendiculaires sur toutes ses faces. Et de là résulte pour l'angle polyèdre, une extension du théorème du *numéro* 457, que nous ne faisons qu'indiquer.

N° 474. Théorème XV.

Tout angle polyèdre convexe est équivalent à la demi-somme de ses angles dièdres, diminuée d'autant d'angles dièdres droits qu'il a de faces moins deux.

En effet : — 1° l'angle polyèdre est décomposable en autant d'angles trièdres qu'il a de faces, *moins deux* (n° 401) ; — 2° la somme des angles dièdres de l'angle polyèdre est égale à la somme des angles dièdres des angles trièdres qui le composent ; — 3° chaque angle trièdre est équivalent à la demi-somme de ses angles dièdres, moins *un* angle dièdre *droit* (n° 466) ; — *donc, etc.*

N° 475. Théorème XVI.

Si un nombre quelconque d'angles plans ayant leurs sommets au même point, sont disposés de manière à décomposer L'ESPACE *en un certain nombre d'angles polyèdres convexes, le nombre des arêtes* $[A]$, *plus le nombre des angles polyèdres* $[P]$, *formeront une somme égale au nombre des angles plans* $[F]$, *augmenté de* DEUX *unités.*

En effet, d'après le théorème précédent, L'ESPACE est équivalent à la demi-somme des angles dièdres de tous les angles polyèdres, diminuée [chaque face appartenant à deux angles polyèdres contigus] de *deux* fois autant d'angles dièdres *droits* qu'il y a de faces, et augmentée de *deux* fois autant d'angles dièdres *droits* qu'il y a d'angles polyèdres. Or, L'ESPACE est aussi égal à 4 [l'angle dièdre *droit* étant pris pour *unité*] ; et la demi-somme des angles dièdres de tous les angles polyèdres est égale à 2 multiplié par le nombre des arêtes, puisqu'à chaque arête correspond 4 *droits*. On a donc :

$$2A - 2F + 2P = 4,$$

d'où

$$A + P = F + 2;$$

C. Q. F. D.

N° 476. Remarque. — Deux angles polyèdres sont égaux lorsqu'ils sont composés d'un même nombre d'angles trièdres égaux chacun à chacun et assemblés de la même manière; — *et réciproquement.*

Deux angles polyèdres sont dits *symétriques entre eux*, ou simplement, *symétriques*, lorsqu'ils sont *composés d'un même nombre d'angles trièdres symétriques chacun à chacun et inversement assemblés* : par conséquent, en prolongeant au-delà du sommet, toutes les arêtes d'un angle polyèdre, on forme un second angle polyèdre symétrique du premier; et l'on voit (n° 460, *coroll.* 1er) qu'*un angle polyèdre n'a qu'un seul symétrique.*

De plus, deux angles polyèdres symétriques entre eux ont les faces égales, les angles dièdres égaux ainsi que les inclinaisons correspondantes des arêtes sur les faces, *etc.*; et cependant, deux angles polyèdres symétriques entre eux, de même que deux angles trièdres symétriques (n° 452, 3°), ne sauraient, *en général*, coïncider (*).

Enfin, — *Deux angles polyèdres symétriques sont équivalens* (n° 465).

(*) Ceci exige pourtant quelques explications qui s'appliqueront également à toutes les sortes de figures symétriques considérées en général dans l'espace.

Un objet, et son image réfléchie par une glace, présentent l'exemple le plus vulgaire de deux figures symétriques;

Et *géométriquement* :—

Deux figures sont symétriques entre elles lorsque les points de l'une et les points de l'autre, sont, deux à deux, distribués de part et d'autre

On pourrait encore établir sur l'égalité des angles polyèdres en général, des théorèmes analogues aux *théorèmes* III, IV, *et* V, de la théorie des polygones (nos 220—222), en observant toujours que, pour l'égalité de deux angles polyèdres, il faut une condition de plus, savoir : que la disposition des élémens donnés soit la même. Dans le cas inverse, les angles polyèdres seraient symétriques : pour le prouver, on prolongerait les arêtes de l'un, et l'on démontrerait sans peine que le nouvel angle polyèdre ainsi formé est égal à l'autre. Nous ne nous y arrêterons point, croyant faire une chose plus utile en recommandant ces sortes de recherches aux élèves qui veulent s'exercer.

Nous terminerons la théorie des angles polyèdres en proposant la démonstration des *deux* théorèmes suivans :

THÉORÈME I. — *Avec un nombre quelconque d'angles plans égaux, [pourvu que leur nombre soit au moins égal à* TROIS *et que leur somme soit moindre que 4* DROITS*], on peut toujours former un angle polyèdre régulier, et l'on n'en peut former qu'*UN.

THÉOR. II. — *Dans tout angle polyèdre régulier, si l'on prend sur les arêtes, à partir du sommet, des longueurs égales, leurs extrémités sont dans un même plan perpendiculaire à l'axe de l'angle polyèdre, et la section de la surface de l'angle polyèdre, par ce plan, est un polygone régulier.*

---

d'un certain plan, à une même distance et sur une même perpendiculaire pour chaque couple de points.

Ce plan est dit un *plan de symétrie.*

Lorsqu'une figure est composée de deux portions *symétriques entre elles* par rapport à un certain plan, cette figure est dite elle-même *une figure symétrique.* — Telle est la forme extérieure du corps humain, composée de deux parties symétriques entre elles. Les deux mains par exemple, sont symétriques entre elles; il en est de même des deux gants qui les recouvrent; mais observons que si on retourne ces gants de dedans en dehors, c'est le gant de la main droite, qui s'adaptera à la main gauche, *et vice versâ.* — Cet exemple fera facilement comprendre le genre de *retournement* qu'il faudrait faire subir aux figures symétriques, pour les rendre superposables; mais on voit que cette modification porte sur la forme, et non pas seulement sur la situation comme pour les figures planes. — *(Voyez* les nos 45, 86, *et* 175.*)*

C'est à M. LEGENDRE que l'on doit la remarque des principales propriétés des figures symétriques, pour lesquelles nous renvoyons à sa *Géométrie.*

CHAPITRE IV.

DES PRISMES ET DU CYLINDRE.

---

§ Ier. — *Du Prisme en général.*

N° 477. Nous avons déjà dit (n° 402) que l'on nomme **Prisme**, tout *polyèdre qui a pour faces deux polygones* [plans, égaux et parallèles], *et une série de parallélogrammes en nombre égal à celui des côtés de chaque polygone.* — Les prismes sont les plus simples des polyèdres, non pas sous le rapport du nombre des faces, mais en raison des propriétés dont ils jouissent.

Pour obtenir un prisme, considérons un polygone plan
Fig. 382. ABCDE (fig. 382) ; par les sommets de ce polygone menons, hors de son plan et du même côté, les droites égales et parallèles, AA', BB', CC', DD', EE'; et formons le polygone A'B'C'D'E'. Les quadrilatères AB', BC', CD', DE', EA', seront des parallélogrammes (n° 198), et le polygone A'B'C'D'E' sera égal et parallèle au polygone ABCDE (n° 439, *scol.* 2) : par conséquent la figure résultante sera un *prisme.*

Les parallélogrammes AB', BC', CD', DE', EA', sont les *faces latérales* ou les *pans* du prisme : et leur ensemble compose sa *surface latérale.* Quant aux deux polygones ABCDE, A'B'C'D'E', on les nomme les *bases* du prisme ; il faut observer que ces deux bases, considérées *extérieurement* au prisme, sont *inversement superposables* (n° 43). — La *hauteur* du prisme est la distance de ses bases, ou la perpendiculaire commune à leurs plans. — Le prisme est *convexe* ou *concave* suivant que sa base elle-même est un polygone convexe ou un polygone concave ; *etc., etc.*

Tous les angles polyèdres du prisme sont des angles trièdres; et il est évident que le prisme est *déterminé* quand on en connaît *trois faces formant un angle trièdre, avec leur position relative.* Le prisme est encore déterminé quand on en connaît seulement *une base et une arète avec sa position,* ou bien encore *ses arètes latérales*, etc.

N° 478. Un prisme est dit *triangulaire, quadrangulaire, pentagonal,...* suivant que sa base est un *triangle*, un *quadrilatère*, un *pentagone...*, ou suivant qu'il a 3, 4, 5.... pans.

Trois droites égales et parallèles, non situées dans un même plan, déterminent encore *un prisme triangulaire.*

Quant aux prismes des autres espèces, ils sont aussi déterminés d'une manière analogue, par autant de droites égales et parallèles qu'ils ont de faces latérales. Il faut cependant ajouter, lorsque le nombre des pans surpasse *trois*, que les extrémités correspondantes de ces droites doivent être dans un même plan (n° 439, *scol.* 2).

Un prisme est dit *droit* lorsque ses arètes latérales sont perpendiculaires aux plans des bases : chaque arète est alors égale à la hauteur; et les pans sont des rectangles. Dans le cas contraire, le prisme est *oblique;* et par conséquent la hauteur est moindre qu'une arète latérale (n° 419).

Deux prismes droits de même base et de même hauteur sont évidemment *égaux* (n° 477).

Un prisme est *régulier* quand ses bases sont des polygones réguliers, et que d'ailleurs il est droit; les pans sont alors des rectangles égaux.

Un prisme peut avoir des *plans de symétrie* (n°s 416, *coroll.* 1er; *et* 450, *scol.* 1er). Ainsi par exemple, tout prisme droit a au moins *un* plan de symétrie qui partage en parties égales les arètes latérales et par suite le prisme.

Lorsqu'on fait passer entre les bases d'un prisme (fig. 383), Fig. 383.
un plan MNPQR non parallèle à ces bases, on le décompose en deux figures dont chacune est un *tronc de prisme* ou un *prisme tronqué*. Tout prisme tronqué a deux bases qui sont

des polygones généralement inégaux, mais d'un même nombre de côtés, et des faces latérales qui sont généralement des trapèzes. — Un prisme tronqué peut aussi avoir un ou plusieurs plans de symétrie.

Fig. 382 N° 479. *Tout prisme* (fig. 382) *peut se décomposer en prismes triangulaires*, de la même manière qu'un polygone se décompose en triangles (n° 217). Il suffit pour cela de mener des plans diagonaux, AC′, AD′, par les arètes latérales.

Deux prismes sont égaux lorsqu'ils sont composés d'un même nombre de prismes triangulaires égaux chacun à chacun et assemblés de la même manière; — et *réciproquement*.

Deux *prismes* sont *symétriques entre eux*, ou simplement, *symétriques*, lorsqu'ils ont *les bases et les autres faces égales chacune à chacune, mais inversement disposées*.

Il est facile de voir, d'après cela, qu'*Un prisme n'a qu'un seul symétrique* (n° 477); — et que par conséquent — *Deux prismes respectivement symétriques d'un troisième, sont égaux*.

Il s'ensuit encore que deux prismes symétriques entre eux ont les angles trièdres symétriques chacun à chacun, les angles dièdres égaux, la même hauteur, les inclinaisons (n° 419, *scol.*) égales; *etc., etc.*

Enfin, deux prismes [à plus de *trois* pans] symétriques entre eux peuvent se décomposer en un même nombre de prismes triangulaires symétriques chacun à chacun; — et *réciproquement*.

N° 480. **Théorème I.** Fig. 383.

Fig. 383 *Les sections*, MNPQR, M′N′P′Q′R′, *faites dans un prisme par deux plans parallèles qui coupent à la fois toutes les arètes latérales, sont des polygones égaux*.

En effet, les droites MN et M′N′, NP et N′P′,... sont parallèles deux à deux (n° 394); or MM′, NN′, PP′,... sont aussi parallèles deux à deux; donc les quadrilatères MN′, NP′,... sont des parallélogrammes (n° 194): *donc, etc.*

COROLLAIRE. — *Toute section faite dans un prisme par un plan parallèle à la base, est égale à cette base;* — mais la *réciproque* est *fausse.*

Scolie. — Il est facile de déduire du théorème précédent, cette conséquence que si les bases d'un prisme droit sont des polygones symétriques par rapport à un axe ou à plusieurs axes, les plans menés perpendiculairement par les axes correspondans des deux bases, sont des plans de symétrie [outre celui dont nous avons parlé ci-dessus (n° 478)]. C'est ce qui arrive, par exemple, pour les prismes réguliers.

N° 481. THÉORÈME II.

Deux prismes sont égaux lorsqu'ils ont une base et une face, égales chacune à chacune, semblablement disposées, et comprenant un angle dièdre égal.

En effet, on pourra faire coïncider, chacune à chacune, les deux bases et les deux autres faces; or la base et une arète avec sa position suffisent pour déterminer un prisme (n° 477): donc les deux prismes coïncideront entièrement.

COROLLAIRE 1er. — *Deux prismes sont égaux lorsqu'ils ont un angle trièdre compris entre trois* [de leurs] *faces égales chacune à chacune et semblablement disposées.*

Si la disposition était inverse, les prismes seraient symétriques: en effet, en construisant un prisme symétrique de l'un des proposés, il serait égal à l'autre (n° 479).

COROLL. 2. — *Deux prismes triangulaires sont égaux lorsqu'ils ont un angle trièdre formé par trois arètes égales, parallèles, et dirigées dans le même sens, chacune à chacune* (voyez le n° 460, *coroll.* 2).

Les prismes seraient symétriques si les arètes parallèles étaient, chacune à chacune, dirigées en sens contraire.

COROLL. 3. — *Deux prismes droits symétriques entre eux sont* en même temps *égaux, et ne diffèrent que par la position.*

Supposons en effet les deux prismes placés de telle manière que leurs bases inférieures et leurs bases supérieures soient, deux à deux, dans un même plan; admettons, pour mieux

fixer les idées, qu'on les ait d'abord *posés* ainsi sur un plan horizontal. Supposons qu'ensuite on ait *retourné* l'un des deux, *sens dessus dessous* (voyez le n° 45). Il est clair que, dans cette nouvelle position, les bases *inférieures* seront *directement* superposables (n° 43), puisque alors chacune d'elles sera symétrique d'une quelconque des bases *supérieures*; [*et vice versâ*]. De plus, les arètes *latérales* étant toutes égales entre elles et perpendiculaires aux bases, il s'ensuit que, dans la superposition mutuelle des bases inférieures [ou supérieures], les deux prismes coïncideront entièrement.

§ II. — *Du Parallélépipède.*

N° 482. Dans le cas où *les bases* du prisme sont des *parallé-*
Fig. 384. *logrammes* (fig. 384), le prisme a pour faces *six* parallélogrammes opposés deux à deux; et il prend le nom de PARALLÉLÉPIPÈDE (*). — Un parallélépipède est déterminé par *trois* arètes formant un angle trièdre. — Tout parallélépipède a *quatre diagonales* qui lient deux à deux les *quatre couples de sommets* opposés, et *six plans diagonaux* (n° 402) passant par les *six couples d'arètes* opposées. On le désigne par les lettres de deux sommets opposés : OG, AD, BE, ou CF.

Fig. 385. Le parallélépipède est dit *rectangle* (fig. 385) quand toutes ses faces sont des rectangles : c'est donc la même chose qu'un prisme quadrangulaire droit dont les bases sont des rectangles ainsi que les faces latérales; la dénomination de *prisme rectangle* suffit alors pour le caractériser. — *Deux parallélépipèdes rectangles de même base et de même hauteur sont égaux* (n° 478).

Les deux bases d'un parallélépipède rectangle peuvent être des carrés : la figure est dite alors un *prisme quadrangulaire régulier*, ou un *parallélépipède droit à base carrée*, ou simplement, pour abréger, un *prisme carré*.

(*) De παράλληλα, *parallèles* (page 151); et ἐπίπεδα, *plans*.

Enfin, toutes les faces peuvent être des carrés égaux (fig. 386) : Fig. 386.
et alors la figure est un *hexaèdre régulier,* ou un *cube*. — Le cube est donc un cas particulier du prisme carré, et par suite du prisme rectangle.

Tout parallélépipède droit à base rectangle ou à base rhombe (n° 202) a *trois* plans de symétrie ; à base carrée, il en a *cinq* (n° 480, *scol.*). — Le cube en a *neuf*, *six* qui passent par les arêtes opposées prises *deux à deux*, et *trois* qui partagent en deux parties égales les arêtes parallèles prises *quatre à quatre*.

N° 483. Théorème III. Fig. 384.

Dans tout parallélépipède OG, *les faces opposées sont égales et parallèles.* Fig. 384.

La proposition n'a besoin de preuve que pour les faces latérales. En supposant donc que OF et CG soient les bases du parallélépipède, considérons les faces latérales OE et BG. Or, OA est égale et parallèle à BF, parce que OF est un parallélogramme ; de même OC est égale et parallèle à BD puisque OD est un parallélogramme ; donc les angles COA et DBF sont égaux et parallèles (n° 439), ainsi que les deux parallélogrammes OE et BG (n° 194) ; *C.Q.F.D.*

Il est facile de prouver que, *réciproquement*, si dans un polyèdre à *six* faces, les faces opposées sont égales *ou* parallèles deux à deux, la figure est un parallélépipède.

Scolie 1[er]. — *Deux faces opposées quelconques d'un parallélépipède peuvent être prises pour ses bases.*

Scol. 2. — *Les douze arêtes d'un parallélépipède sont égales et parallèles quatre à quatre.* — Chaque angle trièdre est formé par trois arêtes *adjacentes* qui sont en général différentes de longueur pour le même angle trièdre, et toujours égales chacune à chacune dans deux angles trièdres quelconques du même parallélépipède.

SCOL. 3. — *Tout plan diagonal* (n° 482) *d'un parallélépipède le coupe suivant un parallélogramme et le décompose en deux prismes triangulaires.*

COROLLAIRE 1er. — *Dans un parallélépipède, toute section* [faite par un plan *entre* deux faces opposées] *est un parallélogramme* (n° 394).

COROLL. 2. — *Dans tout parallélépipède, les angles dièdres opposés* [ou formés par des faces opposées deux à deux] *sont égaux* (voyez le n° 447, *scol.* 1er).

N° 484. THÉORÈME IV. Fig. 384.

Fig. 384. *Dans tout parallélépipède* OG, *les diagonales se coupent toutes les quatre en un même point qui est leur milieu commun.*

En effet, en menant OF et CG par exemple, on formera un parallélogramme OCGF (n° 198) dont OG et CF seront les diagonales; donc (n° 199) OG et CF se coupent en un point K, mutuellement en deux parties égales. Or, il en serait de même évidemment pour toute combinaison des *quatre* diagonales prises *deux à deux : — donc, etc.*

Scolie. — Le point K se nomme le *centre* du parallélépipède.

Il jouit, par rapport à la surface du parallélépipède, de propriétés analogues à celle du centre du parallélogramme par rapport à son périmètre (*voyez* le n° 199, *scol.* 3). Ainsi par exemple, tout plan qui y passe, partage le parallélépipède en deux polyèdres égaux.

N° 485. THÉORÈME V. Fig. 384.

Dans tout parallélépipède OG, *les angles trièdres opposés* [en diagonales] *sont symétriques deux à deux.*

En effet, en prolongeant les arètes d'un quelconque G, des angles trièdres, on formerait un angle trièdre extérieur, égal à l'angle trièdre opposé O (n° 460, *coroll*t.) : — *donc, etc.*

SCOLIE. — *Dans tout parallélépipède, les inclinaisons des arètes opposées sur les faces opposées, sont égales* (n° 464).

N° 486. THÉORÈME VI.

Tout plan diagonal d'un parallélépipède le décompose en deux prismes triangulaires symétriques entre eux:

En effet, les deux prismes (n° 483, *scol.* 3) ont deux angles trièdres symétriques entre eux (n° 485), formés par des faces égales chacune à chacune (n° 483) : *donc, etc.* (n° 481, *coroll.* 1er).

Réciproquement : — Deux prismes triangulaires symétriques entre eux peuvent s'assembler [de *trois* manières] pour composer un parallélépipède.

SCOLIE. — *Les deux prismes triangulaires sont égaux si le parallélépipède est droit,* [en supposant toutefois, si ce parallélépipède n'est pas rectangle, que les arètes par lesquelles est mené le plan diagonal, soient les arètes latérales].

N° 487. THÉORÈME VII. Fig. 385.

Dans tout parallélépipède rectangle OG, *le carré d'une diagonale est égal à la somme des carrés de trois arètes adjacentes* [ou formant un même angle trièdre (n° 483, *scol.* 2)]. Fig. 385.

On a, par exemple, $OG^2 = OC^2 + CG^2$;

or $CG^2 = OF^2 = OB^2 + BF^2 = OB^2 + OA^2$:

donc $OG^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2$; *C.Q.F.D.*

COROLLAIRE 1er. — *Les quatre diagonales d'un parallélépipède rectangle sont égales.*

COROLL. 2. — *Le carré de la diagonale d'un cube est égal au triple du carré de la diagonale d'une arète.*

N° 488. Du Rhomboèdre. — Le *rhomboèdre* est un parallélépipède dans lequel toutes les faces sont des rhombes égaux (n° 202). — Il y en a de deux
Fig. 387 et 388. espèces : le rhomboèdre *allongé* ou *aigu* (fig. 387), et le rhomboèdre *aplati* ou *obtus* (fig. 388). — Dans le premier (fig. 387), les faces sont réunies *trois à trois* par un de leurs angles aigus pour former *deux* angles trièdres opposés, S, S′ [qui sont égaux entre eux]; et chacun des *six* autres angles trièdres est formé de *deux* angles obtus et *un* angle aigu. — Dans le second au contraire (fig. 388), *deux* angles trièdres opposés, S, S′, sont formés de *trois* angles obtus, et les *six* autres de *deux* angles aigus et *un* obtus. — La droite SS′ s'appelle l'*axe* du rhomboèdre.

La forme cubique est la *limite* qui sépare le rhomboèdre aigu du rhomboèdre obtus.

Le rhomboèdre a *trois* plans de symétrie, qui passent par son axe et par deux arètes opposées aboutissant chacune à l'un des deux sommets de cet axe.

§ III. — *Du Cylindre.*

Fig. 389. N° 489. Nous avons nommé *cylindre* (n° 404 *et* fig. 389), l'espace limité par une surface cylindrique [à directrice fermée] et par deux plans parallèles. Il est clair d'après cela, que tout cylindre peut être considéré comme un prisme (n° 477) d'un nombre infini de faces latérales dont la largeur est infiniment petite. C'est pourquoi la directrice d'une surface cylindrique prend le nom de *base* quand elle est plane.

Lorsque la base est une circonférence de cercle, la surface cylindrique est dite *circulaire ;* et quand les génératrices sont de plus, perpendiculaires au plan de ce cercle, la surface cylindrique est dite *circulaire droite ;* le diamètre du cercle est dit le *diamètre de la surface.*

Il est facile de voir que si l'on prenait une droite pour base d'une surface cylindrique, cette surface se réduirait à un plan (n° 392) ; il en serait encore de même si la génératrice ne faisait que se mouvoir dans le plan de la directrice [supposée plane].

Toutes les arètes d'une surface cylindrique étant parallèles, il s'ensuit que

Tout plan mené suivant une arète et par un point d'une seconde arète, contient celle-ci tout entière (n° 392).

N° 490. Théorème VIII. Fig. 390.

Tout plan mené suivant une arète MP *d'une surface cylindrique convexe et suivant une tangente* TU *à sa base* ABP, *est tangent à la surface cylindrique; — et réciproquement.* Fig. 390.

En effet, le plan et la surface ont d'abord l'arète commune MP : prouvons qu'ils n'ont pas d'autre point commun que ceux de cette arète. Pour cela, soit N un autre point supposé commun : l'arète qui passe par le point N se trouvant à la fois dans le plan (n° 392) et dans la surface (n° 489), devrait percer le plan de la base en un point Q, différent de P, qui appartiendrait également à la circonférence de la base ABP et à la tangente TU, *ce qui est absurde* (n° 21); donc le plan n'a pas d'autres points communs avec la surface, que ceux de l'arète MP : *donc, etc.*

Réciproquement : — Le plan qui touche la surface cylindrique suivant une arète, coupe le plan de la base suivant une droite TU tangente à la base. Car si la droite d'intersection TU pouvait avoir, avec la circonférence de la base, plusieurs points communs, P, Q, les arètes qui passent par les points P, Q, se trouveraient à la fois dans la surface et dans le plan tangent; — *Ce qui est absurde.*

Scolie. — La même *proposition* a encore lieu pour les surfaces cylindriques qui ne sont pas convexes; mais la *démonstration* précédente n'est plus applicable à ce cas (*voyez* les n°s 241 *et* 409).

N° 491. Théorème IX. Fig. 389.

Tout plan parallèle à la base OA *d'une surface cylindrique circulaire, coupe cette surface suivant un cercle égal à la base.* Fig. 389.

Soient OA, OB, deux rayons quelconques de la base, et O′, A′, B′, les intersections respectives de l'axe OO′ et des deux arètes AA′, BB′, avec un plan quelconque parallèle à la base : les droites OO′, AA′, BB′, seront parallèles, et égales (n° 437); donc aussi $O'A' = OA$, $O'B' = OB$, par conséquent $O'A' = O'B'$: *donc, etc.*

Scolie 1[er]. — De là il résulte, comme on l'a annoncé précédemment (n° 405), que dans la génération de la surface cylindrique circulaire droite, tous les points de la génératrice décrivent des cercles égaux et parallèles à la base, ayant pour axe commun celui de cette base (n° 421, *coroll.* 1[er]) ; et par conséquent cette surface est une surface de révolution qui a le même axe que ces cercles.

Scol. 2. — Proposition analogue pour une surface cylindrique quelconque : — *Les intersections d'une surface cylindrique par des plans parallèles sont des courbes égales;* ce qui résulte d'ailleurs de la proposition démontrée pour le prisme (n° 480).

Il s'ensuit que toute surface cylindrique peut être engendrée par sa directrice dont les points se mouvraient parallèlement, chacun sur une même arète.

Fig. 389. N° 492. Un cylindre circulaire droit (fig. 389) peut être considéré comme engendré par la révolution d'un rectangle OA′ autour d'un de ses côtés OO′ qui devient l'*axe* du cylindre. L'axe est égal aux arètes et à la hauteur.

En menant un plan suivant l'axe du cylindre, on a pour section un rectangle CA′ double du rectangle générateur : on peut désigner le cylindre par ce dernier rectangle, en disant *le cylindre* CA′. — Lorsque ce même rectangle [double] est un carré, le *cylindre* est dit *équilatéral.*

Les bases du cylindre droit étant perpendiculaires aux arètes, il s'ensuit que, dans le développement de sa surface latérale, la circonférence de chaque base devient une ligne droite également perpendiculaire à ces arètes. Et par conséquent, en supposant cette surface *ouverte* ou *fendue* le long d'une arète, on voit qu'elle doit prendre, après son dévelop-

pement la forme d'un rectangle de même hauteur, et dont la base est équivalente à la circonférence [rectifiée] de la base du cylindre.

On nomme *cylindre tronqué* ou *tronc de cylindre* (fig. 391) l'espace limité par une surface cylindrique et par deux plans non parallèles. Les sections de la surface cylindrique par ces deux plans se nomment encore les *bases*. Fig. 391.

Dans tout cylindre circulaire, les deux troncs de cylindre que détermine un plan mené par le milieu de l'axe, sont égaux.

493. Un *prisme* dont les arètes sont des arètes du cylindre, est dit *inscrit* au cylindre; et réciproquement, le *cylindre* est dit *circonscrit* au prisme.

Un *prisme* dont les faces sont tangentes au cylindre, est dit *circonscrit* au cylindre; et réciproquement, le *cylindre* est dit *inscrit* au prisme. Les arètes de ce dernier sont parallèles à celles du cylindre (n° 427, *coroll.*).

Lorsqu'un cylindre et un prisme sont inscrits ou circonscrits l'un à l'autre, cette même relation de position existe aussi entre leurs bases.

Le cylindre peut être considéré comme la limite des prismes inscrits et des prismes circonscrits (*voyez* le n° 489).

CHAPITRE V.

DES PYRAMIDES ET DU CÔNE.

---

§ Ier. — *Du Tétraèdre.*

Fig. 392 N° 494. Lorsque l'on coupe par un plan les arètes d'un angle trièdre S (fig. 392), on forme un *polyèdre à quatre faces triangulaires* SAB, SAC, SBC, ABC : ce polyèdre prend le nom particulier de Tétraèdre; c'est le plus simple de tous les polyèdres sous le rapport du nombre des faces. — On peut encore obtenir un tétraèdre en menant *trois* droites, des sommets d'un triangle à un point extérieur à son plan.—Ainsi, un tétraèdre a *six* arètes et *quatre* sommets. — Deux tétraèdres se confondent quand ils ont les mêmes sommets. — Un tétraèdre peut être désigné par une seule lettre quand il est isolé; quand il ne l'est pas, on le désigne par les lettres de ses quatre sommets.

On donne le nom de *base* à une quelconque ABC des quatre faces; et quand on abaisse du sommet opposé une perpendiculaire sur cette base, cette perpendiculaire est la *hauteur* du tétraèdre [correspondante à cette face prise pour base].

N° 495. Le tétraèdre est dit *régulier* lorsque toutes ses faces sont des triangles équilatéraux, lesquels sont alors nécessairement égaux entre eux ; [mais il ne suffirait pas que les triangles fussent égaux, ni qu'ils fussent isocèles, *etc*.... pour que le tétraèdre fût régulier].

Si l'on prolonge au-delà d'un sommet quelconque S (fig. 393), les arètes qui y aboutissent, que sur les prolongemens on prenne SA' = SA, SB' = SB, SC' = SC, et qu'enfin l'on mène le plan A'B'C', il en résultera deux tétraèdres, SABC, S'A'B'C', qui auront les *arètes égales chacune à chacune, mais inversement disposées* [ce qui signifie que ces arètes sont, *à chaque angle trièdre*, assemblées dans un ordre inverse (n° 452)] : ces deux tétraèdres sont dits *symétriques entre eux*. Fig. 393.

N° 496. Théorème I. Fig. 392.

Deux tétraèdres, S, S', *sont égaux lorsqu'ils ont trois faces égales chacune à chacune*, SAB et S'A'B', SAC et S'A'C', SBC et S'B'C', *et semblablement disposées*. Fig. 392.

En effet, d'après l'hypothèse, les angles trièdres S et S' sont égaux (n° 460); et par conséquent les angles dièdres SA et S'A', SB et S'B', SC et S'C', le sont aussi.

Cela posé, plaçons la face S'A'B' sur la face SAB; l'angle dièdre S'A' étant égal à l'angle dièdre SA, la face S'A'C' s'appliquera sur le plan de la face SAC; et comme ces deux faces sont égales et disposées de la même manière, le sommet C' tombera sur le sommet C : *donc, etc.*

Corollaire. — *Deux tétraèdres sont égaux lorsqu'ils ont toutes les arètes égales chacune à chacune et assemblées de la même manière.*

Scolie. — *Un tétraèdre est déterminé par ses six arètes.*

N° 497. Théorème II. Fig. 392.

Deux tétraèdres, S et S', *sont égaux lorsqu'ils ont deux faces égales chacune à chacune*, SAB et S'A'B', SAC et S'A'C, *semblablement disposées, et comprenant un angle dièdre égal.*

Même démonstration.

N° 498. Théorème III. Fig. 392.

Fig. 392. *Deux tétraèdres sont égaux lorsqu'ils ont une face égale,* ABC et A'B'C', *et les angles dièdres adjacens égaux chacun à chacun et semblablement disposés.*

En effet, plaçons la face A'B'C' sur la face ABC : à cause de l'égalité des angles dièdres AB et A'B', la face S'A'B' s'appliquera sur le plan de la face SAB ; et ainsi le point S' se trouvera dans ce plan ; il se trouvera de même dans les plans SAC et SBC ; donc il coïncidera avec leur point d'intersection S : *donc, etc.*

Scolie. — Dans les propositions précédentes, si la disposition est inverse, les tétraèdres sont symétriques : pour le démontrer, il n'y a qu'à supposer construit un tétraèdre symétrique de l'un des proposés (n° 495), et prouver qu'il est égal à l'autre, ce qui est facile.

Il résulte de là qu'*Un tétraèdre n'a qu'un seul symétrique ;*

Et que — *Deux tétraèdres symétriques entre eux ont les faces égales, les angles trièdres symétriques* (n° 464), *et les angles dièdres égaux, chacun à chacun.*

De plus, leurs hauteurs homologues sont égales, ainsi que les inclinaisons des arètes homologues sur les faces homologues.

N° 499. Pour terminer ce qui regarde le tétraèdre, indiquons les énoncés de quelques théorèmes propres à servir d'exercices aux élèves.

Théorèmes *à démontrer.*

Théorème 1er. — *Les perpendiculaires élevées sur les faces d'un tétraèdre par les centres respectifs de leurs cercles circonscrits, concourent toutes les quatre en un même point.*

Le point de concours est également distant des quatre sommets. Il est tantôt intérieur et tantôt extérieur ; il peut aussi être situé sur une face ou sur une arète.

Théor. II. — *Les plans menés perpendiculairement aux arètes d'un tétraèdre par leurs milieux respectifs, passent tous les six par un même point.*

Le point commun est le même que celui du théorème précédent.

THÉOR. III. — *Les plans bissecteurs des angles dièdres d'un tétraèdre passent tous les six par un même point.*

Ce point est également distant des quatre faces; il est toujours intérieur.

THÉOR. IV. — *Les plans menés parallèlement aux faces d'un tétraèdre, au quart de chaque hauteur à partir de ces faces* [prises tour à tour pour bases], *passent tous les quatre par un même point.*

THÉOR. V. — *Les plans menés par chaque arête d'un tétraèdre et par le milieu de l'arête opposée, passent tous les six par un même point.*

Ce point est le même que dans le théorème précédent. — Quand le tétraèdre est régulier, les six plans sont des plans de symétrie; ils se coupent deux à deux à angle droit.

THÉOR. VI. — *Les droites menées dans un tétraèdre par les milieux des arêtes opposées, concourent toutes les trois en un même point.*

Ce point est le même que dans les deux théorèmes précédens; il est situé *au milieu* de chacune des trois droites.

THÉOR. VII. — *Les plans menés par le milieu de chaque arête d'un tétraèdre perpendiculairement à l'arête opposée, passent tous les six par un même point.*

Proposition fausse: Les perpendiculaires abaissées des sommets d'un tétraèdre sur les faces respectivement opposées, concourent toutes les quatre en un même point.

§ II. — *De la Pyramide en général.*

N° 500. Nous avons nommé PYRAMIDE en général (n° 402), tout *polyèdre qui a pour faces, un polygone plan d'un nombre quelconque de côtés, et une série de triangles dont le sommet est commun.*

D'après cette définition, l'on obtient une pyramide en coupant un angle polyèdre par un plan (*voyez* le n° 473), ou en joignant par des droites, les sommets d'un polygone ABCDE (fig. 394), à un point quelconque S extérieur à son plan. — Les triangles ainsi formés sont les *faces latérales* ou *pans* de la pyramide; et le polygone en est la *base*. Le sommet commun des triangles porte plus particulièrement le nom de *sommet* de la pyramide. La *hauteur* de la pyramide est la perpendiculaire SO abaissée du sommet S sur le plan de la base Fig.394.

[prolongé s'il est nécessaire]. — Une pyramide est *convexe* ou *concave* suivant que sa base est un polygone convexe ou un polygone concave.

Tous les angles polyèdres de la pyramide sont des angles trièdres, à l'exception de celui du sommet quand la pyramide a plus de trois faces latérales; et il est clair que la pyramide est *déterminée* quand on en connaît *trois faces formant un même angle trièdre*, c'est-à-dire *la base et deux faces latérales contiguës, avec leur position relative*. La pyramide est encore déterminée quand on connaît seulement *la base et une arète avec sa position*, ou bien *les arètes latérales*, etc.

N° 501. On distingue aussi les pyramides suivant le nombre de leurs pans. La pyramide *triangulaire* est celle qui a *trois* pans : c'est la même chose que le tétraèdre. La pyramide *quadrangulaire* est celle qui a *quatre* pans, etc. — Ou bien, une pyramide est dite *triangulaire, quadrangulaire, pentagonale....*, suivant que sa base est un *triangle*, un *quadrilatère*, un *pentagone.....* etc.

Une pyramide est dite *régulière* lorsque sa *base* est un *polygone régulier* et que ses *pans* sont des *triangles isocèles égaux entre eux*, ayant pour sommet commun un point de la perpendiculaire élevée par le centre de cette base, perpendiculaire que l'on nomme *axe* (n° 421, *coroll*[1].); on nomme de plus, *apothème de la pyramide*, la hauteur commune des faces latérales, qu'il faut bien distinguer de la hauteur ou de l'axe de la pyramide ainsi que de l'apothème de sa base. — *Deux pyramides régulières de même base et de même hauteur sont égales.* — Une pyramide régulière est nécessairement convexe. — Le tétraèdre régulier est une pyramide triangulaire régulière; mais *non* pas *réciproquement*.

Une pyramide peut avoir des *plans de symétrie* (n°s 416, *coroll.* 1er. et 450, *scol.* 1er): il faut pour cela que sa base ait des axes de symétrie, et que le sommet se trouve sur les divers plans perpendiculaires à la base, menés respectivement par ces axes : ces plans sont alors les plans de symétrie de la pyramide. Ainsi, dans une pyramide régulière, chaque axe de symétrie de la base fournit un plan de symétrie.

Lorsque toutes les arètes latérales d'une pyramide SABCDE (fig. 395) sont coupées par un plan entre le sommet et la base, la figure se trouve décomposée en deux autres : l'une Sabcde est une seconde pyramide, et l'autre ABCDE*abcde* se nomme *un tronc de pyramide* ou *une pyramide tronquée*. On distingue, dans le tronc de pyramide, outre les faces latérales qui sont des quadrilatères, la *grande base* ABCDE qui n'est autre chose que la base de la pyramide entière, et la *petite base abcde*, qui coïncide avec celle de la petite pyramide retranchée. Si le plan coupant est parallèle à la base de la grande pyramide, on obtient un *tronc à bases parallèles ;* et alors les faces latérales sont des trapèzes (n° 394). Fig 395.

— Un tronc de pyramide peut aussi avoir des plans de symétrie.

N° 502. *Toute pyramide* SABCDE (fig. 394) *peut se décomposer en tétraèdres* ayant pour sommet commun celui de la pyramide, et pour bases respectives les triangles ABC, ACD, ADE, dans lesquels peut se décomposer sa base. Fig 394.

Deux pyramides égales peuvent toujours se décomposer en tétraèdres égaux chacun à chacun et assemblés de la même manière ; — et *réciproquement*.

Deux *pyramides* peuvent être *composées de tétraèdres symétriques entre eux et inversement disposés :* alors elles sont dites *symétriques entre elles*. D'après cette définition, deux pyramides symétriques entre elles ont les faces égales, les angles dièdres égaux, les angles polyèdres symétriques, les inclinaisons et les hauteurs égales, chacun à chacun.

En prolongeant au-delà du sommet les arêtes latérales d'une pyramide, et coupant ces arètes par un plan parallèle à la base, à une distance du sommet égale à la hauteur, on forme une pyramide symétrique de la première (*voyez* le n° 495) ; et il est facile de voir par ce moyen, que deux pyramides respectivement symétriques d'une troisième, sont égales entre elles, ou qu'*Une pyramide n'a qu'une seule symétrique*.

N° 505. PROBLÈME I.

Construire la hauteur d'une pyramide au moyen de ses arêtes.

Soit pour exemple un tétraèdre dont nous appellerons la base ABC et le sommet S. *Rabattons* les trois faces latérales sur le plan de la base, comme le montre la *figure* 396. Fig. 396.

Cela posé :— 1° Abaissons sur les trois côtés de la base, les perpendiculaires respectives SP, S'Q, S"R : elles iront concourir en un même point O qui est la projection du sommet S du tétraèdre, dans le plan de cette base. — 2° Sur une quelconque SP de ces perpendiculaires, comme diamètre, décrivons une demi-circonférence. — 3° A partir du point P rabattons PO comme corde sur cette demi-circonférence, suivant PI.

SI sera la hauteur cherchée.

En effet...., *etc.*

N° 506. PROBLÈME II.

Étant donné un tronc de pyramide à bases parallèles, calculer la hauteur de la pyramide entière, sachant que deux côtés homologues de ces bases sont dans le rapport de $m : n$, *et que la hauteur du tronc est* a.

En nommant H cette hauteur, et h celle de la pyramide retranchée, on a (n° 503) :

$$H : h :: m : n,$$

$$H - h : H :: m - n : m,$$

ou

$$a : H :: m - n : m;$$

d'où

$$H = \frac{am}{m-n}.$$

Exemple : $m = 9$, $n = 4$, $a = 10$;

$$H = \frac{10 \times 9}{9-4} = 18.$$

§ III. — *Du Cône.*

N° 507. De même que le cylindre peut être assimilé à un
Fig. 397. prisme (n° 489), de même aussi le *cône* (n° 404, *et* fig. 397) peut être considéré comme une pyramide d'un nombre infini de pans dont la base est infiniment petite (n° 501). Pour cette raison, la directrice d'une surface conique prend encore le nom de *base* quand elle est plane ; et la surface est dite *circulaire* quand cette base est un cercle. Enfin, quand le sommet est situé sur l'axe de ce cercle (n° 421, *coroll.* 1er), la surface est *circulaire droite*. — La surface conique se réduirait à un plan si son sommet était situé dans le plan de la base [supposée plane].

Toutes les arètes se coupant en un même point, il s'ensuit que *Tout plan mené suivant une arète et par un point d'une seconde arète, contient celle-ci tout entière.*

N° 508. THÉORÈME VI. Fig. 398.

Fig. 398. *Tout plan mené suivant une arète* SP *d'une surface conique convexe, et suivant une tangente* TU *à sa base* ABP, *est tangent à la surface conique ; — et réciproquement.*

La démonstration est la même que celle du *numéro* 490, en observant toutefois que les arètes, au lieu d'être parallèles entre elles, se coupent au sommet S.

N° 509. THÉORÈME VII. Fig. 399.

Fig. 399 *Tout plan parallèle à la base* OA *d'une surface conique circulaire, coupe cette surface suivant un cercle.*

Soient O′, A′, et B′, les intersections respectives de ce plan avec l'axe SO et avec les deux arètes quelconques SA, SB ; on aura (n° 260) : OA : O′A′ :: SO : SO′,

OB : OB′ :: SO : SO′ ;

d'où l'on tire : O′A′ = O′B′ : *donc, etc.*

SCOLIE 1er. — On a: Fig. 399.

$$OA : O'A' :: SO : SO' :: SA : SA';$$

c'est-à-dire que — *Les rayons des sections circulaires, et les distances du sommet à leurs centres et à leurs circonférences respectives, sont proportionnelles.*

Scol. 2. — De là il résulte (*voyez* le n° 405) que dans la génération de la surface conique circulaire droite, tous les points de la génératrice décrivent des cercles parallèles à la base, dont les rayons sont proportionnels à la distance du sommet, et qui ont pour axe commun celui de la base; et par conséquent la surface est de révolution autour de cet axe (*voyez* le n° 491, *scol.* 1er).

SCOL. 3. — Proposition analogue pour une surface conique quelconque: — *Les intersections d'une surface conique par des plans parallèles sont des courbes semblables* (no 269); ce qui résulte d'ailleurs du théorème démontré pour la pyramide, au *numéro* 503.

N° 510. Un cône circulaire droit (fig. 397) peut être considéré comme engendré par la révolution d'un triangle rectangle SOA autour d'un des côtés SO de l'angle droit O, qui devient l'axe du cône. — En menant un plan suivant l'axe du cône, on a pour section un triangle isocèle ASC double du triangle générateur: on peut désigner le cône par ce triangle, et dire le *cône* ASC; lorsque ce triangle est équilatéral, le *cône* est dit *équilatéral*. — L'angle ASC se nomme *l'angle au centre* du cône; l'angle ASO du triangle générateur est le demi-angle au centre. — L'angle au centre est le *maximum* de tous ceux que peuvent former les arètes prises deux à deux (nos 20 *et* 171). Fig. 397.

L'espace limité par une surface conique et par deux plans quelconques menés du même côté du sommet [et qui se coupent hors du cône] se nomme un *cône tronqué* ou *tronc de cône*. Les sections de la surface conique par les deux plans, se nomment les *bases* du tronc. La *petite base* est la plus rapprochée, et la *grande base* la plus éloignée du sommet. Quand les plans sont parallèles, le *tronc* est dit *à bases parallèles*.

Digitized by Google

Fig. 399. Un tronc de cône circulaire droit à bases parallèles CA′ (fig. 399) peut être considéré comme engendré par la révolution d'un trapèze OA′ rectangle en O et en O′, tournant autour du côté OO′ comme axe. La section du tronc de cône par un plan mené suivant l'axe, est un trapèze symétrique (n° 205) double du trapèze générateur.

Toutes les arètes d'un cône circulaire droit étant égales entre elles, il s'ensuit que si l'on suppose sa surface latérale, *fendue* (n° 492) suivant une arète, le développement de cette surface sera un secteur ayant pour rayon l'arète du cône, et une base équivalente en longueur à la circonférence de la base du cône. [L'angle au centre de ce secteur est nécessairement moindre que 4 *droits* (voyez le n° 473)].

Quant à la surface latérale du tronc de cône, elle devient, lorsqu'elle est développée, un trapèze circulaire (n° 351) dont les bases sont respectivement équivalentes en longueur aux circonférences des bases du tronc de cône, et dont la largeur est égale à son arète.

On peut résoudre, pour le tronc de cône, un problème analogue à celui du *numéro* 506, en remplaçant les côtés homologues des bases du tronc de pyramide, par les rayons ou les circonférences de celles du tronc de cône.

N° 511. Une *pyramide* dont les arètes sont des arètes du cône, est dite *inscrite* au cône; et réciproquement le *cône* est dit *circonscrit* à la pyramide.

Une *pyramide* dont les faces sont tangentes au cône, est dite *circonscrite* au cône; et réciproquement le *cône* est dit *inscrit* à la pyramide.

Lorsqu'un cône et une pyramide sont inscrits ou circonscrits l'un à l'autre, cette même position relative existe aussi entre leurs bases.

Le cône peut être considéré comme la limite des pyramides inscrites et des pyramides circonscrites (*voyez* le n° 507).

CHAPITRE VI.

DES POLYÈDRES (*) EN GÉNÉRAL.

§ Ier. — *Des Polyèdres quelconques.*

N° 512. *Un polyèdre quelconque* (n° 402) *peut toujours se décomposer* [de plusieurs manières] *en tétraèdres.*

D'abord, un polyèdre quelconque peut se décomposer en polyèdres convexes : pour opérer cette décomposition, il n'y a qu'à mener convenablement un certain nombre de plans coupans par les arêtes rentrantes.

Maintenant, soit un polyèdre convexe SABCDEFGIKLMNOPQ Fig. 400. (fig. 400 ; [on n'a représenté que les faces antérieures, pour ne pas trop compliquer la figure]. Supposons que par un point quelconque intérieur au polyèdre, on mène des droites à tous ses sommets : on déterminera ainsi autant de triangles que le polyèdre a d'arêtes, ayant ces arêtes pour bases respectives, et le point intérieur pour sommet commun. De plus, il est facile de voir que le polyèdre se trouvera alors décomposé en pyramides, ayant respectivement ces triangles pour faces latérales, pour bases les faces du polyèdre, et aussi pour sommet commun le point intérieur. Or, on sait déjà qu'une pyramide peut se décomposer en tétraèdres (n° 502) : *donc, etc.*

(*) A la place de ce mot, qui n'exprime rigoureusement que l'idée de la figure considérée sous le point de vue purement *géométrique* (n°s 1er et 3; *voyez aussi page* 311, *note*), on emploie souvent celui de *solide* qui représente une propriété physique appartenant exclusivement aux corps *matériels*. Nous croyons devoir suivre ici l'exemple que nous a donné notre Maître M. LACROIX en le bannissant du langage géométrique.

Au lieu de placer intérieurement le sommet commun des pyramides, on peut le prendre, soit sur une face, soit sur une arète, soit au sommet d'un angle trièdre, tétraèdre, *etc.* Par exemple, prenons arbitrairement un sommet S auquel se réu-
Fig. 400. nissent les trois faces SABCD, SAEF, SDGIF ; supposons des droites menées de ce sommet à tous les autres ; et achevons la construction comme précédemment : le polyèdre se trouvera encore décomposé en pyramides qui auront pour bases ses diverses faces [à l'exception cependant de celles qui se réunissent en S]. Et généralement, le nombre des pyramides obtenues sera égal au nombre total des faces du polyèdre, diminué du nombre des faces sur lesquelles se trouve le sommet commun des pyramides.

N° 513. Il est évident maintenant que deux polyèdres égaux peuvent se décomposer en tétraèdres égaux chacun à chacun et assemblés de la même manière ;

Et réciproquement : que—*Deux polyèdres sont égaux lorsqu'ils sont décomposables en un même nombre de tétraèdres égaux chacun à chacun et semblablement disposés.*

Deux polyèdres égaux ont nécessairement les arètes et les faces égales chacune à chacune et semblablement disposées, les inclinaisons égales, les angles dièdres et les angles polyèdres égaux ;

Et réciproquement : — *Deux polyèdres sont égaux lorsqu'ils ont les faces égales chacune à chacune, semblablement disposées, et comprenant un angle dièdre égal.*

En effet, si l'on considère le tétraèdre SABE (fig. 400) et son homologue dans le second polyèdre, on voit qu'ils sont égaux comme ayant deux faces égales chacune à chacune, comprenant un angle dièdre égal [SA et son homologue], et semblablement disposées. En retranchant ces deux tétraèdres, on aura deux nouveaux polyèdres dans lesquels les nouvelles faces seront encore égales et les nouveaux angles dièdres égaux chacun à chacun : on pourra donc opérer sur ces nouveaux polyèdres comme sur les précédens ; et de proche en proche

on aura décomposé les deux polyèdres proposés en un même nombre de tétraèdres égaux chacun à chacun et semblablement disposés : d'où l'on voit que les deux polyèdres sont égaux. Fig. 400.

Ou bien on peut encore, pour plus de simplicité, faire coïncider d'abord la face SABCD avec son homologue. Les angles dièdres SA, AB, BC, CD, DS, étant respectivement égaux à leurs homologues, les faces contiguës se placeront chacune à chacune dans un même plan ; et leur égalité les fera coïncider. Faisant de même coïncider, de proche en proche, les faces suivantes, on parviendra ainsi à faire coïncider entièrement les deux polyèdres.

Il est bon de savoir d'ailleurs, que la réciproque précédente contient trop de conditions : par exemple, lorsque les polyèdres sont convexes, il suffit qu'ils aient, pour être égaux, les faces égales chacune à chacune et disposées de la même manière; l'égalité des inclinaisons respectives des faces correspondantes est une conséquence de l'égalité de ces faces jointe à leur disposition. — [Pour la démonstration, voyez, dans le *Journal de l'École Polytechnique*, 16e cahier, tome IX, *page* 87 et suiv., le 2e *Mémoire* de M. Cauchy.]

N° 514. Deux polyèdres égaux ont aussi les diagonales homologues égales chacune à chacune ; d'où il suit que si l'on combine 4 *à* 4, de toutes les manières possibles, les sommets homologues de deux polyèdres égaux, on déterminera, en liant ces sommets par des droites, autant de couples de tétraèdres égaux chacun à chacun, que l'on peut former de combinaisons.

On peut supposer un polyèdre déterminé par 3 sommets et leurs distances à tous les autres, ce qui, en nommant n le nombre des sommets, exige la connaissance de $3+3(n-3)$ ou de $3(n-2)=3n-6$ données.

On arrive au même résultat en supposant le polyèdre *décomposé* (n° 512) en tétraèdres n'ayant tous pour sommets que ceux mêmes du polyèdre : le premier tétraèdre exige 6 données pour déterminer 4 sommets ; il reste à déterminer $(n-4)$ sommets pour chacun desquels il faut un tétraèdre; chacun de ces $(n-4)$ autres tétraèdres exige 3 données, ce qui fait en tout $6+3(n-4)=3n-6$ données.

Il en serait encore de même si les tétraèdres avaient un sommet commun, pris, soit dans l'intérieur du polyèdre, soit sur une arète ; mais le nombre des tétraèdres n'est pas le même dans ces divers genres de décomposition ; et il est évidemment le plus petit possible quand les tétraèdres n'ont aucun sommet qui ne soit un de ceux du polyèdre.

Néanmoins, lorsque le polyèdre est d'une espèce donnée, c'est-à-dire lorsque l'on connaît le nombre de ses faces, le nombre des côtés respectifs de ces faces, et leur disposition relative, je nombre des données nécessaires pour déterminer le polyèdre est beaucoup moindre, et se réduit à celui des arètes (*voyez* la *Géométrie* de M. Legendre). Quelquefois même il est encore moindre, comme on l'a vu dans la théorie du prisme.

N° 515. Deux Polyèdres sont dits Symétriques *entre eux* lorsqu'ils *peuvent se décomposer en un même nombre de tétraèdres symétriques chacun à chacun et inversement disposés.*

Il résulte d'abord de cette définition, que si une face de l'un des deux polyèdres supposés symétriques, est composée de plusieurs faces triangulaires des tétraèdres qui le composent, les faces triangulaires homologues des tétraèdres homologues du second polyèdre, se réuniront aussi en une seule dans un même plan pour former une face symétrique de celle du premier polyèdre. En effet, lorsque cette circonstance se présente dans l'un des polyèdres, c'est qu'un certain nombre d'angles dièdres des tétraèdres qui composent ce polyèdre, ont pour arète commune une diagonale de l'une des faces, et font une somme égale à 2 angles dièdres *droits ;* or, dans ce cas, la même chose a nécessairement lieu pour l'autre polyèdre.

Il en résulte en second lieu, que

Deux polyèdres symétriques ont toutes les arètes égales, les faces égales [inversement superposables], *les inclinaisons égales, les angles dièdres égaux, et les angles polyèdres symétriques, chacun à chacun ;*

Et que par conséquent : — *Deux polyèdres sont symétriques lorsqu'ils ont les faces égales, inversement disposées, et comprenant des angles dièdres égaux, chacun à chacun.*

En effet, si l'on construit un troisième polyèdre, symétrique de l'un des proposés, il sera nécessairement égal au second (n° 513), comme ayant les faces et les angles dièdres, respectivement égaux à ceux de ce second polyèdre, et semblablement disposés.

N° 516. Pour construire ce polyèdre symétrique de l'un des proposés, il faut commencer par supposer celui-ci décomposé en tétraèdres, ce qui peut se faire de plusieurs manières (n° 512); mais, quel que soit l'ordre suivi dans la décomposition du premier des polyèdres proposés, le nouveau polyèdre construit sera toujours égal au second des proposés; d'où il résulte qu'*Un polyèdre n'a qu'un seul symétrique*.

De ce que cet ordre de décomposition est arbitraire, il résulte encore que —*Dans deux polyèdres symétriques, les diagonales homologues* [que l'on pourra toujours, au moyen d'une décomposition convenable, regarder comme des arètes homologues de tétraèdres symétriques] *sont égales chacune à chacune;* — et par suite, que si l'on combine 4 *à* 4, de toutes les manières possibles, les sommets homologues des deux polyèdres, on formera, en joignant ces sommets par des droites, une série de tétraèdres symétriques chacun à chacun.

Dans le cas de polyèdres convexes, l'énoncé de la réciproque précédente contient encore des conditions superflues, celles de l'égalité des angles dièdres (n° 513).

Lorsque la figure est un prisme, les conditions de la symétrie se réduisent à l'égalité de la base et d'une face adjacente, également inclinées, et inversement disposées : parce que la base et une arète avec sa position suffisent pour déterminer le prisme (n° 477). [Cette observation était nécessaire pour faire voir que la définition que nous avons donnée (n° 479) des prismes symétriques *en général*, rentre dans la définition commune, dont, au premier abord, elle semble s'écarter.]

N° 517. Théorème I.

Le nombre [S] des sommets d'un polyèdre convexe, augmenté du nombre [F] de ses faces, forme une somme égale au nombre [A] des arètes augmenté de DEUX : — c'est-à-dire que l'on a toujours

$$S + F = A + 2.$$

En effet, supposons que, par un point quelconque pris dans l'intérieur du polyèdre, on mène des droites à tous ses sommets : ces droites détermineront une série d'angles plans, en nombre égal à celui des arètes du polyèdre, formant, par leur réunion, autant d'angles polyèdres que le polyèdre a de faces : d'où (n° 475) l'on conclut l'énoncé.

Scolie. — La formule précédente, due au célèbre géomètre Euler dont elle porte le nom, est analogue à celle que nous avons donnée au *numéro* 224 (voyez le 1er *Mémoire* de M. Cauchy, déjà cité *page* 172).

N° 518. Théorème II.

La somme des angles plans qui forment les angles polyèdres de tout polyèdre convexe, vaut autant de fois 4 DROITS *qu'il a de sommets moins* DEUX.

En effet, si dans le polyèdre, on nomme

t le nombre des faces *triangulaires*,
q le nombre des..... *quadrilatères*,
p celui des.......... *pentagones*,
h celui des.......... *hexagones*,
e celui des.......... *heptagones*,
.... *etc., etc.*,

la somme de tous les angles plans du polyèdre vaudra

$(2t + 4q + 6p + 8h + 10e + \ldots.)$ *angles droits.*

Mais on a

$$A = \frac{1}{2}(3t + 4q + 5p + 6h + 7e + \ldots.),$$

d'où $$4A = 6t + 8q + 10p + 12h + 14e + \ldots.);$$

et comme d'ailleurs

$$4F = 4t + 4q + 4p + 4h + 4e + \ldots.,$$

il en résulte

$$2t + 4q + 6p + 8h + 10e + \ldots. \quad = 4A - 4F = 4(S - 2);$$

— *Ce qui démontre la proposition.*

N° 519. Théorème III.

Dans tout polyèdre, les faces d'un nombre impair de côtes sont toujours en nombre pair.

En effet, il résulte de la valeur de A, employée dans la démonstration du théorème précédent, que la somme

$$3t + 4q + 5p + 6h + 7e + \ldots .$$

est un nombre *pair;* et par suite, plus simplement, que

$$t + p + e + \ldots ..$$

est un nombre *pair;* *C. Q. F. D.*

N° 520. Théorème IV.

Dans tout polyèdre, les sommets auxquels aboutissent un nombre impair d'arêtes sont toujours en nombre pair.

En effet, comme chaque arête appartient à la fois à deux faces, et se termine à deux sommets, il s'ensuit qu'en comptant, soit le nombre des côtés de toutes les faces, soit le nombre des arêtes de tous les sommets, on compte deux fois le nombre total des arêtes.

Par conséquent, à la valeur de A donnée dans le *théorème* II (n° 518), et employée dans le *théorème* III (n° 519) qui précède, on peut substituer la suivante :

$$A = \frac{1}{2}(3t' + 4q' + 5p' + 6h' + 7e' + \ldots),$$

formule dans laquelle

t' représente le nombre des *angles trièdres*,
q'.............. celui des *angles tétraèdres*,
p'...................... *angles pentaèdres*,
h'.......................... *hexaèdres*,
e'.......................... *heptaèdres*,
etc., etc.

Il en résulte, comme ci-dessus, que

$$3t' + 4q' + 5p' + 6h' + 7e' + \ldots ,$$

et plus simplement, que

$$t' + p' + e' + \ldots .$$

est un nombre *pair;* *C. Q. F. D.*

Scolie. — La comparaison des deux théorèmes précédens conduit à une remarque très importante, en laissant entrevoir une propriété générale qui régit la théorie des polyèdres, et qui consiste en ce qu'à l'exception de quelques théorèmes [tel est, par exemple, celui d'Euler (n° 517)], dans l'é-

noncé desquels le nombre des faces et celui des sommets figurent de la même manière, il ne saurait exister, entre le nombre des arêtes, celui des sommets, et celui des faces, aucune relation à laquelle il n'en réponde une autre que l'on déduit de la première en permutant simplement entre eux les mots *faces* et *sommets*.

On nomme *conjugués* ou *réciproques*, les polyèdres qui présentent ces relations mutuelles.

[*Voyez*, pour la théorie des polyèdres, les *deux Mémoires* de M. Cauchy cités plus haut (n°s 513 *et* 517), le *Mémoire* de M. Poinsot, cité au n° 225, les *Annales de Mathématiques* de M. Gergonne, en divers endroits, et notamment *tome* XV, page 157, enfin les savantes *Notes* de la *Géométrie* de M. Legendre.]

§ II. — *Des Polyèdres réguliers.*

N° 521. Théorème V.

Il ne peut exister que 5 sortes de polyèdres réguliers.

Considérons d'abord les polyèdres à faces *triangulaires*.

Les faces étant des triangles réguliers, on ne peut, à chaque sommet, réunir plus de 5 faces, parce que chaque angle plan d'un triangle équilatéral vaut $\frac{2}{3}$, et que $\frac{2}{3} \times 6 = 4$, somme déjà trop forte pour former un angle polyèdre (n° 473).

On pourra donc réunir 3, ou 4, ou 5 triangles; et dans ces trois cas on aura $A = \frac{3}{2}F$, puisque chaque triangle a 3 côtés, et que chaque côté d'un triangle se réunit à un côté d'un autre triangle pour former une arête. De là on tire, par le théorème d'Euler, pour le cas où les faces du polyèdre sont des triangles,

$$2S = F + 4.$$

Si l'on réunit 3 triangles à chaque sommet du polyèdre, on aura

$$S = \frac{3}{3}F = F; \text{ d'où } 2F = F + 4, \text{ ou } F = 4;$$

et la figure sera un *tétraèdre régulier*.

Si l'on réunit 4 triangles à chaque sommet, on aura

$$S = \frac{3}{4}F; \quad \text{d'où} \quad \frac{3}{2}F = F + 4, \quad \text{ou} \quad F = 8;$$

et la figure sera un *octaèdre régulier*.

Si l'on réunit 5 triangles à chaque sommet, on aura

$$S = \frac{3}{5}F; \quad \text{d'où} \quad \frac{6}{5}F = F + 4, \quad \text{ou} \quad F = 20;$$

et la figure sera un *icosaèdre régulier*.

Maintenant, prenons pour faces des *carrés* : nous aurons

$$A = \frac{4}{2}F = 2F; \text{ d'où } S = F + 2.$$

On ne peut assembler des carrés que 3 *à* 3 : donc

$$S = \frac{4}{3}F; \text{ d'où } \frac{4}{3}F = F + 2, \text{ ou } F = 6;$$

ainsi la figure sera un *hexaèdre*.

Enfin, prenons pour faces des *pentagones* : nous aurons

$$A = \frac{5}{2}F; \text{ d'où } S = \frac{4}{3}F + 2, \text{ ou } 2S = 3F + 4.$$

Les pentagones ne peuvent non plus s'assembler que 3 *à* 3 : ainsi

$$S = \frac{5}{3}F; \text{ d'où } \frac{10}{3}F = 3F + 4, \text{ ou } F = 12;$$

et la figure sera un *dodécaèdre*.

On ne saurait former d'angle trièdre avec des hexagones réguliers, ni à plus forte raison avec des polygones réguliers d'un nombre de côtés plus grand que 6 (n° 456) : donc

Il ne peut exister que 5 sortes de polyèdres réguliers.

Prouvons maintenant qu'en effet ces polyèdres peuvent être construits.

CONSTRUCTION DES POLYÈDRES RÉGULIERS.

N° 522. *Tétraèdre régulier* (fig. 401). — On peut toujours réunir *trois* triangles équilatéraux SAB, SAC, SBC, de manière à former un angle trièdre S (n° 477, *théor.* 1). Cela fait, la figure ABC sera évidemment un triangle égal aux trois premiers, et les angles dièdres seront tous égaux (n° 458, *théor.* 1) : — *donc, etc.* Fig. 401.

Le tétraèdre régulier a 4 sommets et 6 arêtes : le nombre des sommets est donc égal à celui des faces. — Nous avons vu (n° 499, *théor.* v) qu'il avait 6 plans de symétrie.

N° 523. *Octaèdre régulier* (fig 402). — Supposons que par le point O, l'on mène d'abord 3 droites, AA', BB', CC', perpendiculaires entre elles (n° 425, *scol.*), de manière que OA = OA' = OB = OB' = OC = OC'; puis ensuite, les droites AB, BA', A'B', B'A, CA, CB, CA', CB', C'A, C'B, C'A', C'B' : on aura formé ainsi *huit* pyramides triangulaires régulières, OABC, OBA'C, OA'B'C, OB'AC, OABC', OBA'C', OA'B'C', OB'AC', égales entre elles (n° 496). Fig. 402.

Donc les faces ABC, BA'C, A'B'C, B'AC, ABC', BA'C', A'B'C', B'AC', sont égales entre elles et également inclinées : donc le polyèdre à *huit* faces CABA'B'C' est un polyèdre régulier.

L'octaèdre régulier a 6 sommets et 12 arêtes. — Il a 9 plans de symétrie, dont 6 sont perpendiculaires sur les milieux des arêtes opposées prises deux à deux, et les 3 autres sur les milieux des droites qui joignent les sommets opposés pris aussi deux à deux. Chacun de ces derniers partage la figure en deux pyramides quadrangulaires régulières égales entre elles et opposées par la base.

Fig. 403. N° 524. *Icosaèdre régulier* (fig. 403). — Soit un triangle équilatéral ABC. Supposons d'abord qu'avec cinq triangles égaux à ABC [le triangle ABC compris] on forme au point A un angle pentaèdre régulier, ce qui est toujours possible (n° 477, *théor.* 1). Supposons ensuite qu'au point B on forme de la même manière, en employant la face ABC, un angle pentaèdre régulier : ce second angle pentaèdre sera égal au précédent; leurs angles dièdres seront par conséquent tous égaux; donc ces deux angles pentaèdres auront deux faces communes, ABC, ABD. De même, il suffira de deux nouveaux triangles CFG, CGI, pour former au point C un troisième angle pentaèdre régulier, puisque les angles dièdres AC, BC, ont la valeur convenable. On aura ainsi réuni *dix* triangles égaux et également inclinés, composant une sorte de *calotte polyédrale* DEFGIK, telle que les angles de son *bord* seront alternativement formés de *deux* et de *trois* triangles.

Cela fait, imaginons que l'on construise de la même manière, une seconde calotte égale à la première : tous les angles dièdres de cette seconde calotte auront la même valeur que ceux de l'autre. Donc on pourra, sans solution de continuité, réunir les *angles doubles* du bord de la première avec les *angles triples* du bord de la seconde, *et vice versâ;* et il en résultera une figure à 20 faces égales entre elles et également inclinées.

L'icosaèdre régulier a 12 sommets, 30 arêtes, et 15 plans de symétrie qui passent par les arêtes opposées prises deux à deux. Les 5 faces qui se réunissent à chaque sommet forment une pyramide régulière.

N° 525. *Hexaèdre régulier* (fig. 386). — C'est le polyèdre que l'on a nommé *cube* (n° 482).

Le cube a 8 sommets et 12 arêtes. — Nous avons vu (n° 482) qu'il a 9 plans de symétrie.

L'octaèdre régulier et le cube ont le même nombre d'arêtes et le même nombre de plans de symétrie; et le nombre des faces de l'un est égal au nombre des sommets de l'autre.

Fig. 404. N° 526. *Dodécaèdre régulier* (fig. 404). — Supposons qu'avec *trois* pentagones réguliers égaux on forme un angle trièdre, ce qui est possible (n° 477, *théor.* 1) : les trois angles dièdres de cet angle trièdre seront égaux (n° 458, *théor.* 1). Maintenant, avec de nouveaux pentagones égaux aux

précédens, on peut de même former successivement au point B, au point C, au point D, et enfin au point E, d'autres angles trièdres, toujours de même valeur. Cela fait, on aura *six* pentagones réguliers composant une calotte FGIKLMNOPQ, telle que les angles de son *bord* seront alternativement formés d'*un* et de *deux* angles plans.

Si l'on imagine ensuite une seconde calotte égale à la première, on pourra les réunir toutes deux *bord à bord* de manière que les *angles simples* de l'une se raccorderont avec les *angles doubles* de l'autre; et l'on aura ainsi une figure à 12 faces égales et également inclinées.

Le dodécaèdre régulier a 20 sommets, 30 arêtes, et 15 plans de symétrie qui passent par les arêtes opposées prises deux à deux.

Le nombre des arêtes, dans l'icosaèdre régulier, est le même que dans le dodécaèdre; il en est de même du nombre des plans de symétrie; et le nombre des sommets de l'un des polyèdres est égal au nombre des faces de l'autre.

N° 527. Théorème VI. Fig. 405.

Tout polyèdre régulier est décomposable en autant de pyramides régulières égales entre elles qu'il a de faces; — [de plus, ces pyramides ont pour sommet commun un point qui est également distant, d'une part de tous les sommets du polyèdre, ensuite de toutes ses arêtes, et enfin de toutes ses faces]. Fig 405.

Soient ABC, ABD, deux faces adjacentes d'un polyèdre régulier quelconque, AB leur commune arête, et E, F, leurs centres respectifs. Des points E, F, abaissons sur AB des perpendiculaires : elles seront égales et tomberont en un point G; de plus, elles détermineront un plan perpendiculaire à AB (n° 412), et par conséquent aux deux faces (n° 424. *scol.*), et feront un angle EGF dont la mesure sera celle de leur angle dièdre (n° 448). Cela posé, par les points E et F, menons des droites respectivement perpendiculaires aux deux faces : elles se couperont (n° 143) en un point O qui sera également distant des points A, B, C, D (n° 421) : les pyramides OABC, OABD, seront donc régulières (n° 501), et égales entre elles (n° 504); et leurs hauteurs respectives seront OE, OF.

Je dis maintenant que toutes les perpendiculaires élevées sur chacune des autres faces par leurs centres respectifs, viendront aboutir au point O : et il suffit de prouver la proposition pour une troisième face adjacente à l'une des deux premières. Pour cela, supposons que du centre d'une face adjacente à ABC, on mène une droite au point O : cette droite, la droite EO, et les intersections de leur plan avec les deux faces correspondantes du polyèdre, détermineront un quadrilatère qui sera égal au quadrilatère OEGF : car il est facile de voir que ces deux quadrilatères auront *trois* côtés égaux chacun à chacun ainsi que les angles compris entre eux, et qui sont, l'angle dièdre du polyèdre, et un angle droit.

De là on conclut sans peine l'énoncé du théorème.

Scolie 1er. — On peut nommer *pyramides intégrantes*, les pyramides régulières qui composent les polyèdres réguliers.

Scol. 2. — Le point O est, de plus, le point de concours de tous les plans de symétrie : on le nomme le *centre* du polyèdre régulier. On nomme *rayons* du polyèdre régulier les arètes latérales des pyramides intégrantes qui le composent, ou les distances du centre aux sommets; la hauteur des pyramides, ou la distance du centre aux faces, est l'*apothème* du polyèdre.

Scol. 3. — Un polyèdre peut n'avoir pour faces que des polygones réguliers, sans être pour cela un polyèdre régulier; *exemple* : deux tétraèdres réguliers égaux opposés base à base.

N° 528. Problème I.

Étant donné un polyèdre régulier, trouver l'angle dièdre de deux faces adjacentes.

Tétraèdre (n° 522). — Formez un angle trièdre régulier avec trois angles de triangles équilatéraux : son angle dièdre sera l'angle dièdre cherché (*voyez* le n° 467).

Cube (n° 525). — Formez un angle trièdre régulier avec trois angles droits : son angle dièdre sera l'angle dièdre cherché. — Cet angle est droit.

Octaèdre (n° 523). — Formez un angle trièdre avec deux angles de triangles équilatéraux et un angle droit : l'angle dièdre opposé à celui-ci sera l'angle dièdre cherché.

Dodécaèdre (n° 526). — Formez un angle trièdre régulier avec trois angles de pentagones réguliers : son angle dièdre sera l'angle dièdre cherché.

Icosaèdre (n° 524). — Formez un angle trièdre avec deux angles de triangles équilatéraux et un angle de pentagone régulier : l'angle dièdre opposé à ce dernier sera l'angle dièdre cherché.

N° 529. Problème II.

Étant donné un polyèdre régulier, construire son apothème et son rayon.

Construction. — 1° Formez un triangle rectangle ayant pour un des côtés de l'angle droit, l'apothème d'une face du polyèdre, et pour angle adjacent à ce côté, l'angle qui correspond à la moitié de l'angle dièdre de deux faces adjacentes (n° 528) : l'autre côté de l'angle droit sera l'*apothème* du polyèdre.

2° Formez un triangle rectangle ayant pour côtés de l'angle droit, l'apothème du polyèdre (1°) et le rayon d'une de ses faces : l'hypoténuse sera le *rayon* du polyèdre.

Digitized by Google

THÉORÈMES A DÉMONTRER.

N° 530. Théorème i.—*Si l'ont joint deux à deux par des droites, les centres des faces d'un tétraèdre régulier, ces droites seront les arêtes d'un second tétraèdre régulier* [inscrit au premier].

Théor. ii.—*Si l'on mène des plans perpendiculaires aux extrémités des rayons d'un tétraèdre régulier, ces plans détermineront un second tétraèdre régulier* [circonscrit au premier].

Théor. iii.—*Si l'on joint deux à deux par des droites, les centres des faces adjacentes d'un* $\left\{\begin{matrix}\textit{octaèdre}\\ \textit{hexaèdre}\end{matrix}\right\}$ *régulier, ces droites seront les arêtes d'un* $\left\{\begin{matrix}\textit{hexaèdre}\\ \textit{octaèdre}\end{matrix}\right\}$ *régulier* $\left[\text{inscrit}\left\{\begin{matrix}\text{à l'octaèdre}\\ \text{à l'hexaèdre}\end{matrix}\right\}\right]$.

Théor. iv.—*Si l'on mène des plans perpendiculaires aux extrémités des rayons d'un* $\left\{\begin{matrix}\textit{octaèdre}\\ \textit{hexaèdre}\end{matrix}\right\}$ *régulier, ces plans détermineront un* $\left\{\begin{matrix}\textit{hexaèdre}\\ \textit{octaèdre}\end{matrix}\right\}$ *régulier* $\left[\text{circonscrit}\left\{\begin{matrix}\text{à l'octaèdre}\\ \text{à l'hexaèdre}\end{matrix}\right\}\right]$.

Théor. v.—*Si l'on joint deux à deux par des droites, les centres des faces adjacentes d'un* $\left\{\begin{matrix}\textit{icosaèdre}\\ \textit{dodécaèdre}\end{matrix}\right\}$ *régulier, ces droites seront les arêtes d'un* $\left\{\begin{matrix}\textit{dodécaèdre}\\ \textit{icosaèdre}\end{matrix}\right\}$ *régulier* $\left[\text{inscrit}\left\{\begin{matrix}\text{à l'icosaèdre}\\ \text{au dodécaèdre}\end{matrix}\right\}\right]$.

Théor. vi.—*Si l'on mène des plans perpendiculaires aux extrémités des rayons d'un* $\left\{\begin{matrix}\textit{icosaèdre}\\ \textit{dodécaèdre}\end{matrix}\right\}$ *régulier, ces plans détermineront un* $\left\{\begin{matrix}\textit{dodécaèdre}\\ \textit{icosaèdre}\end{matrix}\right\}$ *régulier* $\left[\text{circonscrit}\left\{\begin{matrix}\text{à l'icosaèdre}\\ \text{au dodécaèdre}\end{matrix}\right\}\right]$.

Scolie 1er. — Dans deux polyèdres réguliers inscrits ou circonscrits l'un à l'autre, les arêtes de l'un sont, chacune à chacune, perpendiculaires aux arêtes de l'autre; et les plans de symétrie sont communs.

Scol. 2. — Le cube et l'octaèdre régulier sont des *polyèdres réguliers réciproques* l'un de l'autre (n° 520, *scol.*); — il en est de même du dodécaèdre et de l'icosaèdre réguliers; — le tétraèdre régulier est réciproque de lui-même.

Théor. vii. — *Deux polyèdres réguliers réciproques qui ont des rayons égaux, ont aussi des apothèmes égaux; — et réciproquement.*

Théor. viii. — *Les angles dièdres d'un polyèdre régulier sont supplémentaires des angles au sommet des faces latérales des pyramides intégrantes de son réciproque.*

N. B.—Nous aurions encore à indiquer plusieurs propositions curieuses, tant sur les *polyèdres réguliers d'ordres supérieurs*, polyèdres signalés par M. Poinsot dans le *Mémoire* déjà cité, et analogues aux *polygones étoilés* (voyez le nº 233), que sur une sorte de *polyèdres semi-réguliers*, nommés [on ne sait par quelle raison] *Corps d'*Archimède, analogues aux assemblages de polygones réguliers du *numéro* 238 (*scol.* 2), et auxquels M. Lidonne a consacré un *Mémoire* qui se trouve à la suite de sa *Table des diviseurs des nombres.* Nous nous contenterons, sur ce sujet, de renvoyer à ces deux Mémoires.

Digitized by Google

CHAPITRE VII.

DE LA SPHÈRE.

---

§ Ier. — *Propriétés générales. — Cercles de la Sphère, etc.*

N° 531. THÉORÈME I. Fig. 406.

Toute section d'une sphère OA *par un plan* CDEF, *est un cercle.* Fig. 406.

En effet, abaissons du centre O la perpendiculaire OP sur le plan de la section; et menons aux divers points de la ligne d'intersection, les rayons OC, OD..., et les droites PC, PD... *etc.* Les obliques OC, OD..., étant égales, on aura aussi (n° 420, *réeipr.*) PC = PD = ... : donc la ligne d'intersection est une circonférence de cercle qui a pour centre le point P et pour rayon la distance PC.

N° 532. Lorsque le plan passe par le centre de la sphère, le cercle et la sphère ont même centre et même rayon, comme nous l'avons déjà dit (n° 407). On nomme GRAND CERCLE, l'*intersection de la sphère et d'un plan* GIKL (fig. 406) *qui passe par son centre,* parce que ce cercle est le plus grand que l'on puisse tracer sur sa surface. Les autres sections se nomment des *petits cercles.*

Tous les grands cercles d'une même sphère, ou de sphères égales, sont égaux.

De plus, — *Deux points quelconques*, A, C, *d'une surface sphérique, déterminent toujours un grand cercle* [pourvu qu'ils ne soient pas sur un même diamètre] : puisque ces deux points

Fig. 406. et le centre de la sphère déterminent un plan.—Mais si les deux points A, C, étaient les extrémités d'un même diamètre AB, on pourrait y faire passer une infinité de grands cercles.

On peut aussi, par les deux points A, C, faire passer une infinité de petits cercles, puisque l'on peut y faire passer une infinité de plans ; mais, quand on parle d'un arc de cercle passant par deux points A, C, c'est toujours de l'arc de grand cercle que l'on est censé parler, à moins que l'on n'énonce expressément le contraire.

On peut conclure de là, que

Deux grands cercles, ACBE, ADBF, *se coupent mutuellement en deux parties égales :*

Car leur intersection commune AB, passant par le centre O, est un diamètre commun aux deux cercles.

On peut en conclure encore, que

La sphère est une surface convexe,

C'est-à-dire qu'une ligne droite ne saurait percer sa surface en plus de *deux* points : car en menant un plan par cette droite et par le centre, on obtient une circonférence de grand cercle, qui, d'une part, doit contenir tous les points communs à la droite et à la surface sphérique, et qui, d'autre part, n'en peut contenir que deux (n° 87).

N° 533. Le centre du cercle CDEF (fig. 406) et celui de la sphère sont sur une même droite perpendiculaire au plan du cercle; cette droite est l'*axe* du cercle (n° 421, *coroll.* 1er); et l'on nomme PÔLES (*) du cercle, les points A, B, où cette droite perce la surface sphérique.

Tous les cercles parallèles ont même axe et mêmes pôles.

Tous les points de la circonférence CDEF *d'un cercle de la sphère sont également distans* [en ligne droite] *de chacun de ses pôles*, A ou B.

Par conséquent, tous les arcs de grand cercle, CA, DA, menés des différens points de la circonférence CDEF à l'un de

(*) De πολέω, *je tourne*.

ses pôles, A ou B, sont égaux puisqu'ils ont leurs cordes égales (n° 90, *récipr.*); et les plans de ces arcs sont perpendiculaires à celui de la circonférence puisqu'ils contiennent l'axe de celle-ci. — On dit, par cette raison, que ces *arcs* sont *perpendiculaires* au cercle, et par suite, à la circonférence (*voyez* le n° 442, *scol.*); et il est clair, d'après ce qui précède, que Fig. 406.

Par un point donné sur la surface de la sphère, *on ne peut mener qu'un seul arc de grand cercle perpendiculaire à un grand cercle* [ou à un petit cercle] *donné*, — à moins que le point donné ne soit un des pôles du cercle donné (*voyez* le n° 423, *coroll.* 1er).

Les arcs de grand cercle menés aux divers points de plusieurs circonférences parallèles, de l'un de leurs pôles communs, augmentent à mesure que ces circonférences sont plus éloignées du pôle. Pour toute circonférence de grand cercle, l'arc de grand cercle mené de chacun de ses points à l'un de ses pôles, est un quart de grand cercle ou un *quadrant* (n° 19). Enfin, tous les arcs de grand cercle, compris entre deux circonférences parallèles et perpendiculaires à leurs plans, sont égaux.

N° 534. Chaque pôle d'un cercle est déterminé par l'*intersection de deux arcs* de grand cercle *perpendiculaires* à son plan, et menés respectivement par deux points de sa circonférence [non situés sur le même diamètre]; et quand il s'agit d'un grand cercle, le pôle se trouve encore à l'*extrémité d'un quadrant perpendiculaire*.

Réciproquement : — *Un cercle est déterminé par un point de sa circonférence et l'un de ses deux pôles;* — et l'on peut, avec ces données, le décrire au moyen d'un compas.

Si l'on suppose la distance rectiligne des deux pointes du compas égale à la corde d'un quadrant [et que ses deux branches soient convenablement courbées], on pourra s'en servir, pour décrire sur la surface des circonférences ou des arcs de grand cercle, pour trouver les pôles d'un grand cercle donné, — *etc.*, *etc.*

N° 535. Il y aurait encore à établir, sur la théorie des arcs de cercle tracés sur la sphère, plusieurs théorèmes importans; mais comme ils se déduisent facilement de ce qui précède, nous ne ferons que les indiquer, en même temps que les propositions sur lesquelles ils reposent ou avec lesquelles ils ont de l'analogie.

THÉORÈME I. — *Les arcs de grand cercle perpendiculaires abaissés d'un point donné* de la surface sphérique, *à une circonférence de grand cercle, sont un* MAXIMUM *et un* MINIMUM parmi tous les arcs de grand cercle que l'on peut mener du même point à la même circonférence (*voyez* le n° 422);

[On pourrait aussi démontrer la même proposition, ainsi que les suivantes, pour le cas plus général où la circonférence donnée est quelconque].

THÉOR. II. — *Les arcs obliques également éloignés de l'arc perpendiculaire à un grand cercle, sont égaux* (voyez le même *numéro*).

THÉOR. III. — *Les arcs obliques sont d'autant plus grands qu'ils sont plus éloignés du* PLUS PETIT *arc perpendiculaire* (même *numéro*).

THÉOR. IV. — *L'arc de grand cercle élevé perpendiculairement sur le milieu d'un arc, contient tous les points de la surface sphérique dont les distances à ses deux extrémités, comptées sur des arcs de grand cercle, sont égales entre elles* (voyez le n° 85).

Fig. 406. N° 536. On nomme CALOTTES SPHÉRIQUES [et quelquefois *zones à une base*], les deux *portions dans lesquelles la surface se trouve divisée par un plan* CDEF (fig. 406). — Le cercle CDEF est leur *base* commune. Le *sommet* d'une calotte ACDEF est le point A où elle est percée par l'axe du cercle CDEF qui lui sert de base ; et sa *hauteur* est la portion AP de cet axe, comprise entre son sommet et le centre P de la base.

On nomme SEGMENT SPHÉRIQUE, la *portion de sphère comprise entre une calotte sphérique et sa base*. — Le segment sphérique a même axe, même hauteur, et même sommet que la calotte correspondante.

On nomme ZONE SPHÉRIQUE, la *portion de surface sphérique comprise entre deux plans parallèles*, tels que CDEF, GIKL (fig. 406), ou la *différence de deux calottes à bases parallèles*. — Ces deux bases sont les *bases* de la zone. Une zone a même *axe* que les calottes dont elle est la différence; la portion de cet axe, comprise entre les deux bases, ou la distance de leurs plans, est la *hauteur* de la zone.

On nomme TRANCHE SPHÉRIQUE, la *portion de sphère comprise entre deux plans parallèles*, ou la *différence de deux segmens à bases parallèles*.—Une tranche sphérique a mêmes bases, même axe, et même hauteur que la zone correspondante.

On nomme SECTEUR SPHÉRIQUE, l'*espace compris entre une calotte* ACB (fig. 10) *et une surface conique* AOB *ayant pour sommet le centre* O *de la sphère et pour base celle de la calotte*.—Un secteur se compose ainsi d'un segment augmenté ou diminué d'un cône. Il se réduirait toutefois à un segment si la base de la calotte était un grand cercle.—On nomme *base* d'un secteur, la calotte qui lui correspond. Fig. 10.

On peut considérer une calotte ACB comme engendrée par la révolution d'un arc de cercle AC tournant autour d'un diamètre COD qui passe par l'une de ses extrémités, et la base de cette calotte comme engendrée par le sinus AI de cet arc.

De même, un secteur sphérique OACB peut être considéré comme engendré par un secteur circulaire OAC tournant autour d'un de ses côtés OC ; — *etc.*, *etc.*

On nomme FUSEAU SPHÉRIQUE, chacune des quatre portions de surface sphérique, comprise entre les plans de deux grands cercles ACBE, ADBF (fig. 406), qui se coupent, et *coin sphérique*, la portion de sphère correspondante ; on nomme *arète*, le diamètre d'intersection des deux plans ; ceux-ci sont les *faces* du coin ; leur angle dièdre est l'*angle dièdre correspondant* au fuseau ou au coin qu'ils comprennent ; et cet angle dièdre a pour mesure l'arc de grand cercle compris entre les deux faces, et décrit de l'une des extrémités de l'arète, considérée comme pôle. Le *fuseau* ou le *coin* est dit *rectangulaire* lorsque l'angle dièdre correspondant est droit, ou lorsque l'arc correspondant est un quadrant. — *Deux fuseaux ou deux coins sont égaux* [sur une même sphère] *lorsqu'ils correspondent à des angles dièdres égaux* ; et de plus, *ils sont proportionnels aux angles dièdres* (voyez le n° 447). Fig. 406.

Enfin, on appelle **Angle de deux arcs** *de cercle* qui se coupent, l'angle de leurs tangentes respectives, menées par leur point d'intersection. Quand il s'agit de deux arcs de grand
Fig. 406. cercle, tels que AC, AD (fig. 406) [ayant pour tangentes respectives MAN, RAS], cet angle, qui n'est autre chose que l'angle correspondant à l'angle dièdre de leurs plans (n° 445), se mesure par l'arc du grand cercle GI décrit du sommet de l'angle comme pôle, entre ses côtés, prolongés s'il est nécessaire.

Les angles adjacens sont supplémentaires ;
Les angles opposés sont égaux ; — etc., etc.

N° 537. Théorème II. Fig. 407.

Fig. 407. *Quatre points, A, B, C, D, non situés dans un même plan, déterminent une surface sphérique.*

D'abord, trois quelconques de ces points, A, B, C [lesquels, d'après l'hypothèse, ne sauraient se trouver sur une même droite], déterminent une circonférence qui peut être considérée comme appartenant à une infinité de surfaces sphériques différentes, ayant toutes leur centre sur l'axe PQ du cercle ABC.

Maintenant, supposons que l'on mène un plan par l'axe PQ et par le point D; et soit E l'un des points d'intersection de ce plan avec la circonférence ABC : il sera toujours possible de faire passer, par les deux points D, E, une circonférence qui aura son centre sur l'axe PQ (n° 102, 4°), en un point O. Or ce point, ainsi déterminé, sera également distant des quatre points A, B, C, D; et de plus, il sera le seul dans ce cas. Donc, parmi toutes les surfaces sphériques qui passent par les trois points A, B, C, il y en aura nécessairement une qui passera par le quatrième point D; et ce sera la seule ; *C. Q. F. D.*

Scolie 1er. — Quatre points situés dans un même plan ne détermineraient pas une sphère : en effet, si les quatre points sont sur une même circonférence, on peut y faire pas-

ser une infinité de surfaces sphériques différentes ; et s'ils ne sont pas sur une même circonférence, on n'en peut faire passer aucune.

SCOL. 2. — *Une surface sphérique est déterminée par une circonférence de petit cercle et un point extérieur au plan de cette circonférence,* — ou *par une circonférence de petit cercle et le centre de la sphère,* — ou *par une circonférence de grand cercle.*

SCOL. 3. — *Une même portion de surface sphérique ne saurait appartenir à deux sphères différentes.*

COROLLAIRE 1er. — *Deux calottes sphériques sont égales lorsqu'elles ont des bases égales et même hauteur :*

En effet, la hauteur de la calotte déterminant le pôle de sa base, détermine la surface (*scol.* 2).

Coroll. 2. — Deux calottes d'une même sphère sont égales lorsqu'elles ont des bases égales et sont de même espèce [plus grandes ou plus petites que l'*hémisphère* (n° 407)].

N° 538. THÉORÈME III.

Tout plan perpendiculaire à l'extrémité du rayon est tangent à la sphère ; — *et réciproquement.*

Mêmes démonstrations que pour le cercle (n° 89).

SCOLIE. — On appelle ordinairement *normale* à une surface courbe, toute perpendiculaire au plan tangent, menée par le point de tangence (*voyez* le n° 239) ; et *plan normal*, tout plan passant par une normale ; — l'intersection de la surface par un pareil plan se nomme d'ailleurs, une *section normale.*

De ces définitions, et de l'une des réciproques du théorème précédent, il résulte que

Toute normale à la sphère passe par son centre (voyez le n° 239).

COROLLAIRE 1er. — *Par un point donné sur la surface de la sphère, on ne peut mener qu'un seul plan tangent.*

COROLL. 2. — *Deux plans tangens menés aux extrémités d'un même diamètre, sont parallèles ;* — *et réciproquement.*

N° 539. THÉORÈME IV. Fig. 406.

Fig. 406. 1° *Les petits cercles également distans du centre sont égaux;*

2° *Les petits cercles sont d'autant plus petits qu'ils sont plus distans du centre.*

Et réciproquement.

Dans le triangle rectangle OPC, OC est le rayon de la sphère, PC est le rayon du petit cercle CDEF, OP est la distance du plan de ce cercle au centre de la sphère ; et l'on a :

$$OC^2 = OP^2 + PC^2.$$

On voit donc [comme cela a déjà lieu dans le cercle pour les cordes et leurs distances au centre (n° 90)], que, dans une même sphère ou dans des sphères égales,

1° Des valeurs égales de OP doivent donner des valeurs égales de PC;

Et — 2° Plus les valeurs de OP sont grandes, plus celles de PC sont petites.

Les *réciproques* de ces propositions sont évidentes (n° 51).

Scolie 1er.—On voit en même temps, que dans une même sphère ou dans des sphères égales,

1° Des cercles égaux entre eux servent de bases à des calottes égales;

2° Des cercles plus petits servent de bases à des calottes plus petites [tant que l'on considère seulement des calottes moindres que l'hémisphère];

Et *réciproquement :* — (voyez le n° 90, ainsi que les *réciproques* et les *scolies*.)

Scol. 2.—En considérant comme une *corde* de la sphère, le diamètre du petit cercle CDEF, on voit

1° Que—*Les cordes également distantes du centre sont égales;*

2° Que — *Les cordes sont d'autant plus petites qu'elles sont plus distantes du centre ;*

Et *réciproquement.*

Scol. 3. — Tandis que la distance d'un petit cercle au centre de la sphère varie entre *zéro* et le rayon de la sphère, le rayon du petit cercle varie entre le rayon de la sphère et *zéro*. A la première limite, on a un grand cercle ; à la seconde, le petit cercle se réduit à un point, et son plan prolongé, de *sécant* qu'il était, devient *tangent* à la sphère (n° 409).

N° 540. THÉORÈME V. Fig. 56.

La section mutuelle de deux sphères, O, O', est un cercle.

Soit M l'un des points de l'intersection commune des deux surfaces. Leurs intersections respectives par le plan OMO' seront deux grands cercles, OM, O'M, dont les circonférences se couperont au point M, et au point N symétrique de M (*voyez* les nos 94 *et* 95). Or, les deux sphères peuvent être considérées comme engendrées respectivement par la révolution de ces deux cercles autour de la droite OO' ; et dans cette révolution, les points M et N décrivent une même circonférence de cercle, dont les points sont les seuls communs aux deux surfaces, et qui, par conséquent, est leur ligne d'intersection. Fig. 56.

Scolie. — On peut démontrer pour les sphères sécantes, tangentes, *etc.*, des théorèmes analogues à ceux des *numéros* 93 — 98, *etc.*

N° 541. Un *polyèdre* est dit *inscrit* à une sphère lorsqu'il a tous ses sommets sur la surface de la sphère ; et alors la *sphère* est *circonscrite* au polyèdre.

Un tétraèdre quelconque est inscriptible à la sphère (voyez le n° 499, *théor.* I ; et le n° 537).

Réciproquement : — Un *polyèdre* est *circonscrit* à une sphère lorsque toutes ses faces sont tangentes à la sphère ; et alors la *sphère* est *inscrite* au polyèdre.

Un tétraèdre quelconque est circonscriptible à la sphère (n° 499, *théor.* III).

Dans la génération de la sphère par un demi-cercle tournant autour du diamètre qui lui sert de corde (n° 406), la tangente menée à l'extrémité de ce diamètre, engendre un plan tangent (n° 409). Toute autre tangente à ce demi-cercle engendre une *surface conique* ou une *surface cylindrique* (n° 404) [ce dernier cas n'a lieu que pour la tangente parallèle au diamètre] qui peut être dite *tangente* ou *circonscrite à la sphère*, puisque tous ses plans tangens sont aussi tangens à la sphère ; et il en est de même de tout système composé de portions de surfaces engendrées ainsi par des tangentes à la demi-circonférence génératrice.

Réciproquement : — Les cordes de la demi-circonférence génératrice engendrent des portions de *surfaces coniques* ou *cylindriques* qui peuvent être considérées comme *inscrites à la sphère ;* [tout petit cercle de la sphère est dans le même cas] ; et il en est de même encore de tout système composé de pareilles portions de surfaces.

Si, du centre d'un polyèdre régulier comme centre, et d'un rayon égal à son rayon, on décrit une sphère, la surface de cette sphère passera par tous les sommets du polyèdre, et n'aura pas d'autre point commun avec la surface du polyèdre : donc

Tout polyèdre regulier est inscriptible à la sphère.

Si, du centre d'un polyèdre régulier comme centre, et d'un rayon égal à son apothème, on décrit une sphère, la surface de cette sphère passera par les pieds de tous les apothèmes, et n'aura pas d'autre point commun avec la surface de ce polyèdre ; les faces de ce polyèdre seront donc tangentes à la sphère (n° 409) : ainsi

Tout polyèdre régulier est circonscriptible à la sphère.

N° 541. De même que le cercle peut être considéré comme la limite des polygones reguliers inscrits et circonscrits (n° 240), ou comme un polygone régulier d'un nombre infini de côtés infiniment petits, de même aussi

La sphère peut être considérée comme un polyèdre regulier d'une infinite de faces infiniment petites.

Pour prouver cette proposition, reprenons la relation, démontrée précédemment (n° 517),

$$S+F=A+2.$$

Quand on y suppose infinis, F, S, et A, elle se réduit à

$$F+S=A;$$

or, si l'on cherche à satisfaire à cette dernière égalité comme dans le *numéro* 521, on trouvera que cela peut se faire de *trois* manières :

1° En faisant $A=\frac{3}{2}F$, et $S=\frac{3}{6}F=\frac{1}{2}F$,

ce qui donne des *triangles* assemblés 6 à 6;

2° En faisant $A=\frac{4}{2}F=2F$, et $S=\frac{4}{4}F=F$,

ce qui donne des *carrés* assemblés 4 à 4;

Enfin 3° en faisant $A=\frac{6}{2}F=3F$, et $S=\frac{6}{3}F=2F$,

ce qui donne des *hexagones* assemblés 3 à 3.

On remarquera que ces trois sortes d'assemblages correspondent précisément aux trois manières dont on peut recouvrir un plan avec des polygones réguliers (n° 238). Cela provient de ce que l'*On peut considérer la surface plane comme une surface sphérique d'un rayon infiniment grand*, de la même manière que la ligne droite peut être considérée comme une circonférence de cercle d'un rayon infiniment grand (n° 97, *scol.* 3).

§ II. — *Des Triangles, des Polygones, et des Pyramides Sphériques.*

N° 543. On nomme Triangle Sphérique, une *portion* ABC (fig. 408) *de surface sphérique, comprise entre trois arcs de grand cercle qui se coupent.* Ces arcs se nomment les *côtés* du triangle sphérique; leurs extrémités en sont les *sommets*; et l'on nomme *angles* du triangle, les angles formés par ses côtés (*voyez* le n° 536). — Un triangle sphérique se désigne par les lettres de ses trois sommets. — Les côtés d'un triangle sphérique sont toujours censés moindres qu'une demi-circonférence. Fig. 408.

Supposons que, du centre O de la sphère, on mène à chacun des sommets, A, B, C, d'un triangle sphérique ABC, des rayons OA, OB, OC : on formera ainsi un *angle trièdre au centre*, dont

Fig. 408. les faces auront pour mesures respectives les côtés du triangle, et dont les angles dièdres seront les mêmes que les angles du triangle (n° 536). Il existe donc une analogie parfaite entre un angle trièdre et le triangle sphérique qu'il détermine sur la surface de toute sphère décrite de son sommet comme centre. De là vient que l'on peut déduire toutes les propriétés des triangles sphériques, de celles des angles trièdres : ce qui nous permettra de supprimer beaucoup de développemens, pour lesquels nous nous contenterons de renvoyer à la théorie des angles trièdres.

Trois grands cercles qui ne passent pas par un même diamètre, forment toujours *huit* triangles sphériques. Entre un quelconque de ces triangles et les *sept* autres, il existe les mêmes relations qu'entre un angle trièdre et les sept autres formés par les mêmes plans (n° 451). Il faut surtout distinguer les *triangles sphériques symétriques*, qui sont dans une situation opposée, et qui ont les *côtés égaux chacun à chacun mais inversement disposés*, et les *triangles sphériques conjugués* par un côté, dont la somme forme un fuseau correspondant à l'angle opposé à ce côté commun. — *Deux triangles sphériques symétriques ont les angles égaux*, etc., etc.

Il faut encore observer, relativement aux *quatre* couples de triangles sphériques symétriques résultant de l'intersection de la sphère par *trois* plans, que ces triangles ont leurs sommets homologues situés deux à deux aux extrémités d'un même diamètre. Par suite, les petits cercles circonscrits à ces deux triangles sont égaux et parallèles; et ils ont de plus, leurs pôles communs et situés également aux extrémités d'un même diamètre, lequel est à la fois intérieur ou extérieur aux deux angles trièdres qui correspondent aux triangles proposés, ou contenu à la fois dans deux faces opposées.

Fig. 409. N° 544. Soit un triangle sphérique ABC (fig. 409). Supposons que du point A comme pôle, on décrive un arc de grand cercle *bc*, du point B comme pôle un autre arc de grand cercle *ca*, et enfin du point C comme pôle un troisième arc de grand

cercle *ab*. On obtiendra ainsi deux triangles ABC, *abc*, tels que *les sommets de chacun seront les pôles respectifs des côtés de l'autre*. Fig. 409.

En effet, les arcs de grand cercle *a*B et *a*C, *b*C et *b*A, *c*A et *c*B, étant des quadrans, il s'ensuit d'abord que les points *a*, *b*, *c*, sont pôles respectifs des arcs BC, CA, AB.

Et de même, les arcs A*b* et A*c*, B*c* et B*a*, C*a* et C*b*, étant des quadrans, les points A, B, C, sont pôles des arcs *bc*, *ca*, *ab*.

En raison de cette propriété, les deux triangles sont dits des *triangles polaires l'un de l'autre*, ou simplement, des *triangles polaires*. — Il faut observer que le triangle *abc* se distingue des autres triangles formés par les *trois* mêmes cercles, en ce que les angles A et *a* sont situés du même côté de *bc*, B et *b* du même côté de *ca*, C et *c* du même côté de *ab*.

N° 545. **Théorème VI.** Fig. 409.

Tout angle A *d'un triangle sphérique* ABC *a pour mesure le supplément du côté* [*bc*] *qui lui est opposé dans le triangle polaire correspondant* [*abc*].

En effet, prolongeons les arcs AB et AC jusqu'aux points B', C', où ils rencontrent respectivement le côté *bc*; B'C' sera la mesure de l'angle A (n° 536) ; mais

$bB' + B'C' = 1$ *quadrant*, et $B'C' + C'c = 1$ *quadrant*;

donc $bc + B'C' = 2$ *quadrans* ;

—*Ce qui prouve la proposition.*

Scolie 1er.—On a ainsi, en nommant A, B, C, les angles du triangle proposé, *a*, *b*, *c*, les angles respectivement correspondans de son supplémentaire, et *q* le *quadrant* :

$A = 2q - bc$	$a = 2q - BC$
$B = 2q - ca$	$b = 2q - CA$
$C = 2q - ab$	$c = 2q - AB.$

Scol. 2. — Il existe donc entre deux triangles polaires, la même relation qu'entre deux angles trièdres supplémentaires :

Digitized by Google

et en effet, les angles trièdres au centre, qui correspondent à un couple de triangles polaires, ne sont autre chose que deux angles trièdres supplémentaires construits sur le même sommet (*voyez* le n° 453, *scol.*). C'est en raison de cette propriété, que les triangles polaires se nomment encore des *triangles supplémentaires;* et l'on peut, de même, remplacer le triangle *abc* par son symétrique opposé.

N° 546. THÉORÈME VII. Fig. 408.

Fig. 408. *Dans tout triangle sphérique* ABC, *un côté quelconque* AB *est* — 1° *plus petit que la somme des deux autres,* — et — 2° *plus grand que leur différence.*

En effet : — 1° des points A, B, C, menons au centre les rayons OA, OB, OC : les angles AOB, AOC, BOC, auront respectivement même mesure que les arcs AB, AC, BC;

or $AOB < AOC + BOC$ (n° 454) :

donc $AB < AC + BC$;

2° En supposant $AC > BC$, on a aussi

$$AB > AC - BC :$$

car $AB + BC > AC$.

Voyez les *corollaires* des *numéros* 80 *et* 454, en substituant des arcs de grand cercle aux lignes droites (n° 80), ou aux angles plans (n° 454).

N° 547. Pour compléter la théorie des triangles sphériques, il faudrait placer ici divers théorèmes analogues à ceux qui ont été démontrés dans la théorie des angles trièdres (n°s 456 *et suiv.*). — Tels sont les suivans dont nous ne donnerons que les énoncés, parce que la démonstration en est facile à suppléer.

THÉORÈME I. — *Dans tout triangle sphérique, la somme des trois côtés est moindre que la circonférence d'un grand cercle* (n° 456).

Théor. II. — *Dans tout triangle sphérique, la somme des angles est* > 2 droits *et* < 6 droits (n° 457).

Théor. III. — 1° *Lorsque deux côtés d'un triangle sphérique sont égaux, les angles opposés sont égaux ;*

2° *Lorsque deux côtés sont inégaux, au plus grand côté est opposé le plus grand angle ;*

Et *réciproquement :...* etc., etc. (*voyez* le n° 458).

Il résulte du théorème précédent, que

Un triangle sphérique équilatéral est aussi équiangle ; — et vice versâ :

Dans ce cas, le triangle est *régulier ;* — s'il n'avait que deux côtés et deux angles égaux, il serait *isocèle.*

Un triangle sphérique peut aussi avoir, comme l'angle trièdre qui lui correspond, *un*, *deux*, et même *trois* angles droits ; il est dit alors : *rectangle, birectangle*, ou *trirectangle* (n° 457, *scol.*).

Enfin, les propriétés du triangle sphérique conduisent à une proposition importante que nous allons démontrer.

N° 548. Théorème VIII. Fig. 410.

Entre deux points, A, B, *d'une surface sphérique* [non situés sur un même diamètre], *le plus court chemin* [en suivant la surface] *est le plus petit* AB *des deux arcs de grand cercle qui vont de l'un à l'autre.* Fig. 410.

Pour prouver cette proposition, nous pouvons d'abord établir les deux axiomes suivans :

1° Que — *Les plus courts chemins des divers points d'une circonférence quelconque à l'un de ses pôles, sont égaux pour tous ces points ;*

2° Que — *Si deux circonférences sont parallèles* [et ont par conséquent mêmes pôles], *le plus court chemin de l'un des pôles à la circonférence qui en est la plus éloignée, est plus grand que le plus court chemin de ce même pôle à la circonférence qui en est la plus rapprochée.*

Fig. 410. Cela posé, admettons que le plus court chemin de A en B passe par un point C extérieur à l'arc de grand cercle AB [lequel est supposé moindre qu'une demi-circonférence]; et menons les arcs de grand cercle AC et BC de manière à former un triangle sphérique ABC. Les arcs AC et BC seront nécessairement moindres que AB : car si, par exemple, AC était plus grand que AB, en décrivant du point A comme pôle, une circonférence de petit cercle passant par le point B, cette circonférence couperait AC en un point D situé entre A et C; puis, le plus court chemin de A en B serait égal au plus court chemin de A en D, conformément au *premier axiome,* et plus petit que le plus court chemin de A en C, conformément au *second ;* — *Ce qui est absurde d'après l'hypothèse.*

Les arcs AC et BC étant donc respectivement moindres que l'arc AB, du point A comme pôle décrivons un arc de petit cercle passant par le point C et coupant AB en E, et du point B comme pôle un autre arc de petit cercle passant par le même point C et coupant AB en F : le point F sera situé entre les points A et E, puisque $AB < AC + CB$ (n° 546).

Maintenant, le plus court chemin entre A et B en passant par E, est égal au plus court chemin entre A et E, plus le plus court chemin entre E et B; et le plus court chemin entre A et B en passant par C, est égal au plus court chemin entre A et C, plus le plus court chemin entre C et B. Mais le plus court chemin entre A et E est égal au plus court chemin entre A et C; et le plus court chemin entre E et B est moindre que le plus court chemin entre C et B, puisque ce dernier est égal au plus court chemin entre B et F : donc le plus court chemin *absolu* entre les points A et B [en suivant toutefois la surface] ne saurait passer par le point C.

Scolie. — Si les deux points A et B étaient les extrémités d'un même diamètre, on pourrait mener de l'un à l'autre une infinité d'arcs de grand cercle qui seraient des demi-circonférences : tous ces arcs seraient autant de plus courts chemins égaux entre eux.

Digitized by Google

N° 549. Il y aurait encore à établir, sur l'*égalité* des triangles sphériques, des théorèmes analogues à ceux qui ont été démontrés pour les triangles rectilignes (n°s 169 *et suiv.*) et pour les angles trièdres (n°s 460—463). Nous pensons qu'il suffira d'en donner les énoncés, et de renvoyer pour leur démonstration, aux endroits cités, en faisant seulement deux observations : la première, que deux triangles sphériques, et plus simplement, que deux arcs de grand cercle, ne peuvent jamais être égaux que sur la même sphère ou sur des sphères égales; et la seconde, que pour superposer deux arcs ou deux triangles, il faut toujours commencer par faire coïncider les sommets des angles plans ou des angles trièdres qui leur correspondent, et par conséquent les centres des sphères quand elles sont distinctes.

THÉORÈME I. — *Deux triangles sphériques sont égaux lorsqu'ils ont les côtés égaux chacun à chacun et semblablement disposés.*

THÉOR. II. — ***Deux triangles sphériques sont égaux lorsqu'ils ont les angles égaux chacun à chacun et semblablement disposés.***

THÉOR. III. — ***Deux triangles sphériques sont égaux lorsqu'ils ont un angle égal compris entre des côtés égaux chacun à chacun et semblablement disposés.***

THÉOR. IV. — ***Deux triangles sphériques sont égaux lorsqu'ils ont un côté égal adjacent à des angles égaux chacun à chacun et semblablement disposés.***

SCOLIE 1er. — *Lorsque la disposition est inverse* au lieu d'être la même, les autres hypothèses subsistant, *les triangles sphériques sont symétriques entre eux.*

SCOL. 2. — *Un triangle sphérique n'a qu'un seul symétrique* (n°s 460, *coroll.* 1er).

Deux triangles sphériques symétriques entre eux ne peuvent coïncider que quand ils sont isocèles, etc. — (*Voyez* les n°s 458, *théor.* 1; 464; *et* 476.)

[*Voyez* encore les *numéros* 464 *et* 476 pour le cas où deux triangles sphériques ont seulement deux côtés ou deux angles égaux chacun à chacun, pour celui de deux côtés égaux ainsi que l'angle opposé à l'un d'eux, et enfin pour celui de deux angles égaux ainsi que le côté opposé à l'un d'eux.]

N° 550. On nomme POLYGONE SPHÉRIQUE, une *portion de surface sphérique comprise entre plusieurs arcs de grand cercle* [toujours supposés moindres qu'une demi-circonférence]; à tout polygone sphérique correspond un *angle polyèdre au centre* (voyez le n° 543).—Nous ne nous arrêterons pas à la théorie des polygones sphériques, parce qu'on peut la calquer très aisément sur celle des angles polyèdres (*liv.* III; *chap.* III, § V); nous remarquerons seulement qu'*Un polygone sphérique peut toujours se décomposer en triangles sphériques* [lorsqu'il n'est pas lui-même un triangle], et que — *Le périmètre de tout polygone sphérique convexe est moindre que la circonférence d'un grand cercle* (voyez le n° 473).

Deux *polygones sphériques* sont dits *symétriques entre eux* lorsqu'ils sont composés de triangles sphériques symétriques chacun à chacun, et inversement disposés; ils ont alors les côtés et les angles égaux chacun à chacun et inversement disposés.

Enfin, on nomme PYRAMIDE SPHÉRIQUE, l'*espace compris entre un triangle, ou* généralement *un polygone sphérique, et l'angle trièdre ou polyèdre qui lui correspond.* Le triangle ou le polygone est la *base* de la pyramide. La pyramide est *triangulaire* quand sa base est un triangle;.... *etc.* —La théorie des pyramides sphériques est tout-à-fait analogue à celle des triangles et des polygones sphériques (voyez les n°s 543 *et suiv.*).

THÉORÈME à démontrer: — *Si l'on inscrit ou si l'on circonscrit un polyèdre régulier à une sphère, les plans menés par le centre et par les arêtes du polyèdre, décomposeront la sphère en pyramides sphériques régulières égales, et sa surface en polygones sphériques réguliers égaux.*

§ III. — *Problèmes sur la Sphère.*

N° 551. PROBLÈME I.

Étant donnés sur la surface d'une sphère, un point d'une circonférence, et son pôle, décrire la circonférence.

De même que dans un plan, en prenant le pôle donné pour centre (*voyez* d'ailleurs les n°s 420, *coroll.;* et 534).

Scolie. — Si la distance rectiligne des deux points donnés est égale à la corde du *quadrant* (n° 534), la circonférence décrite sera celle d'un grand cercle.

N° 552. PROBLÈME II.

Étant donnée une sphère, déterminer son rayon par une construction plane.

Construction. — 1° Avec une ouverture de compas arbitraire, décrivez un cercle sur la surface de la sphère (n° 551) ; et marquez sur sa circonférence trois points quelconques. — 2° Prenez avec le compas, les distances rectilignes de ces trois points combinés deux à deux ; et construisez sur un plan, un triangle qui ait ces trois distances pour côtés. — 3° Circonscrivez un cercle à ce triangle : ce cercle sera évidemment égal à celui que vous aurez tracé sur la sphère.

Cela posé, soit DA (fig. 229) le rayon de ce cercle, [rayon qui est nécessairement moindre que l'ouverture de compas qui a servi à tracer la circonférence]. Fig. 229.

4° Construisez un triangle rectangle ABD qui ait cette ouverture, égale à AB, pour hypoténuse, et dans lequel le rayon DA soit un côté de l'angle droit. — 5° Tracez une circonférence qui passe par les points A, B, et qui ait son centre sur la droite BD prolongée (n° 102, 4°).

La figure plane ainsi construite sera égale au grand cercle de la sphère.

N° 553. Problème III. Fig. 406.

Fig. 406. *Par deux points*, G, I, *donnés sur la surface d'une sphère, faire passer une circonférence de grand cercle.*

Construction.—Prenons une distance rectiligne égale à la corde du quadrant (n° 534). — 2° De cette distance comme rayon, et des points G, I, comme centres respectifs, décrivons d'un même côté, sur la surface de la sphère, deux [petits] arcs qui se couperont en un point A.

Ce point sera un pôle dont on pourra se servir pour décrire la circonférence cherchée (*voyez* le n° 551).

N° 554. Problème IV.

Par un point pris sur une circonférence quelconque [de grand ou de petit cercle] *tracée sur la sphère, élever une circonférence de grand cercle perpendiculaire à la première.*

Fig. 61. Supposons que dans la *figure* 61, le point O soit le point donné, et la ligne MN un arc de la circonférence donnée. En employant une méthode analogue à celle que l'on a suivie au *numéro* 99, on pourra opérer comme il suit :

Construction. — 1° Marquons sur MN, de part et d'autre du point O, et à des distances égales, deux points quelconques, A, B. — 2° Des points A et B comme pôles, et d'une même ouverture quelconque de compas [plus grande cependant que OA = OB], décrivons deux [petits] arcs de cercle qui se couperont en un point C. — 3° Menons une circonférence de grand cercle par les deux points O et C (n° 553).

C'est la circonférence demandée.

Scolie. — On peut employer cette construction quand on veut

Mener à un petit cercle, par un point donné sur sa circonférence, une circonférence de grand cercle tangente :

Pour cela, il faut mener une circonférence de grand cercle par le point donné et par le centre du cercle donné (n° 553); puis élever perpendiculairement à cette circonférence, par le point donné, une autre circonférence de grand cercle.

N° 555. PROBLÈME V.

D'un point pris sur la surface de la sphère, abaisser une circonférence de grand cercle perpendiculaire à une circonférence quelconque tracée sur cette surface.

Supposons encore que dans la *figure* 62, C étant le point donné, la ligne MN représente un arc de la circonférence donnée. — Cela posé (*voyez* le n° 100) : Fig. 62.

Construction. — 1° Du point C comme pôle, décrivons un arc de cercle qui coupe l'arc MN en deux points, A, B. — 2° Des points A et B comme pôles respectifs, et d'une même ouverture de compas suffisamment grande, décrivons deux arcs de cercle qui se coupent. — 3° Par l'un des points d'intersection, E, de ces arcs, et par le point C, menons une circonférence de grand cercle (n° 553).

Ce sera la circonférence cherchée.

Scolie 1[er]. — On obtiendrait une seconde construction en modifiant d'une manière convenable la seconde du *numéro* 100.

SCOL. 2. — On peut encore, par un moyen analogue,

Mener une circonférence de grand cercle qui partage en deux parties égales les différens arcs de cercle que l'on peut tracer sur la sphère par deux points donnés (voyez le n° 101).

N° 556. PROBLÈME VI.

Par trois points donnés sur une sphère, mener une circonférence de cercle.

On mène, par le problème précédent (n° 555, *scol.* 2), deux circonférences de grand cercle dont tous les points soient,

pour chacune, également distans des points donnés pris deux à deux. Ces deux circonférences se coupent en deux points qui sont les pôles du cercle cherché (*voyez* le n° 534).

SCOLIE. — On peut encore, par le même moyen,

Trouver les pôles d'un cercle donné.

N° 557. PROBLÈME VII.

Mener à un petit cercle, par un point quelconque situé hors de sa circonférence, mais sur la surface de la sphère, *une circonférence de grand cercle tangente.*

Fig. 66. En supposant que, dans la *figure* 66, OA soit le cercle donné [O étant le pôle], et T le point donné, suivons l'opération du *numéro* 106 :

Construction. — 1° Du point T comme pôle, et d'une ouverture de compas égale à TO, décrivons un arc de cercle. — 2° Du point O comme pôle, et d'une ouverture de compas égale à la corde du double de l'arc de grand cercle mené du point O à un point quelconque de la circonférence OA, décrivons un petit arc qui coupe le premier en un point P. — 3° Menons l'arc de grand cercle OP coupant la circonférence donnée en un point A (n° 553), — 4° Menons la circonférence de grand cercle TA.

Ce sera la circonférence demandée.

N° 558. REMARQUES *sur les problèmes de géométrie sphérique.* — Les problèmes précédens sont les principaux et en même temps les plus simples que l'on puisse avoir à résoudre par rapport à la surface et aux cercles de la sphère, c'est-à-dire sur le *paragraphe premier* de ce chapitre. Il en est cependant un grand nombre d'autres que nous aurions pu nous proposer, particulièrement des problèmes relatifs aux contacts, tel, par exemple, que le suivant :

Tracer une circonférence de grand cercle tangente à deux petits cercles donnés (voyez le n° 159) ;

Etc., etc.

Nous ne nous occuperons point des problèmes de ce genre, pour lesquels nous nous contenterons de renvoyer aux *Annales de Mathématiques*, ainsi qu'à un *Mémoire* de M. *Alph.* HEEGMANN, inséré dans le *Recueil de la Société royale de Lille* (année 1825).

Relativement au *paragraphe deuxième*, nous pourrions également nous proposer, sur les triangles sphériques, des problèmes analogues à ceux que nous avons résolus dans le *premier Livre* (*chap.* IV, § IV) sur les triangles rectilignes. La résolution de cette sorte de problèmes peut s'effectuer de deux manières, soit directement, au moyen de ceux qui viennent d'être traités

Digitized by Google

(nos 551-557; *voyez* aussi le n° 549), soit indirectement, par les angles trièdres correspondans, à la construction desquels la question peut toujours être ramenée (nos 543; et 467—472). Nous ne pouvons qu'indiquer ces exercices; et nous allons terminer ce *troisième Livre* par quelques observations fort importantes, dont nous sommes redevable au savant rédacteur des *Annales de Mathématiques*.

N° 559. « Nous avons vu (nos 534 *et* 554) que l'hypoténuse du triangle » isocèle rectangle dont les deux côtés de l'angle droit sont égaux au rayon » d'une sphère, ou ce qui est la même chose, la *corde du quadrant* » (n° 534), est l'ouverture de compas qu'il faut employer pour décrire » des grands cercles sur cette surface. Quand on a plusieurs arcs de grand cercle » à décrire sur une même sphère, on peut y employer un *compas à ouverture* » *fixe* égale à cette hypoténuse; et comme, sur la sphère, les arcs de grand » cercle jouent le même rôle que joue la ligne droite sur un plan, M. Gergonne appelle un pareil compas, le *compas-règle*. Un autre compas, à » ouverture variable, servira à décrire des arcs de petits cercles de toutes » grandeurs » : — [seulement, il sera bon de donner à ses branches une disposition qui permette d'incliner les pointes l'une sur l'autre sous un angle quelconque, en les fixant, pour chaque circonférence que l'on voudra décrire, à une distance déterminée. Le compas ordinaire, ainsi légèrement modifié, pourrait se nommer un *compas sphérique*].

» Nous venons de dire que l'arc de grand cercle jouait sur la sphère, le » même rôle que joue la ligne droite sur le plan, mais en ce sens seulement » que par deux points donnés sur une sphère, on peut toujours mener un » arc de grand cercle, et *un seul*, qui mesure leur plus courte distance. Il » y a d'ailleurs entre l'un et l'autre une différence notable : car, tandis que » deux droites ne peuvent se couper qu'en un point unique, deux grands » cercles se coupent toujours en deux points; et tandis que deux droites » peuvent être tellement situées sur un plan, qu'elles ne puissent pas se rencontrer, deux grands cercles sur une sphère se rencontrent toujours. Il » n'existe donc pas de parallèles sur la sphère, ni conséquemment de triangles semblables. Il n'y a de parallèles ni de triangles semblables, que sur deux » sphères concentriques.

» Il suit de là, que tout théorème de géométrie plane qui ne peut être démontré, que tout problème qui ne peut être résolu, qu'en vertu de la » théorie des parallèles ou d'autres théories qui reposent *nécessairement* » sur celle-là, n'a point d'analogue sur la sphère; et tels sont, par exemple, » les théorèmes relatifs à la mesure des angles par le cercle, et les problèmes » qui s'y rapportent.

» Mais comme, dans tous les cas où deux triangles rectilignes sont égaux, » deux triangles sphériques le sont aussi, il s'ensuit que tout théorème ou » problème de géométrie plane, qui peut être démontré ou résolu par la » seule considération de l'égalité des triangles, peut être transporté sur la

» sphère par la simple substitution des arcs de grand cercle, aux lignes » droites, ou du compas à ouverture fixe, à la règle, et en remplaçant les » centres des cercles, par leurs pôles.

» Nous avons employé tout-à-l'heure le mot *nécessairement*, et voici » pourquoi. On peut, dans la démonstration d'un théorème ou dans la réso- » lution d'un problème, employer la théorie des parallèles ou les théories » qui en dépendent, sans que cela soit nécessaire, et uniquement par *élé-* » *gance;* et alors le théorème ou le problème pourra avoir son analogue » sur la sphère : la démonstration ou la construction devra seulement en être » convenablement modifiée. Par exemple, la *deuxième construction* que » nous avons donnée (n° 157, *scol.* 3) de la tangente au cercle par un point » extérieur, repose sur la théorie des angles inscrits, et cette construction » ne saurait être transportée sur la sphère; mais la *première construction* » du même problème (n° 106) ne dépend aucunement de la théorie des » parallèles, et c'est celle-là que nous avons imitée (n° 557) pour mener par » un point donné sur la sphère, un grand cercle qui touche un petit cercle » donné.

» Il y a aussi certains problèmes de géométrie plane qu'on ne peut résoudre » sans employer la théorie des parallèles, et que pourtant on peut se pro- » poser de résoudre sur la sphère; mais alors leur construction sur la sphère » n'a aucun rapport avec leur construction sur un plan. Nous citerons pour » exemple, le problème où l'on propose de — *Décrire un grand cercle qui* » *touche à la fois deux petits cercles donnés* (n° 558). »

FIN DU LIVRE TROISIÈME.

LIVRE QUATRIÈME.

DE L'ÉTENDUE CONSIDÉRÉE DANS L'ESPACE.

CHAPITRE PREMIER.

DE LA SIMILITUDE.

N° 560. Ayant fixé dans le *Livre deuxième* (n° 251 *et suiv.*) les caractères généraux de la similitude, nous n'avons plus maintenant qu'à appliquer aux figures considérées dans l'espace, les principes établis en cet endroit.

Ainsi, les propriétés de toutes les figures dans l'espace dépendant de celles du tétraèdre, de la même manière que les propriétés des figures planes dépendent de celles du triangle, c'est la définition des tétraèdres semblables qui servira de base à la théorie des figures semblables dans l'espace.

Or, un tétraèdre étant déterminé par ses six arètes (n° 496, *scol.*), il s'ensuit que

Deux tétraèdres, SABC, S'A'B'C' (fig. 411), *sont semblables lorsqu'ils ont les arètes correspondantes proportionnelles :* c'est-à-dire lorsqu'on a, entre ces arètes [considérées dans un ordre convenable qui doit être le même pour les deux tétraèdres], les proportions Fig. 411.

$$\frac{SA}{S'A'}=\frac{SB}{S'B'}=\frac{SC}{S'C'}=\frac{AB}{A'B'}=\frac{CA}{C'A'}=\frac{BC}{B'C'}.$$

De cette définition il résulte d'abord, que

Deux tétraèdres semblables ont les faces semblables chacune à chacune, les angles trièdres et les angles dièdres égaux, chacun à chacun.

Si les *arètes* sont *proportionnelles et inversement disposées* (n° 495,
Fig. 412. fig. 412), alors les deux *tétraèdres* sont *inversement semblables*. — Deux tétraèdres inversement semblables jouissent de toutes les propriétés que l'on vient de reconnaître aux tétraèdres semblables, excepté que les faces sont inversement semblables, et que les angles trièdres homologues sont symétriques au lieu d'être égaux.

Il en résulte encore les conséquences suivantes :

Deux tétraèdres sont semblables [ou inversement semblables] *lorsqu'ils ont trois faces semblables chacune à chacune et semblablement* [ou inversement] *disposées ;*

Deux tétraèdres semblables [ou inversement semblables] *à un troisième, sont* [directement] *semblables entre eux ;*

Deux tétraèdres semblables sont égaux lorsqu'ils ont une arète homologue égale ;

Deux tétraèdres inversement semblables sont réciproquement semblables à leurs symétriques ;

Et enfin : — *Deux tétraèdres inversement semblables sont symétriques lorsqu'ils ont une arète homologue égale.*

N° 561. Maintenant, un *polyèdre* d'un nombre quelconque de faces étant déterminé par un assemblage de tétraèdres qui le composent, il s'ensuit que

Deux polyèdres sont semblables lorsqu'ils peuvent se décomposer en un même nombre de tétraèdres semblables chacun à chacun et semblablement disposés ;

Et que — *Deux polyèdres sont inversement semblables, lorsqu'ils peuvent se décomposer en un même nombre de tétraèdres inversement semblables chacun à chacun et inversement disposés.*

Ensuite, ces définitions étant admises, il en résulte les conséquences suivantes :

Deux polyèdres semblables [ou inversement semblables] *à un troisième sont* [directement] *semblables entre eux ;*

Deux polyèdres semblables sont égaux lorsqu'ils ont une arète homologue égale ;

Deux polyèdres inversement semblables sont réciproquement semblables à leurs symétriques ;

Et enfin — *Deux polyèdres inversement semblables sont symétriques lorsqu'ils ont une arète homologue égale.*

N° 562. On nomme *points homologues*, dans deux figures semblables [directement ou inversement] :

1° Les points homologues de leurs faces (n° 254),

2° Les points qui sont liés aux faces homologues par des tétraèdres (n° 560) semblables et semblablement disposés.

On nomme *lignes homologues*, les lignes que déterminent *deux* couples de points homologues chacun à chacun.

On nomme *sections homologues*, les polygones résultant de l'intersection de deux polyèdres semblables, par deux plans que déterminent *trois* couples de points homologues chacun à chacun [ou des lignes homologues].

N° 563. Théorème I. Fig. 413 *et* 414.

Tout plan A'B'C' *parallèle à l'une des faces* ABC *d'un tétraèdre* SABC [pourvu qu'il ne passe pas par le sommet opposé S], *détermine, conjointement avec les trois autres faces, un tétraèdre semblable* (fig. 413) [ou inversement semblable (fig. 414)] *au premier* [suivant que les deux plans parallèles sont du même côté du sommet, ou que le sommet est entre les deux plans parallèles]. Fig. 413 et 414.

En effet, les droites A'B', B'C', C'A', étant respectivement parallèles aux droites AB, BC, CA (n° 394), il en résulte

$$\frac{SA}{SA'}=\frac{SB}{SB'}=\frac{SC}{SC'}=\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{B'C'}=\frac{CA}{C'A'};$$

C. Q. F. D.

COROLLAIRE 1er. — *Tout plan parallèle à la base d'une pyramide, détermine une seconde pyramide semblable* [ou inversement semblable] *à la première.* — [*De même pour le cône.*]

Fig. 413 et 414. COROLL. 2. — *Les arètes homologues*, SA, SA', *de deux tétraèdres semblables*, SABC, SA'B'C', [*ou de deux pyramides semblables*], *sont également inclinées sur les faces homologues*, ABC, A'B'C'.

Ce corollaire, qui résulte de ce que les tétraèdres ou les pyramides semblables peuvent être placés de manière à avoir le même sommet, les bases parallèles, et les arètes latérales ainsi que les hauteurs (*voyez* les nos 500 *et* 432), deux à deux dans la même direction, peut d'ailleurs se démontrer directement. Pour cela, il suffit de joindre deux sommets homologues, A, A', aux pieds, O, O', de deux perpendiculaires homologues SO, SO' : car alors les triangles rectangles ainsi formés, SAO, SA'O', sont évidemment semblables comme ayant un angle aigu égal en S. — [*Voyez* d'ailleurs le n° 464.]

De là résulte de plus une démonstration directe de cette proposition, que — *Les hauteurs des tétraèdres* [*ou des pyramides*] *semblables*, hauteurs qui en sont d'ailleurs des lignes homologues, *sont proportionnelles aux arètes homologues.*

Il en serait *de même* pour les *prismes semblables.*

N° 564. THÉORÈME II. Fig. 415.

Fig. 415. *Deux tétraèdres*, SABC, S'A'B'C', *sont semblables lorsqu'ils ont deux faces semblables chacune à chacune*, SAB et S'A'B', SAC et S'A'C', *semblablement disposées, et comprenant un angle dièdre égal.*

En effet, de l'énoncé on tire :

$$\frac{SA}{S'A'} = \frac{SB}{S'B'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{SC}{S'C'} = \frac{AC}{A'C'};$$

et $\quad$ *dièdre* SA = *dièdre* S'A'.

Cela posé, prenons sur l'arète SA, supposée plus grande que S'A', une longueur SA'' égale à S'A'; et par le point A''

menons un plan A"B"C" parallèle à ABC ; le tétraèdre SA"B"C" Fig. 415.
ainsi formé sera semblable au tétraèdre SABC (n° 563) ; et il en résultera

$$\frac{SA}{SA''}=\frac{SB}{SB''}=\frac{AB}{A''B''}=\frac{SC}{SC''}=\frac{AC}{A''C''}.$$

Comparant cette suite de rapports avec la précédente, et remarquant que SA" = S'A', nous en conclurons :

$$SB''=S'B' \mid A''B''=A'C' \mid SC''=S'C' \mid A''C''=A'C'.$$

Donc les triangles SA"B" et S'A'B', SA"C" et S'A'C', sont égaux (n° 169) ; donc les deux tétraèdres SA"B"C" et S'A'B'C' sont égaux (n° 497) : *donc, etc.*

N° 565. Théorème III. Fig. 415.

Deux tétraèdres sont semblables lorsqu'ils ont une face semblable, SAB et S'A'B', *et les angles dièdres adjacens égaux chacun à chacun et semblablement disposés.*

En effet, de l'énoncé on tire :

$$\frac{SA}{S'A'}=\frac{SB}{S'B'}=\frac{AB}{A'B'};$$

dièd. SA=*dièd.* S'A' | *dièd.* SB=*dièd.* S'B' | *dièd.* AB=*dièd.* A'B'.

Cela posé, prenons encore SA" = S'A', et menons le plan A"B"C" parallèlement à ABC : les deux tétraèdres SABC et SA"B"C" seront semblables ; et il en résultera

$$\frac{SA}{SA''}=\frac{SB}{SB''}=\frac{AB}{A''B''}, \quad \text{et} \quad \textit{dièdre } AB=\textit{dièdre } A''B'';$$

d'où SB"=S'B' | A"B"=A'B', et *dièdre* A"B"=*dièdre* A'B'.

Donc les deux tétraèdres SA"B"C" et S'A'B'C' seront égaux (n° 498) : *donc, etc.*

N° 566. THÉORÈME IV.

Deux tétraèdres sont semblables lorsqu'ils ont les angles dièdres égaux chacun à chacun et semblablement disposés.

En effet, les angles plans de leurs faces sont tous égaux chacun à chacun (n° 461) ; donc toutes ces faces sont semblables (n° 262) : *donc, etc.* (n° 560).

Scolie. — Ce théorème contient une condition de trop : parce que, trois faces étant assemblées, deux angles dièdres suffisent pour déterminer la direction de la quatrième.

Fig. 416. *Scolie sur ces trois théorèmes.* — Si la disposition est inverse (fig. 416), les tétraèdres, au lieu d'être semblables, sont inversement semblables.

En effet, si l'on construit un troisième tétraèdre, symétrique de l'un des proposés, il sera semblable au second : *donc, etc.* (n° 560).

N° 567. THÉORÈME V.

Deux polyèdres semblables ont — 1° les faces homologues semblables ; — 2° et 3° : *les angles dièdres et les angles polyèdres homologues égaux, chacun à chacun ; — et — 4° les inclinaisons égales.*

En effet : — 1° Les faces homologues des deux polyèdres semblables sont, ou des triangles semblables, faces homologues de tétraèdres semblables, ou des assemblages de triangles semblables et disposés de la même manière ; — et par suite, — *Les arètes homologues sont proportionnelles, et les angles plans égaux* chacun à chacun.

2° Les angles dièdres homologues des deux polyèdres, sont, ou des angles dièdres homologues de tétraèdres semblables chacun à chacun, ou des sommes d'angles dièdres homologues : ils sont par conséquent égaux ;

3° Les angles polyèdres homologues sont aussi des assemblages d'angles trièdres égaux chacun à chacun et disposés de la même manière ;

4° Enfin, les inclinaisons des arêtes homologues sur les faces homologues sont égales chacune à chacune à cause de l'égalité des angles polyèdres homologues (*voyez* le n° 476).

Scolie 1er. — On peut ajouter à la démonstration précédente, que si plusieurs faces des tétraèdres qui composent le premier polyèdre, sont dans un même plan, les faces homologues des tétraèdres qui composent le second polyèdre, sont aussi dans un même plan.

En effet, lorsque deux triangles se réunissent suivant une même diagonale dans l'une des faces de l'un des deux polyèdres, c'est que les angles dièdres [des tétraèdres], qui ont cette diagonale pour arête commune, forment en somme deux angles dièdres droits. Et alors, d'après les hypothèses, la même chose a nécessairement lieu dans le second polyèdre.

Scol. 2. — Les mêmes conséquences ont également lieu pour deux polyèdres inversement semblables, à cela près que les faces homologues sont alors inversement semblables, et que les angles polyèdres sont symétriques au lieu d'être égaux; — *etc.*

N° 568. Théorème VI.

Réciproquement : — *Deux polyèdres sont semblables lorsqu'ils ont toutes leurs faces semblables chacune à chacune, semblablement disposées, et comprenant des angles dièdres égaux.*

En effet, de l'un des sommets, S (fig. 400), pris sur l'un des polyèdres, menons toutes les diagonales possibles; puis, par ces diagonales prises deux à deux, des plans convenables. Le polyèdre se trouvera ainsi décomposé (n° 512) en tétraèdres ayant tous pour sommet commun le point S, et pour bases les triangles dans lesquels se décomposent les faces des polyèdres [à l'exception de celles qui se réunissent au point S]. Fig. 400.

Cette décomposition faite, opérons une décomposition toute pareille dans le second polyèdre, en menant des diagonales par le sommet homologue de S, et des plans convenables par ces diagonales. Le second polyèdre se trouvera



Fig. 400. ainsi décomposé en autant de tétraèdres que le premier, et disposés de la même manière, chacun à chacun.

Cela posé, les triangles qui servent de base de part et d'autre aux divers couples de tétraèdres, seront semblables chacun à chacun en vertu de l'hypothèse, aussi bien que les couples de triangles latéraux qui se réunissent en S et en S'.

Alors, si l'on considère, par exemple, le tétraèdre qui a pour arête AB dans la première figure, et le tétraèdre correspondant qui a pour arête A'B' dans la seconde figure, ces deux tétraèdres seront d'abord semblables, comme ayant, par suite de l'hypothèse, deux faces semblables chacune à chacune, semblablement disposées, et comprenant un angle dièdre égal (n° 564). De plus, les deux tétraèdres auront toutes leurs autres faces semblables, et les autres angles dièdres égaux chacun à chacun. Si l'on supprime de part et d'autre dans les deux polyèdres, ces deux premiers tétraèdres, les deux polyèdres restans auront encore, comme les deux primitifs, toutes leurs faces semblables, semblablement disposées, et comprenant des angles dièdres égaux, chacun à chacun.

Supprimons de part et d'autre, dans les deux polyèdres restans, deux nouveaux tétraèdres correspondans, et semblables pour des raisons toutes pareilles aux précédentes : les deux nouveaux polyèdres résultans seront encore dans le même cas que les proposés.

Et ainsi de suite (*voyez* le n° 267).

Donc les deux polyèdres sont semblables (n° 561).

SCOLIE 1er. — L'ordre de la décomposition étant arbitraire, il s'ensuit que

Dans deux polyèdres semblables, les diagonales homologues sont proportionnelles ;

Et que par conséquent, si on lie quatre à quatre par des droites, de toutes les manières possibles, les sommets de chacun des deux polyèdres, on formera deux séries de tétraèdres homologues, semblables chacun à chacun.

Plus généralement : — *Les lignes homologues de deux polyèdres semblables sont proportionnelles ;— leurs sections homologues sont des polygones semblables ;* — etc., etc.

Et enfin, les polyèdres qui satisfont aux conditions strictement nécessaires de la similitude, ou à sa *définition géométrique* (n° 561), sont semblables dans toute l'étendue du sens vulgaire de ce mot (*voyez* le n° 268).

Scol. 2. — Si les faces étaient inversement semblables et la disposition inverse, les deux polyèdres seraient aussi inversement semblables.

N° 569. REMARQUE *sur le nombre des conditions nécessaires à la similitude des figures dans l'espace.*

Lorsque le polyèdre est d'une espèce donnée, les conditions de similitude établies dans ce qui précède, se réduisent nécessairement (n° 514), à un nombre d'autant moindre que celui des lignes qu'exige la détermination de ce polyèdre, est moins considérable. Ainsi, par exemple, en ayant égard au nombre des données nécessaires pour déterminer un prisme (n° 477) ou une pyramide (n° 500), on voit que

Deux prismes, ou *deux pyramides, sont semblables lorsqu'ils ont la base et une face semblables chacune à chacune, disposées de la même manière, et comprenant le même angle dièdre,* —ou *lorsqu'ils ont un angle trièdre compris entre trois* [de leurs] *faces semblables chacune à chacune et semblablement disposées ;* — ou, etc.

Si la disposition est inverse, les prismes ou les pyramides sont inversement semblables.

Lorsqu'il s'agit de — *Deux prismes réguliers,* ou de *deux pyramides régulières,* alors, les deux figures proposées *sont semblables si elles ont* seulement *la base et une face, semblables* chacune à chacune : — ces deux conditions sont suffisantes.

De plus, les centres de leurs bases sont des points homologues ; les rayons et les apothèmes des mêmes bases, ainsi que les apothèmes des faces latérales s'il s'agit de pyramides, sont des lignes homologues.

Deux parallélépipèdes sont semblables [ou inversement semblables] *lorsqu'ils ont un angle trièdre formé par des arètes proportionnelles, semblablement* [ou inversement] *disposées, et comprenant des angles plans égaux, chacun à chacun.*

Tous les cubes sont semblables.

En général, deux polyèdres *convexes* sont semblables [ou inversement semblables], lorsque leurs faces sont semblables chacune à chacune et disposées semblablement [ou inversement] (*voyez* le n° 513).

Et par conséquent, la *réciproque* du *numéro* 568 contient trop de conditions.

Deux polyèdres réguliers de même espèce sont nécessairement *semblables;*

Leurs centres sont des points homologues; leurs rayons et leurs apothèmes (n° 527, *scol.* 2) sont des lignes homologues; leurs plans de symétrie sont des sections homologues; ... *etc.*

On détermine par les mêmes principes, les conditions de similitude des figures limitées par des surfaces courbes.

Ainsi, par exemple, les cylindres et les cônes circulaires droits étant déterminés par leur base et leur hauteur, il s'ensuit que

Deux cylindres circulaires droits sont semblables lorsque leurs axes sont proportionnels aux rayons de leurs bases, — ou *lorsqu'ils sont engendrés par des rectangles semblables tournant autour de deux côtés homologues,* — etc.;

Et que—*Deux cônes circulaires droits sont semblables lorsque leurs axes sont proportionnels aux rayons de leurs bases,*— ou *lorsqu'ils sont engendrés par des triangles rectangles semblables tournant autour de deux côtés homologues,* — ou bien encore *lorsque leurs angles au centre sont égaux,*—etc., etc.; —*leurs arètes sont alors proportionnelles à ces mêmes rayons.*

Les hauteurs des cônes semblables et *des cylindres semblables, sont proportionnelles aux rayons des bases* (voyez le n° 563, *coroll.* 2).

Il faut une condition de plus pour la similitude de deux troncs de cône, parce qu'il s'y trouve une ligne arbitraire de plus : ainsi

Deux troncs de cônes circulaires droits sont semblables lorsque les rayons de leurs bases et leurs axes [*et* par suite *leurs arètes*] *sont proportionnels*, ou, ce qui revient au même, *lorsqu'ils sont engendrés* (n° 510) *par des trapèzes semblables.*

Une sphère étant déterminée par son rayon *seul,*

Toutes les sphères sont semblables.

Sur une même sphère, deux portions de surface ne peuvent être semblables à moins d'être égales; — mais sur des sphères différentes,

Deux fuseaux ou *deux coins sont semblables lorsqu'ils correspondent à des arcs égaux* [ou à des angles dièdres égaux];

Deux triangles sphériques sont semblables lorsque leurs côtés sont proportionnels entre eux et aux rayons, et disposés de la même manière,— ou, ce qui est la même chose,— *lorsqu'ils correspondent à des angles trièdres au centre, égaux entre eux;*

Si la disposition était inverse, ou si les angles trièdres étaient symétriques, les triangles seraient *inversement semblables.*

Deux *calottes* sont *semblables* lorsqu'elles sont engendrées par la révolution de deux arcs semblables tournant chacun autour d'un rayon qui aboutit à l'une de ses extrémités, ou cequi est la même chose, lorsque leurs hauteurs, les rayons de leurs bases, ceux des sphères, et enfin les arcs générateurs, sont tous, deux à deux, dans un même rapport;

Deux *zones* sont *semblables* quand elles sont les différences de calottes semblables chacune à chacune, parce que cette condition suffit pour que leurs lignes homologues soient proportionnelles;

Deux *secteurs* sont *semblables* lorsqu'ils ont pour bases des calottes semblables; — [les *segmens* sont *semblables* dans les mêmes circonstances];

Enfin, deux *tranches* sont *semblables* quand elles correspondent à des calottes et à des zones semblables.

N° 570. *Autre* Remarque.— On pourrait démontrer, sur la similitude des polyèdres, beaucoup d'autres propositions : par exemple, on pourrait établir des propositions analogues à celles des *numéros* 270 et 271, relatives aux *centres de similitude* internes et externes ; nous ne nous y arrêterons pas, et nous terminerons cette théorie en proposant comme exercices la démonstration des théorèmes suivans :

Théorème i. — *Dans deux prismes semblables* [ou inversement semblables], *les sections perpendiculaires aux arêtes latérales sont des polygones semblables* [ou inversement semblables].

Théor. ii.— *Deux pyramides sont semblables* [ou inversement semblables] *lorsqu'elles ont les arêtes parallèles chacune à chacune.*

Théor. iii.— *Deux polyèdres réguliers de même espèce* [ou de même nom] *sont semblables, et peuvent se décomposer en un même nombre de pyramides régulières* [intégrantes (n° 527, *scol.* 1er)] *semblables.*

CHAPITRE II.

DES AIRES.

---

§ Ier. — *Mesure des Surfaces des Polyèdres, du Cylindre, et du Cône.*

N° 571. L'aire (nos 2 *et* 339) de la surface d'un polyèdre étant égale à la somme des aires des diverses faces qui le terminent, il sera toujours aisé de la calculer, ainsi que celle des figures dont les surfaces sont développables. Nous n'aurons, sur ce sujet, que quelques observations à faire et quelques propositions à démontrer.

Il est facile de reconnaître tout d'abord,

Que — *Les aires des surfaces des polyèdres symétriques* [et par suite *des figures symétriques* quelconques] *sont équivalentes ;*

Que — *Les aires des surfaces des polyèdres* [ou des *figures*] *semblables, sont proportionnelles aux carrés de leurs arêtes* [ou *de leurs lignes*] *homologues*, puisque ce rapport est celui des faces homologues prises partiellement ;

Que — *Les aires des sections homologues sont dans ce même rapport ;*

Etc., etc.

N° 572. Théorème I. — (*)

L'aire de la surface latérale d'un prisme droit est

(*) Dans les énoncés des théorèmes relatifs aux mesures d'aires et de volumes, qui doivent terminer l'ouvrage, nous rappelons aux élèves qu'ils peuvent ne s'astreindre à retenir de mémoire, que les mots écrits en italique. Ainsi pour le suivant : — *L'aire de la surface latérale d'un prisme droit a pour mesure, le produit.... etc.*

équivalente à celle d'un rectangle qui aurait pour base le périmètre [rectifié] de la base du prisme, et pour hauteur une arète ; — et par conséquent elle *a pour mesure* [en prenant pour unité d'aire celle du carré qui a pour côté l'unité de longueur (n° 339)], *le produit du périmètre de sa base par une arète.*

En effet, cette surface n'est autre chose qu'une série de rectangles adjacens deux à deux, ayant une arète pour hauteur commune, et dont la somme des bases compose le périmètre de la base du prisme.

COROLLAIRE 1er. — *L'aire de la surface totale d'un prisme régulier* [les bases comprises] *a pour mesure le produit du périmètre de sa base par la somme faite d'une arète et de l'apothème de cette base.*

COROLL. 2. — Le cylindre devant être assimilé aux prismes, les propositions précédentes lui sont applicables. — Ainsi

L'aire de la surface latérale d'un cylindre droit est équivalente à celle d'un rectangle qui aurait pour base, la circonférence [rectifiée] *de la base du cylindre et son arète pour hauteur ;*

Par conséquent — *elle a pour mesure le produit de la circonférence de sa base par une arète.*

Ces propositions résultent d'ailleurs de ce que l'on a vu précédemment (n° 492) sur le développement de la surface latérale du cylindre.

COROLL. 3. — *L'aire de la surface totale d'un cylindre circulaire droit a pour mesure, le produit de la circonférence de sa base, multipliée par la somme faite de son arète et du rayon de cette base.*

SCOLIE. — *L'aire de chaque base d'un cylindre circulaire droit est à celle de sa surface latérale, comme le rayon de cette base est au double de l'arète du cylindre.*

N° 573. Théorème II. Fig. 417.

L'aire de la surface latérale d'un prisme oblique ABCDEA'B'C'D'E' *est équivalente à celle d'un prisme droit qui aurait pour base une section* MNPQR *perpendiculaire aux arêtes du prisme oblique, et les arêtes de même longueur que les premières.* Fig. 417.

En effet, prolongeons indéfiniment dans un même sens, les arêtes latérales, AA', BB', CC', DD', EE'; coupons les prolongemens par un plan perpendiculaire MNPQR qui ne passe pas dans l'intérieur du prisme; puis prenons, dans un même sens, des longueurs MM', NN', PP', QQ', RR', égales entre elles et aux arêtes du prisme oblique : la figure MNPQRM'N'P'Q'R' ainsi déterminée sera un prisme droit de mêmes arêtes latérales que le prisme proposé, et ayant pour base la section perpendiculaire à ces arêtes.

Cela posé, les parallélogrammes AB', BC', CD'... ont même base que les rectangles MN', NP', PQ'..., et les mêmes hauteurs respectives : donc les parallélogrammes sont équivalens aux rectangles (n° 343), chacun à chacun : *donc, etc.*

Corollaire 1er. — *L'aire de la surface latérale d'un prisme oblique a pour mesure le produit du périmètre d'une section perpendiculaire aux arêtes, multiplié par leur longueur.*

Coroll. 2. — La démonstration du théorème précédent étant évidemment applicable à un cylindre oblique, il en résulte aussi, que

La surface latérale d'un cylindre oblique a pour mesure le produit du périmètre d'une section perpendiculaire aux arêtes, multiplié par leur longueur.

Coroll. 3. — *La surface latérale d'un tronc de cylindre circulaire droit a pour mesure le produit de son axe par la circonférence de sa base circulaire :*

Car si l'on considère un cylindre de même base, et dont l'axe serait double, on voit que ce cylindre contiendrait deux fois le tronc proposé.

N° 574. THÉORÈME III.

L'aire de la surface latérale d'une pyramide régulière est équivalente à celle d'un triangle unique qui aurait pour base le périmètre [rectifié] de la base de la pyramide, et pour hauteur son apothème ; — et par conséquent elle *a pour mesure la moitié du produit du périmètre de sa base par l'apothème de la pyramide.*

En effet, cette surface n'est autre chose qu'une série de triangles adjacens deux à deux, ayant l'apothème pour hauteur commune, et dont la somme des bases compose le périmètre de la base de la pyramide.

COROLLAIRE 1er. — *L'aire de la surface totale d'une pyramide régulière* [la base comprise] *a pour mesure la moitié du produit du périmètre de sa base par la somme des apothèmes respectifs de la pyramide et de la base.*

COROLL. 2. — Le même mode d'évaluation est évidemment applicable au cône circulaire droit. — Par conséquent

L'aire de la surface latérale d'un cône circulaire droit est équivalente à celle d'un secteur qui aurait pour base, un arc de même longueur que la circonférence [rectifiée] *de la base du cône, et son arête pour rayon ;*

Ainsi — *elle a pour mesure la moitié du produit de son arête par la circonférence de sa base.*

Cela résulte d'ailleurs de ce qu'on a vu (n° 510) sur le développement de la surface conique.

COROLL. 3. — *L'aire de la surface totale d'un cône circulaire droit a pour mesure, la moitié du produit de la circonférence de sa base, multipliée par la somme faite d'une arête et du rayon de cette base.*

SCOLIE. — *L'aire de la base d'un cône circulaire droit est à celle de sa surface latérale, comme le rayon de cette base est à l'arête du cône.*

Coroll. 4.—*L'aire de la surface latérale d'un tronc de pyramide régulière à bases parallèles* [qui est la différence de deux pyramides régulières semblables], *a pour mesure le produit de la demi-somme des périmètres des bases, multipliée par son apothème,* ou *le produit du périmètre de la section faite à égale distance des bases, multipliée par son apothème.*

Coroll. 5.—De même, un *tronc de cône circulaire droit à bases parallèles* étant la différence de deux cônes circulaires droits semblables, sa surface latérale est équivalente à la différence de deux secteurs semblables (n° 328, *coroll.* 1er); d'où il résulte que l'on peut en donner les expressions suivantes :

L'aire de la surface latérale d'un tronc de cône circulaire droit à bases parallèles, a pour mesure le produit de son arète par la demi-somme des circonférences des bases (n° 351);

Ou bien — *le produit de son arète par la circonférence de la section perpendiculaire à l'axe, faite à égale distance des bases.*

Cette mesure comprend celle du cône entier lorsqu'on regarde comme nulle la petite base du tronc, ou même celle du cylindre, que l'on peut considérer comme un tronc de cône dont le sommet serait situé à une distance infinie de la base (n° 142).

La même surface est donc *équivalente à la somme des surfaces latérales de deux cônes de même arète que le tronc, et dont les bases seraient respectivement égales à ses deux bases;*

Ou bien — *à la surface latérale d'un cylindre circulaire droit qui aurait pour base la section perpendiculaire à l'axe, faite à égales distances des bases du tronc, et son arète pour hauteur.*

Coroll. 6. — Enfin — *La surface totale d'un tronc de cône circulaire droit à bases parallèles est équivalente à la somme des surfaces totales de deux cônes de même arète que lui, et dont les bases seraient respectivement les deux bases du tronc.*

N° 575. Théorème IV.

Dans deux pyramides quelconques [quelles que soient les figures respectives de leurs bases], *les aires des sections parallèles faites à des distances proportionnelles des sommets*, [ou égales chacune à chacune], *sont proportionnelles*.

En nommant A, B, les aires des sections de la première pyramide, C, D, les aires des sections de la seconde, *a*, *b*, deux côtés [ou lignes] homologues des deux premières, et *c*, *d*, deux côtés [ou lignes] homologues des deux dernières, on aura d'abord (nos 503 *et* 354) :

$$A : B :: a^2 : b^2, \quad \text{et} \quad C : D :: c^2 : d^2.$$

Or : — 1° les côtés *a*, *b*, des deux premières figures, étant proportionnels à leurs distances au sommet de la première pyramide (nos 562; *et* 563, *coroll.* 2); — 2° les côtés *c*, *d*, des deux dernières, étant proportionnels à leurs distances au sommet de la seconde pyramide; — et enfin — 3e les distances aux deux sommets étant elles-mêmes proportionnelles entre elles [ou égales deux à deux], — il en résulte

$$a : b :: c : d;$$

d'où $A : B :: C : D$ (*voyez* le n° 355).

Scolie 1er. — Si l'on a $A = C$, on aura aussi $B = D$; — *et vice versâ*.

Scol. 2. — Chacune des deux pyramides peut être, dans le théorème précédent, remplacée par un cône, sans que la proposition cesse d'avoir lieu.

N° 576. Remarque *sur la mesure des aires des surfaces cylindriques et coniques*.

Au lieu de nous fonder sur le développement des surfaces du cône et du cylindre pour en déterminer l'aire, nous aurions pu employer, au moins pour les cylindres et les cônes circulaires droits, un moyen analogue à celui dont nous nous sommes servi pour le cercle (n° 348). Mais pour cela, il eût fallu établir divers *lemmes* que nous allons indiquer.

Digitized by Google

LEMME I. — *Si, en menant dans deux portions finies de surfaces,* OABCD, O'A'B'C'D' (fig. 418), *et de toutes les manières possibles, des plans parallèles à une direction déterminée* AA', *on trouve que dans l'une* OABCD, *toutes les lignes d'intersection,* AOB, COD..., *sont plus petites [ou les unes de même longueur et toutes les autres plus petites] que les lignes d'intersection,* A'O'B', C'O'D',.. *qui leur correspondent respectivement dans l'autre surface, on doit en conclure que la première surface est moindre que la seconde.* Fig. 418.

On peut tirer de là, comme cas particulier, ce principe que

Toute portion de plan oABCD (fig. 419) [limitée par une ligne ABCD] *est moindre qu'une portion de surface quelconque* OABCD *terminée au même contour* ABCD. Fig. 419.

Ici, l'on peut prendre pour la direction déterminée dont il est question dans l'énoncé du lemme général, une perpendiculaire au plan : c'est-à-dire qu'il suffit de faire toutes les sections perpendiculairement à ce plan ; et alors, comme on a toujours (n° 5) AoB < AÔB, CoD < COD,... il s'ensuit que

oABCD < OABCD.

Au surplus, il est très permis et beaucoup plus simple, de considérer cette dernière proposition comme résultant *évidemment* de la nature du plan.

On déduit encore, du *lemme* I, une autre conséquence que nous préférons démontrer séparément : nous la placerons en tête du paragraphe suivant (n° 580).

LEMME II. — *La surface latérale d'un cylindre circulaire droit, est — 1° plus grande que celle de tout prisme inscrit, — et — 2° plus petite que celle de tout prisme circonscrit.*

Il suffit de prouver—1° que chaque pan, AA'BB' (fig. 420), du prisme inscrit, est moindre que la portion correspondante, AA'CC'BB', de la surface cylindrique, — et — 2° que cette portion de surface cylindrique, est moindre que la portion correspondante AA'DD'BB', du prisme circonscrit. — Pour cela on mène, conformément à l'énoncé du *lemme* I, une infinité de plans [tels que *abcd*] tous perpendiculaires au pan que l'on considère. Il est facile de voir que les sections qui en résultent, satisfont aux conditions de cet énoncé. Fig. 420.

La proposition peut s'étendre à une série quelconque de cylindres circulaires droits et de prismes, ayant toutes leurs arêtes égales et terminées aux mêmes plans, et tels que les circonférences ou périmètres de leur bases [mais non les surfaces latérales], *s'envelopperaient* les unes les autres.

LEMME III.—*La surface latérale d'un cône circulaire droit est —1° plus grande que celle de toute pyramide régulière inscrite, — et —2° plus petite que celle de toute pyramide régulière circonscrite.*

Même démonstration que pour le *lemme* précédent, en substituant, dans la figure, le sommet commun S (fig. 421) à la section A'B'C'D'. Fig. 421.

Cette proposition peut également s'étendre à une série quelconque de cônes circulaires droits et de pyramides régulières, tous de même axe, et tels que les périmètres de leurs bases s'envelopperaient les uns les autres.

Maintenant, ces divers lemmes étant établis, il n'est pas difficile d'en déduire, comme nous l'avons dit ci-dessus, et sans employer la considération du *développement*, les expressions déjà obtenues pour la surface du cylindre et celle du cône.

N° 577. Indiquons encore, pour la mesure des surfaces courbes en général, un moyen approché, analogue à la méthode établie dans le *deuxième Livre* (n° 347) pour la mesure des aires planes terminées par des lignes courbes ; après quoi nous nous occuperons de la surface sphérique.

Nous avons établi (n° 408) que toute surface courbe pouvait être considérée comme composée d'élémens plans : son aire, comme celle des surfaces développables, sera donc toujours susceptible d'être évaluée ou *carrée*. Pour effectuer approximativement la quadrature d'une portion de surface courbe, on est ainsi conduit à supposer cette surface partagée en triangles très petits : en considérant ces triangles comme plans, et faisant la somme de leurs aires, évaluées d'après la méthode du *numéro* 345 (2°), on aura une mesure de celle de la surface courbe, mesure d'autant plus approchée que ces triangles seront plus petits.

Pour plus d'exactitude, on peut s'y prendre de la manière suivante, qui cependant a l'inconvénient d'exiger des calculs un peu longs :

Projetons sur un plan la portion de surface proposée, c'est-à-dire menons, par des points très rapprochés pris sur ses *bords*, des perpendiculaires à ce plan. Lions par des droites les pieds consécutifs de ces perpendiculaires, et décomposons en triangles la figure plane ainsi formée. Puis, par les sommets de ces triangles, élevons des perpendiculaires ou *ordonnées* (n° 347) terminées à la surface courbe, et menons des droites par les sommets des perpendiculaires voisines : nous formerons ainsi un *réseau* de triangles inscrits à la surface courbe, et tels que la somme de leurs aires différera d'autant moins de l'aire de cette surface, que les triangles seront plus petits. La question se trouvera ainsi ramenée à calculer l'aire de chaque triangle.

. Pour plus de simplicité, supposons que les triangles primitivement formés dans le plan de projection, soient tous égaux entre eux, équilatéraux (*voyez* le n° 238) ; et prenons leur côté commun pour unité ; [on peut négliger les triangles du bord qui ne sont pas équilatéraux]. — Soient d, d', d'', les différences de longueur des ordonnées qui correspondent à l'un de ces triangles, prises deux à deux : les côtés du triangle inscrit correspondant auront respectivement pour longueurs

$$\sqrt{1+d^2},\quad \sqrt{1+d'^2},\quad \text{et}\quad \sqrt{1+d''^2};$$

et il sera facile d'en déduire l'aire de ce dernier triangle par la formule du *numéro* 345 (2°).

Digitized by Google

Lorsque la courbure de la surface est très faible, c'est-à-dire lorsque la forme de cette surface se rapproche assez sensiblement de la forme plane, alors, pourvu qu'on prenne le plan de projection convenablement, les différences d, d', d'', seront très petites ; et pour simplifier le calcul, on pourra négliger les puissances de d, d', d'', supérieures à la seconde, et supposer (*voyez l'Algèbre*) :

$$\sqrt{1+d^2} = 1 + \frac{1}{2} d^2,$$

$$\sqrt{1+d'^2} = 1 + \frac{1}{2} d'^2,$$

$$\sqrt{1+d''^2} = 1 + \frac{1}{2} d''^2.$$

Si l'on fait alors, pour abréger,

$$d^2 + d'^2 + d''^2 = D^2,$$

et que l'on continue à négliger toujours les puissances supérieures de ces quantités, la formule déjà citée donnera, pour l'aire de chaque triangle, des expressions de la forme

$$\frac{1}{4} \sqrt{3} \left(1 + \frac{1}{3} D^2\right);$$

et l'on n'aura plus qu'à en faire la somme.

Il est facile de reconnaître (*voyez* le n° 576, *lemme* 1) que le résultat obtenu par cette méthode, sera toujours un peu au-dessous du véritable, mais qu'il en différera d'autant moins, que la courbure de la surface sera plus faible, et que les triangles élémentaires seront plus petits et tendront plus à devenir parallèles au plan de projection.

N° 578. PROBLÈME I.

Étant donnée l'arète d'un cône droit, égale à $25^m,15$, et sa hauteur $17^m,3$, trouver sa surface latérale [A].

Pour cela on a (n° 574, *coroll.* 3) :

$$A = \pi.25,15.\sqrt{(25,15)^2 - (17,3)^2}$$

$$= \pi.25,15.\sqrt{42,45 \times 7,85};$$

$$log.A = log.\pi + log.25,15 + \frac{1}{2}.log.42,45 + \frac{1}{2}.log.7,85;$$

ou, en effectuant les calculs indiqués,

$$log.A = 3,1590615 = log.1442,32:$$

donc $$A = 1442^{mq},32.$$

N° 579. PROBLÈME II.

Les rayons des bases d'un cône tronqué ont respectivement 3m et 5m de longueur, et son arête a 7m : — on demande sa surface latérale.

Cette surface a pour mesure (n° 574, *corol.* 5):

$$\pi(3+5)7 = 56.\pi = 175^{mq},93.$$

§ II. — *De l'Aire de la Surface Sphérique.*

N° 580. LEMME I.

L'aire d'une surface convexe fermée de toutes parts, polyèdre ou courbe, est moindre que celle de toute autre surface qui l'envelopperait entièrement.

Cette proposition est une conséquence du *lemme* 1 établi ci-dessus (n° 576): car si l'on mène des plans quelconques au travers des deux surfaces proposées, les lignes d'intersection de la surface enveloppante seront toujours plus grandes que les lignes d'intersection de la surface enveloppée (*voyez* le n° 243).

[Mais] on peut démontrer directement ce nouveau lemme, par un raisonnement à très peu près semblable à celui du *numéro* 243.

Fig. 195. Il suffit pour cela de convenir que ABCD, PQRST (fig. 195), représenteront des surfaces au lieu de représenter des lignes. Alors, au lieu de considérer la portion de plan limitée par la ligne ABCD, on considère la portion d'espace limitée par la surface ABCD; et l'on mène un plan tangent représenté par MAN. Ce plan coupe la surface enveloppante suivant une ligne courbe; et la portion de ce plan limitée par la ligne courbe, étant moindre que la portion de surface courbe représentée par MPQN, on en conclut l'énoncé, comme dans le *numéro* cité.

Scolie 1er. — La proposition est applicable au cas de deux surfaces ayant une partie commune, ou des points communs, ou des lignes communes, pourvu que la partie enveloppée soit convexe..., *etc.* (*voyez* le n° 243, *scol.* 1er). On peut aussi sup-

primer les portions de surface qui sont communes; et alors on voit que

De deux portions de surfaces terminées au même contour, l'une enveloppée convexe, l'autre enveloppante quelconque, la première est toujours la plus petite.

Scol. 2. — La même proposition peut encore être étendue à une série de surfaces qui s'enveloppent les unes les autres, pourvu qu'elles soient toutes convexes; [restriction qui, toutefois, est inutile pour la plus extérieure].

N° 581. Les deux surfaces pourraient être des surfaces de révolution autour d'un même axe A*a* (fig. 422), et avoir en outre un même plan de symétrie SS′ perpendiculaire à cet axe. Fig. 422.
Dans ce cas, le plan de symétrie partageant chacune des deux surfaces en deux parties égales, MNM′ et M*n*M′, PQP′ et P*q*P′, il y aurait lieu d'appliquer aux portions ou moitiés de surfaces, situées de chaque côté de ce plan [bien qu'elles ne soient pas fermées de toutes parts, et que l'une n'enveloppe pas l'autre], le principe démontré pour les surfaces entières.

On peut énoncer cette conséquence de la manière suivante :

LEMME II. Fig. 422.

Soient deux lignes, MN, PQ, *comprises dans un angle droit* SOA *et terminées à ses côtés, sans se couper dans son intérieur;*

En faisant tourner les deux lignes autour de l'un des côtés de cet angle, on obtient deux surfaces de révolution dont l'une intérieure, MNM′, *est moindre que la surface extérieure* PQP′, *toutes les fois que la ligne génératrice intérieure satisfait aux conditions suivantes :*

1° *Si elle présente, dans toute son étendue, sa concavité vers le sommet de l'angle* (n° 241);

Et—2° *Si les tangentes à ses deux extrémités*, M, N, *ne font avec les côtés de l'angle primitif* SOA *que des angles intérieurs aigus ou droits.*



Fig. 422. *Scolie.* — Cette dernière condition est nécessaire pour que la surface totale MNM'n soit convexe. Ainsi par exemple, la proposition ne serait pas applicable au cas où la ligne MN serait un arc de circonférence plus grand qu'un *quadrant.*

N° 582. LEMME III. Fig. 423.

L'aire de la surface latérale d'un tronc de cône circulaire droit à bases parallèles, AA'BB', est équivalente à celle d'un cylindre de même hauteur ab, et dont la base aurait pour rayon la perpendiculaire PO élevée sur le milieu P d'une arète AB, et terminée à l'axe ab; — et par conséquent elle *a pour mesure, le produit de son axe par la circonférence décrite d'un rayon égal à la perpendiculaire élevée sur le milieu d'une arète, et terminée à cet axe.*

En effet, si l'on abaisse du point P sur l'axe ab, la perpendiculaire Pp, l'aire de la surface latérale du tronc aura d'abord pour mesure

$$\textit{circ.}\ Pp \times AB, \quad \text{ou} \quad 2\pi . Pp \times AB.$$

Maintenant, si de l'extrémité A d'un rayon aA de la petite base, on abaisse une perpendiculaire AL sur le rayon parallèle bB de la grande base, les deux triangles ABL, POp, seront semblables comme ayant les côtés perpendiculaires chacun à chacun ; et l'on aura

$$AB : AL :: OP : Pp,$$

d'où

$$AB \times Pp = OP \times AL = OP \times ab:$$

par conséquent, l'aire de la surface latérale du tronc de cône peut s'exprimer par

$$2\pi . OP \times ab, \quad \text{ou} \quad \textit{circ.}\ OP \times ab; \qquad C.\ Q.\ F.\ D.$$

Scolie. — L'expression précédente est également applicable au cône entier (*voyez* le n° 574, *coroll.* 5).

N° 583. **Lemme IV** Fig. 424.

La surface engendrée par la révolution d'une ligne polygonale régulière ABCD... (n° 326, *scol.*) *tournant autour d'une droite* MN *qui passe par son centre* O, *et qui ne la coupe pas,* est équivalente à la surface latérale d'un cylindre circulaire droit qui aurait pour base le cercle inscrit à la ligne polygonale, et sa projection sur l'axe pour hauteur; — et par conséquent elle *a pour mesure le produit de la circonférence inscrite à la ligne polygonale, multipliée par la projection de celle-ci sur l'axe.* Fig. 424.

Soient ab, bc, cd,.... les projections respectives des côtés AB, BC, CD,.... de la ligne brisée, sur l'axe de révolution, et OP, OQ, OR,.... leurs apothèmes. En représentant par *aire* AB, *aire* BC, *aire* CD,.... les aires des surfaces coniques respectivement engendrées par la révolution de ces côtés, nous aurons (n° 582)

$$\text{aire AB} = \text{circ. OP} \times ab,$$
$$\text{aire BC} = \text{circ. OQ} \times bc,$$
$$\text{aire CD} = \text{circ. OR} \times cd,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots ;$$

d'où, faisant la somme, en observant que OP=OQ=OR....,

et que $ab + bc + cd = ad$,

on tire $\text{aire ABCD} = \text{circ. OP} \times ad$,

mesure d'une surface cylindrique conforme à l'énoncé.

Scolie. — D'après ce même énoncé, la ligne génératrice ne doit pas couper l'axe de révolution : elle peut tout au plus y aboutir, soit par une de ses extrémités, soit par toutes les deux. Dans ce dernier cas, où elle devient un *demi-polygone régulier,* la hauteur de la surface engendrée, ainsi que celle de la surface cylindrique équivalente, est égale au diamètre du cercle circonscrit.

N° 584. THÉORÈME V (*). Fig. 288.

Toute surface sphérique OA est équivalente à la surface latérale d'un cylindre circulaire droit équilatéral (n° 492) qui aurait pour base un grand cercle [et le diamètre AC pour hauteur]; — et par conséquent elle *a pour mesure le produit de la circonférence d'un grand cercle, multipliée par le diamètre.*

Cette proposition résulte de ce que la demi-circonférence génératrice de la sphère peut être considérée comme un demi-polygone régulier d'une infinité de côtés infiniment petits (n° 240). On peut d'ailleurs, en suivant la même marche que dans le *numéro* 348, démontrer le théorème comme il suit:

Supposons que *circ.* OA × AC, mesure de l'aire d'un cylindre équilatéral conforme à l'énoncé, ne soit pas en même temps celle de la surface sphérique OA. Alors, cette mesure appartiendra nécessairement à quelque autre surface sphérique d'un rayon plus grand ou plus petit, attendu qu'il y a des sphères de toutes les grandeurs possibles. Supposons donc que *circ.* OA × AC soit la mesure d'une surface plus petite que celle de la sphère OA, par exemple la mesure de la surface sphérique OA'. Inscrivons dans la demi-circonférence génératrice de la sphère OA un demi-polygone régulier qui ait OB pour apothème, et dont les côtés ne rencontrent pas la circonférence; puis, faisons tourner tout le système autour du diamètre AC. Le demi-polygone régulier engendrera une surface dont la mesure sera, *circ.* OB × AC; mais OB est moindre que OA, tandis que la surface engendrée par le demi-polygone est plus grande que celle de la sphère OA'; — *Ce qui est absurde.*

(*) La découverte de ce beau théorème est due à la sagacité d'ARCHIMÈDE, qui ordonna pour en perpétuer la mémoire, que le cylindre équilatéral circonscrit à la sphère, fût gravé sur son tombeau.

On démontrerait de même, que *circ.* OA $\times$ AC ne peut mesurer la surface d'une sphère plus grande : [pour cela, on circonscrirait à la demi-circonférence génératrice de la sphère OA, un demi-polygone régulier dont les côtés ne rencontrent pas la grande ; alors, au lieu d'avoir AC pour facteur commun des deux expressions que l'on doit comparer, on aurait pour facteur commun OA : à cela près, le raisonnement est le même.] Fig. 288.

Corollaire. — En nommant r le rayon de la sphère, et d son diamètre, sa surface a pour mesure, $4\pi r^2$ ou πd^2 : elle est *quadruple de celle d'un grand cercle.*

Scolie 1er. — Il serait facile de démontrer que

L'aire de la surface sphérique, l'aire totale du cylindre circonscrit, et celle du cône équilatéral circonscrit (n° 510, fig. 425), *sont entre elles* $:: 4 : 6 : 9$. Fig. 425.

Par conséquent : — *L'aire du cylindre est moyenne proportionnelle entre les deux autres ;*

Et — *L'aire de la sphère est équivalente aux* $\frac{2}{3}$ *de la surface totale du cylindre.*

Scol. 2. — On démontrerait de même, que

L'aire de la surface sphérique, celle du cylindre équilatéral inscrit, et celle du cône équilatéral inscrit (fig. 426), *sont entre elles* $:: 16 : 12 : 9$. Fig. 426.

L'aire du cylindre est donc encore *moyenne proportionnelle entre les deux autres ;*

Et — *L'aire de la sphère est double de la surface latérale du cylindre ; — elle vaut les* $\frac{4}{3}$ *de sa surface totale.*

N° 585. Théorème VI. Fig. 427.

Une calotte sphérique, BAB′ ou BCB′, est équivalente à la surface latérale d'un cylindre circulaire droit qui aurait pour base un grand cercle, et même hauteur, AD ou CD, que la calotte ; — et par conséquent elle *a pour mesure le produit de sa hauteur par la circonférence d'un grand cercle.* Fig. 427.

Digitized by Google

La démonstration de ce théorème est à peu près la même que celle du précédent.

Pour y parvenir directement, considérons d'abord une calotte BAB' *au plus* égale à une demi-sphère (n° 581, *scol.*), et supposons que *circ.* OA $\times$ AD puisse être la mesure d'une calotte plus petite *bab'* (n° 581), ayant même centre O que la première, et sa base sur le même plan. Inscrivons à l'arc générateur AB, une ligne polygonale régulière dont les côtés ne rencontrent pas l'arc *ab*, et ayant OP pour apothème [comme on l'a fait au *numéro* 326 pour une circonférence entière]. La surface engendrée par cette ligne brisée tournant autour de AD, aura pour mesure, *circ.* OP $\times$ AD. Or cette surface est plus grande que la calotte *bab'* (n° 581), tandis qu'au contraire OP est moindre que OA ; — *Ce qui est absurde.*

On prouverait de la même manière, que *circ.* OP $\times$ AD ne saurait être la mesure d'une calotte plus grande que BAB' [en *inscrivant* encore, à l'arc générateur de cette calotte plus grande, une ligne polygonale régulière].

Considérons maintenant une calotte BCB' plus grande qu'une demi-sphère : la démonstration précédente n'y est plus applicable (n° 581, *scol.*); mais on a

$$\text{BCB}' = \text{BAB}'\text{CB} - \text{BAB}' = \textit{circ.}\ \text{OA} \times \text{AC} - \textit{circ.}\ \text{OA} \times \text{AD},$$

ou

$$\text{BCB}' = \textit{circ.}\ \text{OA} \times \text{CD}.$$

Donc le théorème est général.

COROLLAIRE 1er. — *L'aire d'une calotte est équivalente à celle d'un cercle qui aurait pour rayon la corde de l'arc générateur* (voyez les nos 274, *scol.* 2, 2° ; et 348, *coroll.* 1er).

COROLL. 2. — Une *zone* étant la différence de deux calottes, et ayant pour hauteur la différence de leurs hauteurs, est aussi équivalente à la surface latérale d'un cylindre circulaire droit qui aurait pour base un grand cercle, et même hauteur que la zone ; — et par conséquent elle a la même mesure qu'une calotte de même hauteur.

COROLL. 3. — *L'aire d'une calotte ou d'une zone est à celle de la sphère entière, comme la hauteur de la zone ou de la calotte est au diamètre de la sphère;*

Elle est donc, pour une même sphère, indépendante des rayons des bases;

Et — *Elle a pour mesure le produit de sa hauteur par la circonférence d'un grand cercle.*

Enfin, en nommant h la hauteur, r le rayon de la sphère et d son diamètre, l'aire de la calotte ou de la zone a pour expression, $2\pi rh$ ou πdh.

N° 586. THÉORÈME VII.

Dans une même sphère ou dans des sphères égales, — *Les fuseaux sont proportionnels aux angles dièdres correspondans,* ou *aux arcs de grand cercle correspondans.*

La démonstration de ce théorème étant à peu près semblable à celle du *numéro* 447, relative à la mesure des angles dièdres, nous nous contenterons de renvoyer à cette dernière.

COROLLAIRE 1er. — En prenant pour unité de fuseau, le fuseau correspondant à un angle dièdre droit, ou le fuseau équivalent au quart de la surface sphérique ou à un grand cercle (n° 584, *coroll.* 1er),

L'aire d'un fuseau a pour mesure l'angle dièdre correspondant, ou *l'arc de grand cercle correspondant* (voyez le n° 536).

COROLL. 2. — Si l'on nomme A la valeur de l'angle ou de l'arc correspondant à un fuseau, la mesure absolue du fuseau, rapportée au carré qui a pour côté l'unité linéaire, aura pour expression, $A\pi r^2$.

Et par suite: — *L'aire d'un fuseau est à celle de la sphère, comme l'angle dièdre correspondant est à* 4 DROITS, — ou *comme l'arc de grand cercle correspondant est à la circonférence d'un grand cercle.*

N° 587. Théorème VIII. Fig. 428.

Fig. 428. *Deux triangles sphériques symétriques entre eux*, ABC, A'B'C', *sont équivalens*.

La démonstration est toute pareille à celle du *numéro* 465, relative aux angles trièdres.

Les côtés des deux triangles proposés étant égaux, les cordes qui les sous-tendent sont aussi égales, et forment des triangles égaux. Les cercles circonscrits à ces triangles, qui sont nécessairement des petits cercles (n° 532), sont aussi égaux ; et en menant de leurs pôles respectifs, P, P', des arcs de grand cercle aux sommets des triangles sphériques proposés, on formera des triangles sphériques isocèles qui seront aussi égaux chacun à chacun.

Seulement, il faut bien faire attention à ceci : comme les pôles P, P', sont nécessairement placés de la même manière par rapport aux deux triangles, par suite, selon que l'un des triangles proposés sera la somme de trois ou de deux triangles isocèles, ou l'excès de la somme de deux pareils triangles sur un troisième, c'est-à-dire selon que le pôle du petit cercle circonscrit à l'un des triangles proposés sera dans l'intérieur de ce triangle, ou sur l'un de ses côtés, ou à l'extérieur, la même disposition existera également dans le second triangle (*voyez* le n° 465).

Corollaire. — *Deux polygones sphériques symétriques entre eux* étant composés de triangles sphériques symétriques, *sont équivalens*.

N° 588. Théorème IX. Fig. 429.

Fig. 429. *Un triangle sphérique* ABC *est équivalent à l'excès de la demi-somme des fuseaux qui correspondent à ses angles, sur un fuseau droit.*

Les circonférences de grand cercle auxquelles appartiennent les trois côtés du triangle, forment, en se coupant sur la surface de la sphère, *huit* triangles sphériques différens, entre lesquels il existe les mêmes relations qu'entre les angles trièdres qui leur correspondent respectivement (n°s 399, 451, *et* 452); et en nommant A, B, C, les fuseaux qui correspondent aux angles du triangle, on a (*voyez* le n° 466): Fig. 429.

$$\begin{aligned} ABC + A'BC &= A, \\ ABC + AB'C &= B, \\ ABC + ABC' &= C. \end{aligned}$$

Remplaçant dans la dernière égalité, ABC' par son symétrique équivalent A'B'C (n° 587), ajoutant membre à membre les trois égalités, et observant (n° 452) que

$$ABC + A'BC + AB'C + A'B'C = 2$$

[en prenant le fuseau rectangle pour unité], on obtient,

$$2.ABC + 2 = A + B + C, \quad \text{ou} \quad ABC = \tfrac{1}{2}(A + B + C) - 1.$$

Corollaire 1er. — *Un triangle sphérique* ABC *est équivalent au fuseau dont l'angle dièdre serait* $\{\tfrac{1}{2}(A+B+C)-1\}$; il a pour mesure absolue (n° 586, *coroll.* 2) :... $\{\tfrac{1}{2}(A+B+C)-1\}\pi r^2$.

Voyez les *corollaires* du *numéro* 466.

Si l'on prenait pour *unité* le *triangle trirectangle*, la mesure du triangle quelconque proposé, serait $\{A+B+C-2\}$.

Scolie 1er. — Au lieu de mesurer les fuseaux et les triangles sphériques par des angles dièdres, on pourrait au contraire mesurer les angles dièdres et les angles trièdres, par les fuseaux et les triangles sphériques qui leur correspondent respectivement sur une même sphère ou sur des sphères décrites d'un même rayon arbitraire et ayant leurs centres respectifs sur l'arête de chaque angle dièdre, ou au sommet de chaque angle trièdre; ce qui serait analogue à la mesure des angles plans par des arcs de cercle (n° 122).

Scol. 2. — L'expression $(A + B + C - 2)$, dont la moitié mesure l'aire du triangle sphérique quand on prend le fuseau droit pour unité, se nomme *l'excès sphérique* du triangle.

En supposant *infini* le rayon de la sphère, la somme des angles A, B, C, devient égale à 2 puisque alors le triangle est un triangle plan rectiligne (n° 542); et l'excès sphérique se réduit à *zéro*. Mais aussi, la surface prise pour unité devient *infiniment grande*.

Coroll. 2. — En prenant encore l'aire du fuseau droit pour unité (n° 586, *coroll.* 1er),

L'aire d'un polygone sphérique convexe a pour mesure la demi-somme de ses angles, diminuée d'autant d'angles DROITS *qu'il a de côtés moins* DEUX (*voyez* le n° 474).

Coroll. 3. — *La surface de la sphère étant supposée partagée en un certain nombre de polygones convexes, son aire a pour mesure le double du nombre des sommets, plus le double du nombre des polygones, moins le double du nombre des côtés* (voyez le n° 475).

N° 589. PROBLÈME I.

Étant donnée l'aire d'une sphère, égale à $728^{mq},4926$, *trouver son rayon* [*r*].

On a (n° 584, *coroll.*): $728,4926 = 4\pi r^2$;

d'où $r = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\sqrt{728,4926} = 7^m,61$.

N° 590. PROBLÈME II.

En supposant la terre parfaitement sphérique, et sachant que le quart du méridien est égal à 10 000 000 *mètres, on demande de déterminer son rayon* [*r*], *et l'aire de sa surface* [*s*].

En nommant, pour abréger, *c* la circonférence du méridien, on a d'abord

$$r = \frac{c}{2\pi},$$

$$\begin{aligned} log.\ \tfrac{1}{2}c = log.\ 20\,000\,000 &= 7,3010300 \\ C.\ log.\ \pi \ldots\ldots\ldots &= 9,5028501 3 \\ log.\ r \ldots\ldots\ldots &= 6,8038801 3 \end{aligned}$$

d'où $r = 6\,366\,200$ *mètres*.

Ensuite, $s = 4\pi r^2 = \frac{c^2}{\pi}$;

d'où, en appliquant les logarithmes,

$$\log. s = 14{,}70697011,$$

et par conséquent,

$$s = 509\ 296 \text{ myriamètres carrés.}$$

N° 591. Problème III.

On a compté 50 000 étoiles entre le pôle boréal et le solstice d'hiver : — on demande combien, à proportion, il doit y en avoir dans tout le ciel, en supposant que le diamètre de la terre soit à la hauteur de la calotte comprise entre le pôle boréal et le solstice d'hyver, comme 10 est à 7.

La surface totale du ciel *est à* la portion dont on a compté les étoiles, *comme* la surface de la terre *est à* la calotte comprise entre le pôle boréal et le solstice d'hiver, ou *comme* le diamètre de la terre *est à* la hauteur de cette calotte : ainsi, en nommant x le nombre total des étoiles, on doit avoir à peu près (n° 585, *coroll.* 3)

$$x : 50\ 000 :: 10 : 7;$$

d'où $$x = 50\ 000 \times \frac{10}{7} = 71\ 429.$$

Par conséquent, il y a *environ* 72 000 étoiles.

N° 592. Problème IV.

On demande l'aire d'un triangle sphérique dont les angles sont respectivement $A = 85^{gr},17'$, $B = 103^{gr},35'$, $C = 67^{gr},49'$, *le rayon de la sphère étant égal à* $1^{m},54$.

On a d'abord

$$\tfrac{1}{2}(A + B + C) - 1 = 0^{q},28005.$$

Par conséquent, d'après la formule du *numéro* 588 (*coroll.* 1er), l'aire du triangle vaudra

$$\pi.(1,54)^2 \times 0,28005 = 2^{mq},0865,$$

à *un centimètre carré* près.

N° 593. Remarque *générale sur la comparaison des aires des figures semblables.*

Quelle que soit la nature de pareilles figures, leurs aires sont toujours proportionnelles aux carrés de leurs lignes homologues.

Exemple : — *Les aires des calottes semblables, C, C', sont proportionnelles aux carrés de leurs hauteurs, h, h',* — ou *des rayons, r, r', de leurs bases,* — ou *des rayons, R, R', des sphères auxquelles elles appartiennent,* — etc.

En effet on a d'abord

$$C = 2\pi Rh, \quad C' = 2\pi R'h',$$

d'où $$C : C' :: Rh : R'h';$$

mais, en vertu de l'hypothèse, on a aussi

$$R : R' :: h : h';$$

donc, en multipliant par ordre et supprimant les facteurs communs,

$$C : C' :: h^2 : h'^2 \text{ ou } :: r^2 : r'^2, \text{ ou } :: R^2 : R'^2;$$

etc., etc., etc.

CHAPITRE III.

DES VOLUMES.

N° 594. On nomme Volume, comme nous l'avons dit au *numéro* 2 [ou improprement *solidité* (voyez la *note* de la *page* 395)] : l'*étendue considérée dans un espace limité*, ou bien encore le *rapport de l'étendue de cet espace à l'étendue de l'espace unitaire*.

On prend ordinairement pour unité de volume, le *cube construit sur une arète égale à l'unité de longueur;* et de là vient que l'on nomme *cubature*, la détermination des volumes.

§ Ier. — *Mesure des Volumes des Prismes, etc.*

N° 595. Théorème I. Fig. 430.

Deux parallélépipèdes rectangles, OG, OG', *de même base* OF, *sont proportionnels à leurs hauteurs*, OC, OC'. Fig. 430.

Pour démontrer cette proposition, on fait d'abord coïncider les bases OF; les arètes perpendiculaires à ces bases prennent, deux à deux, la même direction. Alors, en procédant comme dans les cas analogues (*voyez* par *ex.* le n° 340), on arrive à cette conséquence, que le rapport des volumes des deux parallélépipèdes, est le même que celui de leurs hauteurs, c'est-à-dire que

OG : OG' :: OC : OC'; *C. Q. F. D.*

Digitized by Google

N° 596. Théorème II. Fig. 431.

Fig. 431. *Deux parallélépipèdes rectangles*, OG, OG′, *de même hauteur* OC, *sont proportionnels à leurs bases*, OF, OF′.

En effet, on peut d'abord placer les deux parallélépipèdes de manière qu'ils aient un angle trièdre commun en O. Cela fait, la face A′G′ du parallélépipède OG′ [prolongée s'il est nécessaire] détermine un troisième parallélépipède rectangle OG″ qui peut être considéré comme ayant pour base le rectangle OD, et OA′ pour hauteur. En lui comparant le parallélépipède OG considéré comme ayant la même base OD, et OA pour hauteur, on a la proportion

$$OG : OG'' :: OA : OA'.$$

Maintenant, le même parallélépipède OG″ peut être considéré comme ayant pour base OE′ et pour hauteur OB. En le comparant au parallélépipède OG′ considéré comme ayant la même base OE′ et OB′ pour hauteur, on a encore

$$OG'' : OG' :: OB : OB'.$$

Multipliant ensuite ces deux proportions par ordre, on obtient, en supprimant le facteur commun OG″,

$$OG : OG' :: OA \times OB : OA' \times OB' ;$$

alors, le second rapport de la proportion étant précisément celui des bases, OF, OF′, des deux parallélépipèdes OG, OG′, on en tire l'énoncé du théorème.

N° 597. Théorème III. Fig. 432.

Fig. 432. *Deux parallélépipèdes rectangles quelconques*, OG, OG′, *sont proportionnels aux produits de leurs bases par leurs hauteurs.*

On peut placer les deux parallélépipèdes de manière qu'ils aient un angle trièdre commun O. Cela posé, en prolongeant, s'il est nécessaire, les faces A'G' et B'G' du parallélépipède OG', on formera un nouveau parallélépipède OG'' qui pourra être considéré comme ayant pour base le rectangle OF', et OC pour hauteur ; en lui comparant le parallélépipède OG considéré comme ayant pour base OF, et la même hauteur OC, on aura Fig. 432.

$$OG : OG'' :: OF : OF'.$$

Maintenant, en comparant le même parallélépipède OG'' au parallélépipède OG' qui a la même base OF' et pour hauteur OC', on a cette seconde proportion

$$OG'' : OG' :: OC : OC';$$

d'où l'on tire, en la multipliant par ordre avec la précédente et supprimant le facteur OG'',

$$OG : OG' :: OF \times OC : OF' \times OC';$$

C. Q. F. D.

SCOLIE 1er. — Si l'on multiplie la proportion que l'on vient d'obtenir, par la suivante

$$OF : OF' :: OA \times OB : OA' \times OB' \text{ (n° 341)},$$

on obtiendra, en supprimant les facteurs OF et OF',

$$OG : OG' :: OA \times OB \times OC : OA' \times OB' \times OC';$$

c'est-à-dire que — *Deux parallélépipèdes rectangles quelconques, OG, OG', sont proportionnels aux produits des arètes adjacentes* (n° 483, *scol.* 2) [qui forment, dans chacun d'eux, un même angle trièdre].

Scol. 2. — Les démonstrations des trois théorèmes précédens s'appliqueraient également à deux parallélépipèdes quelconques, pourvu qu'ils eussent un angle trièdre égal.

N° 598. Remarque *générale sur la mesure des volumes.*— En comparant le parallélépipède rectangle quelconque OG
Fig. 433. (fig. 433) au cube *og*, on aura généralement

$$OG : og :: OA \times OB \times OC : oa \times ob \times oc.$$

Mais si l'on suppose que *oa* [$= ob = oc$] soit l'unité linéaire, et que le volume du cube *og* soit pris pour unité de volume (*voyez* le n° 594), alors la proportion précédente deviendra

$$OG = OA \times OB \times OC:$$

c'est-à-dire que dans l'*hypothèse* où l'on prend pour *unité de volume* le *cube construit sur l'unité linéaire*, — *Tout parallélépipède rectangle* OG *a pour mesure le produit de ses trois arêtes adjacentes* formant un même angle trièdre (n° 483, *scol.* 2); — ou, en d'autres termes, que le rapport abstrait du volume d'un parallélépipède rectangle OG, à l'*unité de volume*, est égal au produit des rapports abstraits de ses trois arêtes, à l'unité linéaire.

Fig. 434. Ainsi, le parallélépipède de la *figure* 434, dont les trois arêtes adjacentes sont supposées avoir respectivement 3, 5, et 8 unités de longueur, aura pour mesure le nombre

$$3 \times 8 \times 5 = 120:$$

en effet, on peut le considérer comme composé de 5 couches superposées dont chacune contient 3×8 ou 24 cubes unitaires, ce qui fait en tout 120 cubes.

Cette proposition s'exprime encore d'une manière générale en disant que — *Tout parallélépipède rectangle a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur ;*

Ou bien encore, comme au *numéro* 342, que—*Tout parallélépipède rectangle a pour mesure le produit de ses trois dimensions* [en nommant *dimensions* les longueurs des trois arêtes adjacentes qui forment chacun de ses angles trièdres].

[On verra dans ce chapitre, que la mesure d'un volume quelconque se ramène toujours à un produit de *trois facteurs*

linéaires que l'on nomme de même, ses *dimensions*, ou à une somme de produits de cette espèce.]

Le volume d'un cube a pour mesure la troisième puissance de son arête :—et de là le mot *cube* pour désigner la troisième puissance d'un nombre.

Lorsque les arêtes d'un parallélépipède rectangle forment une progression par quotient, on peut le transformer en un cube équivalent, construit sur son arête moyenne. En effet, soit a la longueur de la plus petite arête, ar l'arête moyenne, et ar^2 la plus grande des trois : le volume du parallélépipède sera mesuré par le produit $a \times ar \times ar^2$, ou a^3r^3, ou $(ar)^3$; d'où il suit qu'il est équivalent au cube construit sur l'arête ar. Mais en général, on ne peut transformer un parallélépipède rectangle en cube comme on réduit un parallélogramme rectangle en carré, parce qu'il n'existe pas de moyens pour extraire géométriquement une racine cubique comme il y en a pour extraire géométriquement une racine carrée.

Cette circonstance explique la célébrité qu'avait acquise chez les anciens, le problème de la *duplication du cube*, problème qui consiste dans la recherche de l'arête d'un cube équivalent au double d'un cube donné. Ce problème, qui marche de pair avec celui de la *quadrature du cercle*, peut de même se résoudre avec un degré d'approximation tel, que l'exactitude absolue, si l'on y parvenait, ne saurait plus désormais offrir aucune utilité réelle.

N° 599. THÉORÈME IV. Fig. 435.

Tout parallélépipède droit AF *est équivalent à un parallélépipède rectangle* AF′ *de base équivalente et de même hauteur.* Fig. 435.

Soient AD et GF les faces opposées prises pour bases, les arêtes AG, BI, CE, DF, étant perpendiculaires à ces bases.

Par les droites AG, BI, menons des plans perpendiculaires aux plans parallèles AI, CF. Les plans ainsi menés couperont respectivement les plans des faces latérales AD et GF suivant des droites AC′ et BD′, GE′ et IF′; et en supposant ces droites terminées au plan de la face opposée CF, il en résultera un nouveau parallélépipède AF′ (n° 482). Or, ce parallélépipède sera rectangle : car d'abord, AC′ et ses parallèles seront perpendiculaires aux plans AI, CF (n° 424), et par conséquent

Digitized by Google

Fig. 435. aux droites AB, C'D' (n° 411); d'où il résulte que les faces AD', GF', que l'on peut prendre pour bases, seront des rectangles; et d'ailleurs les arètes latérales AG, BI, ... restent perpendiculaires aux plans de ces bases.

Maintenant, les deux parallélépipèdes AF, AF', qui ont des bases équivalentes AD, AD' (n° 343), et même hauteur AG, sont équivalens. En effet, les deux prismes déterminés par les arètes latérales AG, CE, C'E', d'une part, et BI, DF, D'F', de l'autre, sont égaux (n° 481, *coroll.* 2); donc, en les retranchant séparément de la figure totale AGBIDFC'E', soit l'un, soit l'autre, on aura des restes équivalens. Or, l'un de ces restes est le parallélépipède AF, et l'autre le parallélépipède AF' : *donc, etc.*

N° 600. Théorème V. Fig. 435.

Tout parallélépipède AF *dont deux faces latérales sont perpendiculaires aux bases, est équivalent à un parallélépipède droit* AF' *de même base et de même hauteur.*

Nous pouvons employer la même figure, en prenant pour bases les faces AI, CF, et supposant les faces AD, GF, perpendiculaires à ces bases.

Cela posé, par les droites AG, BI, menons encore, comme dans le *numéro* précédent, des plans perpendiculaires aux faces AI, CF. Il en résultera un nouveau parallélépipède AF' qui sera droit (n° 482), et qui aura même base et même hauteur que le parallélépipède AF. — Il est facile de démontrer, comme précédemment, l'équivalence de ces deux parallélépipèdes.

N° 601. Théorème VI. Fig. 435.

Tout parallélépipède AF *est équivalent à un parallélépipède* AF' *de même base et de même hauteur, ayant deux faces latérales perpendiculaires aux bases.*

La même figure peut servir encore, en supposant quelconque le parallélépipède AF, et en menant comme ci-dessus

(n°s 599 *et* 600), par les droites AG et BI, des plans perpendiculaires au plan de la face AI que l'on prend pour base. On détermine un nouveau parallélépipède AF', de même base et de même hauteur que le parallélépipède AF, et qui a les deux faces latérales AE', BF', perpendiculaires aux bases. — Il est facile de prouver, de la même manière, que les deux parallélépipèdes sont équivalens. Fig. 435.

N° 602. Théorème VII.

Tout parallélépipède est équivalent à un parallélépipède rectangle de base équivalente et de même hauteur.

En effet, tout parallélépipède peut être transformé en un autre de même base et de même hauteur, et ayant deux faces latérales perpendiculaires aux bases (n° 601); celui-ci peut être transformé en un parallélépipède droit aussi de même base et de même hauteur (n° 600); et ce dernier peut être transformé en un parallélépipède rectangle de base équivalente et de même hauteur (n° 599). — *Donc, etc.*

Corollaire. — *Tout parallélépipède a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur.*

N° 603. Théorème VIII. Fig. 436.

Tout prisme triangulaire ADBECF *est équivalent à un prisme triangulaire droit* A'D'B'E'C'F' *de mêmes arètes latérales, et ayant pour base une section perpendiculaire aux pans du premier.* Fig. 436.

Pour le prouver, opérons comme dans le *numéro* 573.

Prolongeons suffisamment, dans un même sens, les arètes latérales AD, BE, CF; coupons ces droites perpendiculairement par un plan A'B'C' qui ne passe pas dans l'intérieur du prisme; puis prenons sur les arètes prolongées, les longueurs A'D', B'E', C'F', égales entre elles et à ces arètes. Nous déterminerons ainsi un prisme droit A'D'B'E'C'F' de mêmes arètes latérales que le prisme proposé, et ayant pour base la section faite perpendiculairement à ces arètes.

Fig. 436. Cela posé, l'espace AA'BB'CC' est égal à l'espace DD'EE'FF' : car si l'on place le triangle DEF sur son égal ABC, les droites DD', EE', FF', coïncideront respectivement avec les droites AA', BB', CC'. Maintenant, si de chacun de ces deux espaces égaux on retranche l'espace DEFA'B'C', il restera

ADBECF = A'D'B'E'C'F'; *C. Q. F. D.*

Scolie.—Le même raisonnement est applicable à un prisme oblique quelconque, comme dans le *numéro* 573 déjà cité.

Corollaire. — *Deux prismes triangulaires sont équivalens lorsqu'ils ont leurs arètes latérales toutes six de même longueur, et que les sections respectivement perpendiculaires à ces arètes sont des triangles égaux.*

Par conséquent : — *Les deux prismes triangulaires symétriques dans lesquels se décompose un parallélépipède quelconque* (n° 486), *sont équivalens.*

N° 604. Théorème IX.

Tout prisme est équivalent à un parallélépipède de base équivalente et de même hauteur.

1° Si le prisme est triangulaire, il équivaut, d'après le corollaire du théorème précédent, à la moitié d'un parallélépipède construit sur l'un de ses angles trièdres, avec les mêmes arètes ; et comme la base du prisme est aussi la moitié de celle du parallélépipède, et que d'ailleurs leur hauteur est commune, la proposition se trouve démontrée pour le prisme triangulaire.

2° Maintenant, s'il s'agit d'un prisme quelconque, on peut le décomposer en prismes triangulaires de même hauteur, et dont les bases respectives forment en somme la base du prisme total : donc la proposition est encore vraie pour un prisme quelconque.

Digitized by Google

N° 605. REMARQUE *sur la mesure du prisme.*—Tout prisme étant équivalent à un parallélépipède de base équivalente et de même hauteur, et le parallélépipède ayant pour mesure le produit de sa base par sa hauteur, il s'ensuit que

Tout prisme a aussi *pour mesure le produit de sa base par sa hauteur.*

Un prisme quelconque a également *pour mesure le produit d'une section perpendiculaire aux arêtes latérales, multipliée par leur longueur.*

Les mêmes mesures sont évidemment applicables aux *cylindres*, droits ou obliques. — C'est, au reste, ce que l'on pourrait démontrer pour le cylindre circulaire droit, par un raisonnement analogue à celui du *numéro* 348, en employant des prismes réguliers inscrits et circonscrits.

Quand il s'agit d'*un prisme triangulaire*, il est facile de voir qu'il *a* aussi *pour mesure la moitié du produit de l'aire d'une face latérale, multipliée par la perpendiculaire abaissée sur cette face, d'un point de l'arête opposée ;*

Ou bien : — *la moitié du produit de l'aire de sa surface latérale, multipliée par le rayon du cercle inscrit à une section perpendiculaire aux pans ou aux arêtes latérales.*

N° 606. PROBLÈME I.

En supposant que la quantité d'air nécessaire à la respiration, soit, pour chaque personne, de 4 mètres cubes par jour, on demande combien de personnes pourraient vivre pendant un jour avec l'air contenu dans un appartement de $12^m,5$ *de longueur,* 5^m *de largeur, et* $3^m,2$ *de hauteur.*

Pour résoudre cette question, il faut d'abord calculer la capacité de la salle, ce qui donne (n° 598)

$$12,5 \times 5 \times 3,2 = 200^{mc};$$

ensuite il faut diviser par 4, ce qui donne 50 personnes.

N° 607. PROBLÈME II.

On veut mesurer un stère [ou mètre cube] de bois, au moyen d'une membrure composée de quatre tringles rectilignes formant un carré d'un mètre de côté, dont le plan est disposé verticalement ; les bûches, au lieu d'avoir 1 mètre de longueur, ont $1^m,2$ *: — on demande quelle réduction il faut faire subir à la hauteur du parallélépipède.*

La base du parallélépipède ayant $1^m,2 \times 1^m$, ou $1^{mq},2$ de surface, il faut diviser 1 par 1,2, ce qui donne la hauteur, égale à $8\frac{1}{3}$ *décimètres.*

N° 608. PROBLÈME III.

Un rouleau cylindrique de bois de chêne a $0^m,3$ *d'épaisseur* [ou de diamètre], *et* $2^m,5$ *de longueur; on sait d'ailleurs que le poids spécifique* (*) *du bois de chêne est de* 1,17 *: — on demande le volume et le poids du rouleau.*

Le volume du rouleau sera d'abord (n° 605) :

$$\pi.(0,15)^2 \times 2,5 = 0^{mc},176714 \quad \text{ou} \quad 176^{dmc},714\,;$$

et en multipliant par 1,17, on aura le poids du rouleau, égal à $206^{kilog},756$. — (*Voyez* le n° 657.)

N° 609. PROBLÈME IV.

On demande quel volume [V] de maçonnerie il entre dans une tour ronde dont le rayon intérieur est de $1^m,3$*; l'épaisseur de* $0^m,5$*, et la hauteur de* $19^m,4$.

Ce volume (n° 605) est exprimé par

$$V = \pi[(1,8)^2 - (1,3)^2]\,19,4 = \pi \times 3,1 \times 0,5 \times 19,4\,;$$

or

$$\begin{aligned} log.\pi \ldots &= 0,49714987 \quad (\text{n° } 336) \\ log.\ 3,1\ . &= 0,49136169 \\ log.\ 0,5\ . &= \bar{1},69897000 \\ log.\ 19,4 &= 1,28780173 \end{aligned}$$

d'où

$$log.\ V = 1,97528329 = log.\ 94,4677.$$

Ainsi le volume de la maçonnerie est de $94^{mc},4677$.

(*) *Voyez* à la fin du volume, la *Table des Poids spécifiques.*

§ II. — *Mesure des Pyramides et des autres Polyèdres, etc.*

N° 610. THÉORÈME X. Fig. 437.

Deux tétraèdres, SABC, *sabc, sont équivalens lorsqu'ils ont des bases équivalentes,* ABC, *abc, et même hauteur,* MN. Fig. 437.

Plaçons d'abord les deux tétraèdres de manière qu'ils aient leurs bases sur un même plan, et leurs sommets sur une droite parallèle à ce plan. Puis, supposons que l'on partage la hauteur MN en un très grand nombre de parties égales, et que l'on mène par les points de division, des plans parallèles aux bases : soient pour un instant A'B'C', A"B"C",..., $a'b'c$, $a''b''c''$..., les sections ainsi déterminées. Les deux tétraèdres se trouveront décomposés en un même nombre de tranches

ABCA'B'C', A'B'C'A"B"C", ..., $abca'b'c'$, $a'b'c'a''b''c''$,...,

qui différeront d'autant moins de la forme prismatique, que les sections seront plus rapprochées. De plus, ces tranches seront toutes de même hauteur, et de bases équivalentes chacune à chacune (n° 575, *scol.* 1[er]); donc si elles étaient rigoureusement prismatiques, les deux tétraèdres seraient équivalens comme composés d'un même nombre de parties équivalentes chacune à chacune. La différence des deux tétraèdres, s'il en existe une, est donc d'une petitesse indéfinie, puisque les sections parallèles peuvent être supposées indéfiniment rapprochées.

Nous pouvons, au reste, prouver que cette différence est rigoureusement nulle.

En effet, soit SABC $>$ *sabc*, et SABC — *sabc* = ABC $\times$ MP. Partageons la hauteur commune des deux tétraèdres, en parties égales quelconques, mais toutefois moindres que MP; et soit MQ l'une de ces parties. Décomposons, comme ci-dessus,

Digitized by Google

Fig. 427. les deux tétraèdres en tranches d'une même hauteur égale à MQ; et soient A'B'C', A"B"C", ..., *a'b'c'*, *a"b"c"*, ..., les sections ainsi obtenues.

Cela posé, par les points B, C, B', C', ... menons parallèlement à SA, *en dehors* du tétraèdre SABC, et entre les plans ABC et A'B'C', A'B'C' et A"B"C", ..., les droites BD, CE, B'D', C'E'.... : nous formerons ainsi une série de prismes (n° 477) *excédens*, d'une même hauteur égale à MQ, et ayant respectivement pour bases *inférieures*, ABC, A'B'C'.....; leur nombre sera d'ailleurs égal à celui des sections, *y compris la base*.

De même, par les points *b'*, *c'*, *b"*, *c"*, ... menons parallèlement à *sa*, *en dedans* du tétraèdre *sabc*, et entre les plans *abc* et *a'b'c'*, *a'b'c'* et *a"b"c"*, ..., les droites *b'd*, *c'e*, *b" d'*, *c"e'*.... : nous formerons ainsi une autre série de *prismes déficiens*, de même hauteur que les premiers, et ayant respectivement pour bases *supérieures*, *a'b'c'*, *a"b"c"*.....; leur nombre sera égal à celui des sections, *non compris la base*.

Maintenant, les prismes excédens et les prismes déficiens sont équivalens *deux à deux* à partir des sommets S et *s* (n° 605); donc la somme des premiers excède la somme des derniers, du prisme AA'BDCE, ou d'une quantité ABC × MQ (n° 605). Or, on diminuera la différence en remplaçant, la somme des prismes excédens, par le tétraèdre SABC qui est inférieur à cette somme, et la somme des prismes déficiens, par le tétraèdre *sabc* qui est supérieur à cette dernière; donc

$$\text{SABC} - sabc < \text{ABC} \times \text{MQ};$$

d'où l'on tire, en substituant au premier membre sa valeur supposée,

$$\text{ABC} \times \text{MP} < \text{ABC} \times \text{MQ}, \text{ ou } \text{MP} < \text{MQ};$$

— *Ce qui est absurde.*

COROLLAIRE 1er. — *Deux tétraèdres symétriques entre eux sont équivalens* (*voyez* les nos 495; *et* 498, *scol.*).

COROLL. 2. — *Deux polyèdres symétriques entre eux sont équivalens* (n° 515).

N° 611. THÉORÈME XI.

Toute pyramide est équivalente au tiers d'un prisme de même base et de même hauteur.

Supposons d'abord qu'il s'agisse d'un tétraèdre ABCD (fig. 438) : dans cette hypothèse, menons par les points B, C, les droites BE, CF, égales et parallèles à AD; et achevons le prisme ADBECF qui aura même base ABC et même hauteur que le tétraèdre. Menons de plus le plan CDE : le prisme se trouvera décomposé en *trois* tétraèdres, ABCD, BCDE, et CDEF. Le second de ces tétraèdres, considéré comme ayant pour base BCE et D pour sommet, est équivalent au troisième, considéré comme ayant pour base CEF et D pour sommet; et celui-ci, considéré comme ayant pour base DEF et C pour sommet, est équivalent au premier, considéré comme ayant pour base ABC et D pour sommet. Donc les trois tétraèdres sont équivalens : donc le tétraèdre ABCD est le tiers du prisme : *donc, etc.* Fig. 438.

Maintenant, toute pyramide peut se décomposer en tétraèdres de même hauteur qu'elle, et ayant respectivement pour bases les triangles partiels dans lesquels se décompose sa base : donc la proposition est également vraie pour une pyramide quelconque.

N° 612. REMARQUES *sur la mesure des pyramides et des autres polyèdres.* — Toute pyramide étant le tiers d'un prisme de même base et de même hauteur, et le prisme ayant pour mesure le produit de sa base par sa hauteur, il s'ensuit que

Toute pyramide a pour mesure le tiers du produit de sa base par sa hauteur.

La même proposition est applicable à *un cône à base quelconque*, lequel *est*, par conséquent, *équivalent au tiers d'un cylindre de même base et de même hauteur.*

Digitized by Google

C'est, au reste, ce qu'il est facile de démontrer directement pour le cas d'un cône circulaire droit, en y appliquant un raisonnement semblable à celui des *numéros* 348 *et* 605, et employant des pyramides régulières inscrites et circonscrites au cône.

Quand on sait évaluer le volume d'une pyramide, on peut évaluer celui d'un polyèdre quelconque : pour cela, on le décompose en pyramides (n° 512), de même que pour évaluer l'aire d'un polygone, on le décompose en triangles (n° 345).

Ainsi par exemple, si l'on imagine des perpendiculaires abaissées de l'un des sommets du polyèdre [supposé convexe], sur toutes les faces qui ne passent pas par ce point, le volume du polyèdre aura pour mesure, le tiers de la somme des produits que l'on obtient en multipliant chacune de ces dernières faces, par la perpendiculaire correspondante.—(*Voyez* le n° 654.)

Lorsqu'il s'agit d'un polyèdre régulier, comme alors la figure est décomposable en autant de pyramides régulières égales qu'il a de faces (n° 527), et que de plus, chaque pyramide a pour base une face du polyèdre et son apothème pour hauteur, il s'ensuit que

Tout polyèdre régulier a pour mesure, le tiers du produit de sa surface multipliée par son apothème,

Proposition que l'on peut encore énoncer ainsi :

Tout polyèdre régulier a le même volume qu'une pyramide construite sur une base équivalente à la surface du polyèdre, avec l'apothème de ce polyèdre pour hauteur.

N° 613. Théorème XII. Fig. 439.

Fig. 439. *Tout prisme triangulaire tronqué* ABCDEF *est équivalent à la somme de trois tétraèdres ayant pour base commune l'une des bases* ABC *du tronc, et pour sommets les angles de la base opposée.*

Pour le prouver, menons le plan BCD et le plan CDE : le prisme tronqué se trouvera décomposé en *trois* tétraèdres, ABCD, BCDE, et CDEF. Le premier a d'abord pour base ABC et pour sommet le point D. Le second, considéré comme ayant

pour base BCE et pour sommet le point D, peut être transformé en un autre ayant même base BCE et pour sommet le point A (n° 610); et ce nouveau tétraèdre peut être considéré comme ayant pour base ABC et pour sommet E. Le troisième tétraèdre CDEF peut être considéré comme ayant pour base CEF et D pour sommet; il peut donc être transformé en un autre qui aurait la même base CEF et A pour sommet, ou ACF pour base et E pour sommet. Enfin, celui-ci peut être transformé en un autre ayant la même base ACF et B pour sommet, ou bien ABC pour base et F pour sommet.—*Donc, etc.* Fig. 439.

SCOLIE 1er. — *Tout prisme triangulaire tronqué a pour mesure, le produit d'une de ses bases multipliée par le tiers de la somme des trois perpendiculaires abaissées respectivement sur cette base, de chacun des sommets de la base opposée.*

Si le prisme tronqué est droit, les perpendiculaires sont les arêtes elles-mêmes.

Scol. 2. — En menant un plan parallèle à l'une des bases d'un prisme triangulaire tronqué, à une distance égale à la distance moyenne de cette base aux *trois* sommets opposés, on détermine un prisme équivalent au tronc de prisme proposé.

N° 614. THÉORÈME XIII. Fig. 440.

Tout parallélipipède tronqué MNOPABCD est équivalent aux *trois quarts* de la somme des quatre pyramides construites sur l'une de ses bases MNOP, et ayant pour sommets respectifs ceux des angles de la base opposée; — et par conséquent il *a pour mesure le produit d'une de ses bases* MNOP *par le quart de la somme des quatre perpendiculaires abaissées respectivement sur cette base, de chacun des angles de la base opposée.* Fig. 440.

Pour le prouver, menons les deux plans AMPD, BNOC, dont chacun partage la figure en deux prismes triangulaires tronqués; et supposons d'abord, pour simplifier la figure, que les arêtes latérales soient perpendiculaires à la base MNOP. — Nous aurons

Fig. 440.

$$MNPABD = \frac{1}{3} MNP \times (AM + BN + DP),$$

$$MOPACD = \frac{1}{3} MOP \times (AM + CO + DP),$$

$$OMNCAB = \frac{1}{3} OMN \times (CO + AM + BN),$$

$$OPNCDB = \frac{1}{3} OPN \times (CO + DP + BN).$$

Ajoutons toutes ces égalités membre à membre, en observant que

$$MNPABD + MOPACD = OMNCAB + OPNCDB = MNOPABCD,$$

et que $MNP = MOP = OMN = OPN = \frac{1}{2} MNOP$,

nous obtiendrons, en divisant par 2,

$$MNOPABCD = \frac{1}{4} MNOP \times (AM + BN + CO + DP);$$

C. Q. F. D.

Maintenant, si les arètes latérales ne sont pas perpendiculaires à la base inférieure MNOP, on les remplace par les perpendiculaires abaissées des sommets de la base supérieure. — Il est facile de voir que la proposition est également vraie.

Scolie. — Le quart de la somme des quatre arètes latérales est égal à la demi-somme de deux arètes latérales opposées quelconques, ou à la distance des centres des deux bases.

COROLLAIRE. — En menant un plan parallèle à l'une des bases d'un parallélépipède tronqué, à une distance égale à la distance moyenne de cette base aux sommets opposés, on détermine un parallélépipède équivalent au tronc proposé.

Une proposition semblable ne serait pas vraie pour un tronc de prisme quelconque ; mais elle est exacte pour un tronc de prisme régulier : c'est-à-dire que

Tout tronc de prisme régulier est équivalent à un prisme régulier de même base et de même axe ;

Et que par conséquent *il a pour mesure le produit de sa base* [régulière] *par son axe.*

Un mode analogue d'évaluation est applicable à tout tronc de cylindre circulaire droit : c'est-à-dire que

Fig 391. *Tout tronc de cylindre circulaire droit* (fig. 391) *est équivalent à un cylindre circulaire droit de même base et de même axe ;*

Et qu'*il a pour mesure le produit de sa base* [circulaire] *par son axe.*

Cette dernière proposition peut se démontrer directement par le moyen déjà employé au *numero* 573 (*coroll.* 3) ; et elle est applicable à un cylindre circulaire oblique.

N° 615. **Théorème XIV.**

Tout tronc de pyramide à bases parallèles est équivalent à la somme de trois pyramides qui auraient pour hauteur commune la hauteur du tronc, et pour bases respectives la base inférieure du tronc, sa base supérieure, et une moyenne proportionnelle entre ces deux bases.

Nous supposerons d'abord que la figure proposée est un tronc de tétraèdre ABCDEF (fig. 441). Cela posé, menons les plans BCD, CDE : la figure se trouvera décomposée en *trois* tétraèdres ABCD, BCDE, et CDEF. Le premier a pour base ABC et pour hauteur celle du tronc; le troisième a pour base DEF et pour hauteur celle du tronc; il ne reste donc plus à considérer que le deuxième tétraèdre BCDE. Or, par le point D, et dans le plan de la face AE, menons DG parallèle à EB : DG sera aussi parallèle au plan BCEF (n° 393); donc le tétraèdre BCDE peut être remplacé par un tétraèdre qui aurait pour base BCE et pour sommet le point G, ou bien BCG pour base et E pour sommet, et par conséquent même hauteur que le tronc. Pour évaluer sa base BCG, menons GI parallèle à AC; le triangle BGI sera égal au triangle EDF (n° 172); et BCG sera moyen proportionnel (n° 352, *coroll.* 1er) entre ABC et GBI, et par conséquent entre ABC et DEF : ce qui achève de prouver la proposition. Fig. 441.

Voyons maintenant le cas où le tronc, LMNOPQRSTU (fig. 442), n'est pas triangulaire; et complétons la pyramide VLMNOP. Nous pouvons imaginer, sur le plan de la base, un triangle ABC équivalent au polygone LMNOP; sur ce triangle comme base, construisons un tétraèdre ZABC ayant son sommet sur une droite parallèle à la base, menée par le point V : le tétraèdre et la pyramide seront équivalens. Prolongeons, au travers du tétraèdre, le plan QRSTU : nous y déterminerons Fig. 442.

une section DEF équivalente au polygone QRSTU (n° 575, *scol.* 1er); par conséquent le tétraèdre partiel ZDEF et la pyramide partielle VQRSTU seront equivalens comme ayant des bases équivalentes et même hauteur. Donc les deux troncs seront équivalens; et comme ils ont d'ailleurs les bases respectivement équivalentes et même hauteur, le théorème démontré pour l'un est également vrai pour l'autre.

SCOLIE. — La proposition précédente, ainsi que la démonstration même [à quelques mots près], est applicable à un cône tronqué à bases parallèles, et quelconque d'ailleurs. — Ainsi, en particulier,

Fig. 399. *Un tronc de cône circulaire droit à bases parallèles* (fig. 399) *est équivalent à la somme de trois cônes de même hauteur, ayant respectivement pour bases la base inférieure du tronc, sa base supérieure, et un troisième cercle moyen proportionnel entre les deux premiers.*

N° 616. *Autre* REMARQUE *sur la mesure des polyèdres.* — Le moyen indiqué ci-dessus (n° 612) pour évaluer le volume d'un polyèdre, n'est pas le seul dont on puisse se servir. Ainsi par exemple, on peut employer une méthode analogue à celle du *numéro* 347, relative à la mesure des aires des polygones. Pour cela, on suppose un plan mené dans l'intérieur du polyèdre; puis on abaisse, par chacune des arètes, des plans perpendiculaires au premier. Le polyèdre se trouve ainsi décomposé en prismes tronqués et en pyramides, que l'on évalue chacun en particulier.

Ce moyen, souvent impraticable, peut être remplacé par un autre (*voyez* le n° 347) qui consiste à enclore le polyèdre dans une figure moins irrégulière, telle qu'un parallélépipède, dont on évalue le volume; puis à déterminer les volumes des espaces vides, et à les retrancher du premier.

Quant aux espaces terminés par des surfaces courbes, il est facile de les évaluer *approximativement* par un moyen analogue (*voyez* le n° 347). La question pouvant aisément se ramener au cas d'un espace compris entre une surface courbe et une base plane, supposons que l'on partage cette base en petites portions rectangulaires égales entre elles, au moyen d'une série de parallèles équidistantes, perpendiculaires à une autre série de parallèles aussi équidistantes; puis, que par chacune de ces droites on élève des plans perpendiculaires à la base. L'espace à évaluer se trouvera ainsi décomposé en portions que l'on pourra considérer comme des parallélépipèdes rectangles tronqués : car si les plans parallèles sont suffisamment rapprochés, les quadrilatères courbes qui terminent ces parallélépipèdes seront à

peu près plans. En faisant la somme de tous les parallélépipèdes tronqués, on trouvera pour mesure résultante : *le produit de l'aire d'un petit rectangle de la base, multipliée par la somme de toutes les perpendiculaires.*

Dans l'emploi de cette méthode, il y a plusieurs observations à faire : — 1° les petites portions de la base, adjacentes à son contour, ne sont en général que des portions de rectangles : on peut négliger celles qui, *à vue*, paraissent moindres que la moitié d'un rectangle, et considérer les autres comme des rectangles entiers ; — 2° les perpendiculaires extrêmes doivent être considérées comme nulles ; — 3° cependant, si l'espace que l'on considère avait en outre des faces planes faisant en même temps partie des plans perpendiculaires à la base, on ne devrait faire entrer dans la somme des perpendiculaires, que *la moitié* de celles des *bords* parce qu'elles n'appartiennent qu'à *deux* parallélépipèdes, et *le quart* seulement de celles qui servent d'*arêtes* parce qu'elles n'appartiennent qu'à *un* parallélépipède (*voyez le Cours normal* de M. Dupin).

Enfin l'on peut encore, pour évaluer l'espace terminé par une surface courbe, y supposer tracées des lignes qui seraient les intersections de cette surface par une série de plans parallèles. Alors, en supposant ces plans suffisamment rapprochés, l'espace à mesurer se trouvera partagé en tranches assez minces pour qu'on puisse les considérer comme terminées, soit par des surfaces planes, soit par des portions de surfaces cylindriques, ou coniques, ou sphériques. Alors, on mesurera chacune de ces tranches, et l'on fera la somme des résultats obtenus (*voyes* la *Géométrie appliquée à l'industrie*, de M. Bergery).

Dans le paragraphe suivant, nous allons nous occuper spécialement des espaces terminés par la surface sphérique.

N° 617. Problème I.

Étant donnée l'arête d'un cône droit, égale à** $25^m,15$, **et sa hauteur** $17^m,3$, **trouver son volume (voyez le n° 578).

Pour cela on a (n° 612)

$$V = \tfrac{1}{3}.\pi \times 17,3 \times 42,45 \times 7,85;$$

$$log.\ V = log.\ \pi + log.\ 17,3 + log.\ 42,45 + log.\ 7,85 - log.\ 3,$$

ou, effectuant les calculs,

$$log.\ V = 3,7808221 = log.\ 6037,01\ ;$$

d'où $$V = 6037^{mc},01$$

N° 618. PROBLÈME II.

On demande le volume d'un tronc de pyramide à bases parallèles, dont la hauteur est de $9^{m},6$, la petite base ayant $2^{mq},25$ de surface, et les deux côtés de la grande base étant à leurs homologues de la petite dans le rapport de 4 à 3.

En nommant x l'aire de la grande base, on a d'abord :

$$x : 2,25 :: 4^2 : 3^2, \quad \text{d'où} \quad x = 4.$$

Le volume cherché sera donc (n° 615) :

$$\frac{1}{3}(4 + 2,25 + \sqrt{4 \times 2,25}).9,6 = 3,2 \times 9,25 = 29^{mc},6.$$

N° 619. PROBLÈME III.

Les rayons des bases d'un cône tronqué ont 3^{m} et 5^{m}, et son arète a 7^{m} de longueur ; — on demande son volume (voyez le n° 576).

Ce volume a pour mesure (n° 615, *scol.*) :

$$\frac{1}{3}.\pi\sqrt{7^2 - 2^2} \times (3^2 + 5^2 + 3.5) = 49.\pi\sqrt{5} = 344^{mc},216.$$

§ III. — *Du Volume de la Sphère.*

N° 620. LEMME I. Fig. 443, 444, et 445.

Fig. 443—445. *Le volume de l'espace engendré par la révolution d'un triangle quelconque* OAB *tournant autour d'une droite* MN *menée dans son plan par un de ses sommets* O, est équivalent à celui d'une pyramide qui aurait une base équivalente à la surface engendrée par le côté AB opposé à ce sommet, et pour hauteur la hauteur OP du triangle, qui correspond à ce côté

considéré comme base ; — et par conséquent il *a pour mesure le tiers du produit de la surface engendrée par le côté apposé à ce sommet, multipliée par la hauteur du triangle, qui correspond à ce côté pris pour base.*

Pour démontrer cette proposition, nous considérerons *trois cas*.

1er *Cas* (fig. 443) : — L'axe de révolution se confondant avec l'un des côtés OA. Fig. 443.

Abaissons du sommet opposé B la perpendiculaire B*b* sur l'axe de révolution, et d'un second sommet O la perpendiculaire OP sur la base AB du triangle. Nous aurons, en désignant par *vol.*OAB le volume de l'espace engendré par le triangle OAB, par *cercle b*B l'aire du cercle qui a pour rayon *b*B, par *surf.* AB l'aire de la surface engendrée par la droite AB dans la révolution du triangle [et ainsi des autres] :

$$\begin{aligned} vol.\,\mathrm{OAB} &= vol.\,\mathrm{AB}b + vol.\,\mathrm{OB}b \\ &= \frac{1}{3}\,cercle\,b\mathrm{B} \times \mathrm{A}b + \frac{1}{3}\,cercle\,b\mathrm{B} \times \mathrm{O}b \\ &= \frac{1}{3}\,cercle\,b\mathrm{B} \times \mathrm{AO}. \end{aligned}$$

Mais on a (n° 574, *scol.*)

$$cercle\,b\mathrm{B} : surf.\,\mathrm{AB} :: b\mathrm{B} : \mathrm{AB};$$

en outre, de la similitude des triangles A*b*B, APO, il résulte

$$b\mathrm{B} : \mathrm{AB} :: \mathrm{OP} : \mathrm{AO};$$

par conséquent, $cercle\,b\mathrm{B} : surf.\,\mathrm{AB} :: \mathrm{OP} : \mathrm{AO};$

d'où $cercle\,b\mathrm{B} \times \mathrm{AO} = surf.\,\mathrm{AB} \times \mathrm{OP},$

et enfin $vol.\,\mathrm{AOB} = \frac{1}{3}\,surf.\,\mathrm{AB} \times \mathrm{OP}.$

N. B. — La perpendiculaire OP pourrait être extérieure au triangle, ou se confondre avec le côté OB : le résultat serait le même.

Fig. 444. 2ᵉ *Cas* (fig. 444) : — L'axe de révolution étant rencontré en un point R par la base AB du triangle, suffisamment prolongée.

Nous aurons alors, d'après la démonstration précédente, en conservant les mêmes notations,

$$\begin{aligned} vol.\,\text{OAB} &= vol.\,\text{ORB} - vol.\,\text{ORA} \\ &= \frac{1}{3}\,surf.\,\text{RB} \times \text{OP} - \frac{1}{3}\,surf.\,\text{RA} \times \text{OP} \\ &= \frac{1}{3}\,surf.\,\text{AB} \times \text{OP}, \end{aligned}$$

Fig. 445. 3ᵉ *Cas* (fig. 445) : — L'axe de révolution étant parallèle à la base AB du triangle.

Dans ce cas, soit de plus, A*a* la perpendiculaire abaissée du point A sur l'axe MN : les trois perpendiculaires A*a*, B*b*, OP, seront égales ; et nous aurons

$$\begin{aligned} vol.\,\text{OAB} &= vol.\,a\text{AB}b - vol.\,\text{O}\text{A}a - vol.\,\text{OB}b \\ &= cercle\,\text{OP} \times ab - \frac{1}{3}\,cercle\,\text{OP} \times \text{O}a - \frac{1}{3}\,cercle\,\text{OP} \times \text{O}b \\ &= cercle\,\text{OP} \times ab - \frac{1}{3}\,cercle\,\text{OP} \times ab \\ &= \frac{2}{3}\,cercle\,\text{OP} \times ab. \end{aligned}$$

Or (nᵒ 572, *scol.*), $cercle\,\text{OP} : surf.\,\text{AB} :: \text{OP} : 2.ab,$

d'où $2.cercle\,\text{OP} \times ab = surf.\,\text{AB} \times \text{OP};$

donc $vol.\,\text{OAB} = \frac{1}{3}\,surf.\,\text{AB} \times \text{OP}.$

N. B. — La proposition est toujours vraie, quelle que soit la situation de la perpendiculaire OP.

Scolie 1ᵉʳ. — Il y aurait encore à examiner le cas où l'axe de révolution coupe la surface du triangle : on obtiendrait alors une portion de volume qui, étant produite deux fois dans la révolution de ce triangle, se trouverait

aussi comprise deux fois dans l'expression de la mesure. Mais cette circonstance ne devant pas se présenter dans les applications que nous aurons à faire de la proposition précédente, il est inutile de nous en occuper. Fig. 443 — 445

Scol. 2. — Dans le cas du triangle isocèle, la mesure trouvée dans le théorème ci-dessus, devient

$$\frac{1}{3}.\ 2\,\pi.\text{OP}.ab.\text{OP} = \frac{2}{3}\,\pi.\text{OP}^2.\ ab.$$

N° 621. LEMME II. Fig. 446.

Le volume de l'espace engendré par la révolution d'un secteur polygonal régulier OABCD *tournant autour d'une droite* MN *qui passe par son centre* O, est le même que celui d'une pyramide dont la base serait équivalente à la surface engendrée par la révolution de la ligne brisée régulière qui sert de base à ce secteur, et dont la hauteur serait égale au rayon du cercle inscrit; — et par conséquent il *a pour mesure le tiers du produit de sa surface extérieure multipliée par l'apothème.* Fig. 446.

En effet, en nommant OP, OQ, OR, les perpendiculaires abaissées du centre O sur les côtés AB, BC, CD, on a, d'après le lemme précédent (n° 620),

$$vol.\ \text{OAB} = \frac{1}{3}\,surf.\ \text{AB} \times \text{OP},$$

$$vol.\ \text{OBC} = \frac{1}{3}\,surf.\ \text{BC} \times \text{OQ},$$

$$vol.\ \text{OCD} = \frac{1}{3}\,surf.\ \text{CD} \times \text{OR},$$

. . . . ;

or $\text{OP} = \text{OQ} = \text{OR} \ldots$:

donc $vol.\ \text{OABCD} = \frac{1}{3}\,surf.\ \text{ABCD} \times \text{OP}$;

C. Q. F. D.

Corollaire. — Le volume proposé a pour mesure les *deux tiers* du produit de l'aire du cercle inscrit, multipliée par la projection de la ligne génératrice sur l'axe (*voyez* le n° 583).

Scolie. — La proposition s'applique également à un demi-polygone régulier dont les extrémités aboutissent à l'axe.

N° 622. THÉORÈME XV. Fig. 288.

Fig. 288. *Le volume d'une sphère* OA *est le même que celui d'une pyramide dont la base serait équivalente à la surface sphérique, et qui aurait le rayon pour hauteur.*

Cette proposition résulte de ce que, la surface sphérique pouvant être considérée comme composée d'une infinité de polygones plans infiniment petits, la sphère elle-même peut être considérée comme composée de pyramides ayant pour bases ces polygones, et le rayon pour hauteur. Elle se déduirait encore de ce que la sphère peut être regardée comme la limite de l'espace engendré par un demi-polygone régulier tournant autour de son diamètre (n° 621, *scol.*).

Au reste, la proposition se démontre rigoureusement en faisant voir par les moyens ordinaires (*voyez* les n°s 348, 584, *etc.*), que le tiers du produit de la surface extérieure multipliée par le rayon, ne saurait être la mesure d'une sphère plus petite ni d'une sphère plus grande que la sphère OA.

COROLLAIRE. — Si l'on nomme r le rayon de la sphère et d son diamètre, son volume aura pour expression

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \text{ ou } \frac{1}{6}\pi d^3.$$

SCOLIE Ier. — *Les polyèdres* [ou figures quelconques] *circonscrits à la sphère ont pour mesure, le tiers du produit de leurs surfaces respectives multipliées par le rayon;* — et par conséquent *leurs volumes sont proportionnels aux surfaces.*

SCOL. 2. — Par suite de la remarque précédente,

Le volume de la sphère, celui du cylindre circonscrit, et celui du cône équilatéral circonscrit (fig. 425), *sont entre eux* :: 4 : 6 : 9; Fig. 425.

C'est ce qu'il serait d'ailleurs très facile de démontrer directement.

Le volume du cylindre est donc *moyen proportionnel entre les deux autres; ...* etc.

Voyez le *numéro* 584 (*scol.* 1er).

SCOL. 3. — On démontrerait pareillement, que — *Le volume de la sphère, celui du cylindre équilatéral inscrit, et celui du cône équilatéral inscrit* (fig. 426), *sont entre eux* :: 32 : $12\sqrt{2}$: 9; Fig. 426.

Le volume du cylindre est encore *moyen proportionnel entre les deux autres.*

[Voyez le *numéro* 584 (*scol.* 2).]

SCOL. 4. — *La sphère est plus grande que tout polyèdre régulier de même surface.* — Il en est de même d'un polyèdre quelconque (*voyez* le nº 348, *coroll.* 2); et de là résulte que — *La sphère est la figure qui, pour une surface donnée, a le* MAXIMUM *de volume, ou qui, pour un volume donné, a le* MINIMUM *de surface.*

Nº 623. THÉORÈME XVI. Fig. 447.

Tout secteur sphérique OBAB' *est équivalent à une pyramide dont la base serait équivalente à la calotte correspondante, et qui aurait le rayon pour hauteur.* Fig. 447.

Même raisonnement que dans le cas d'une sphère (nº 622).

Ainsi, pour prouver par la *réduction à l'absurde*, que le tiers du produit de l'aire de la calotte multipliée par le rayon, n'est pas la mesure d'un espace plus grand ni d'un espace plus petit :

Considérons un secteur sphérique concentrique au premier, correspondant à une calotte *bab'* dont la base soit sur un même plan que celle de la calotte BAB' (*voyez* le nº 585);

et supposons que l'on ait

$$\frac{1}{3} \textit{surf. cal. } \mathrm{BAB'} \times \mathrm{OA} = \textit{vol. sect. } \mathrm{O}bab'.$$

Cela posé, inscrivons une ligne polygonale régulière à l'arc générateur AB ; et soit OP son apothème : nous aurons

$$\frac{1}{3} \textit{surf. pol. } \mathrm{BPAB'} \times \mathrm{OP} = \textit{vol. pol. } \mathrm{OBPAB'};$$

ce qui est absurde, puisque, d'une part,

$$\textit{surf. pol. } \mathrm{BPAB'} < \textit{surf. cal. } \mathrm{BAB'},$$

et $$\mathrm{OP} < \mathrm{OA},$$

tandis que, d'autre part,

$$\textit{vol. pol. } \mathrm{OBPAB'} > \textit{vol. sect. } \mathrm{O}bab'.$$

N. B. — La démonstration précédente supposant que le secteur est moindre qu'une demi-sphère, il faut pour le cas opposé, opérer par soustraction, comme dans le *numéro* 585.

COROLLAIRE 1er. — *Le volume d'un secteur sphérique est à celui de la sphère entière, comme la hauteur de la calotte qui lui sert de base est au diamètre;*

Il a pour mesure le tiers du produit de la calotte par le rayon, ou $\frac{2}{3}\pi r^2 h$, ou $\frac{1}{6}\pi d^2 h$, en nommant h la hauteur de la calotte, r le rayon de la sphère, et d son diamètre (*voyez* le n° 585, *coroll.* 2).

Coroll. 2. — La différence de deux secteurs OACA′, OBCB′

Fig. 448. (fig. 448), correspondant respectivement à deux calottes dont les bases sont parallèles, a pour mesure, le tiers du produit de l'aire de la zone correspondante multipliée par le rayon, ou $\frac{2}{3}\pi . \mathrm{OA}^2 \times \mathrm{DE}$.

Fig. 8. *Scolie* 1er. — Le volume du segment sphérique ACB (fig. 8) peut s'obtenir en retranchant du secteur OACB le cône OAB ; le volume du segment ADB s'obtient au contraire en ajoutant le même cône au secteur OADB.

Digitized by Google

Scol. 2. — Le volume d'une tranche de sphère, telle que ABB'A' (fig. 448), s'obtient en retranchant le segment BCB' du segment ACA'. Fig. 448.

N° 624. THÉORÈME XVII. Fig. 448.

Le volume de l'espace engendré par la révolution d'un segment circulaire AKB *tournant autour d'un axe* OC *mené dans son plan, par son centre* O, [et extérieur à ce segment], *est à celui de la sphère qui aurait pour diamètre la corde* AB *de ce segment, comme la projection* DE *de cette corde sur l'axe, est à la corde elle-même.*

Soit OP la perpendiculaire abaissée du centre sur la corde AB, et BL la perpendiculaire abaissée du point B sur la droite AD; on aura :

$$vol.\text{OAKB} = \frac{2}{3}\pi.\text{OA}^2 \times \text{DE} \qquad (\text{n}^\circ\ 623,\ coroll.\ 2),$$

et $$vol.\text{OAPB} = \frac{2}{3}\pi.\text{OP}^2 \times \text{DE} \qquad (\text{n}^\circ\ 620);$$

d'où l'on tire, en retranchant,

$$vol.\text{AKB} = \frac{2}{3}\pi\,(\text{OA}^2 - \text{OP}^2) \times \text{DE} = \frac{2}{3}\pi.\text{AP}^2 \times \text{DE};$$

ou bien encore

$$vol.\ \text{AKB} = \frac{1}{6}\pi.\text{AB}^2 \times \text{DE};$$

C. Q. F. D.

Scolie.—Lorsque l'axe est parallèle à la corde du segment, le volume devient un *anneau* équivalent à la sphère de même hauteur.

N° 625. Théorème XVIII. Fig. 448.

Fig. 448. *Une tranche sphérique* AKBB′K′A′ *est équivalente à la demi-somme de deux cylindres de même hauteur* DE *que la tranche, et ayant respectivement pour bases celles de la tranche, plus une sphère ayant cette même hauteur pour diamètre.*

On a (n° 624) $vol.\ AKB = \frac{1}{6}\pi . AB^2 \times DE$, et

$vol.\ ABED = \frac{1}{3}\pi (AD^2 + BE^2 + AD \times BE) \times DE$ (n° 615, *scol.*);

d'où $vol.\ AKBED$, ou, ce qui est la même chose,

$$AKBB'K'A' = \frac{1}{6}\pi (2.AD^2 + 2.BE^2 + 2.AD \times BE + AB^2) \times DE;$$

mais $AB^2 = BL^2 + AL^2 = DE^2 + (AD - BE)^2$

$$= DE^2 + AD^2 + BE^2 - 2AD \times BE;$$

donc $AKBB'K'A' = \frac{1}{6}\pi (3.AD^2 + 3.BE^2 + DE^2) \times DE;$

ou enfin $AKBB'K'A' = \frac{1}{2}\pi . (AD^2 + BE^2) \times DE + \frac{1}{6}\pi . DE^3.$

Scolie. — Si l'on fait $BE = 0$ dans l'expression précédente, on aura le volume du segment ACA′, qui se réduit à

$$\frac{1}{2}\pi . AD^2 \times CD + \frac{1}{6}\pi . CD^3,$$

[parce que DE devient égal à CD].

On peut lui donner encore une autre forme, en remplaçant AD^2 par $(2.OC - CD) \times CD$: elle devient alors

$$\pi . CD^2 \times (OC - \frac{1}{3}CD).$$

N° 626. THÉORÈME XIX.

Dans une même sphère ou dans des sphères égales,— *Les volumes des coins sphériques sont proportionnels aux arcs ou aux angles dièdres correspondans.*

Démonstration analogue à celle des *numéros* 447, 586, *etc.*

COROLLAIRE 1[er]. — *Le volume d'un coin est à celui de la sphère, comme l'angle dièdre correspondant est à* 4 DROITS, *ou comme l'arc de grand cercle correspondant est à la circonférence d'un grand cercle;*

Il est le même que celui d'une pyramide construite sur une base équivalente au fuseau correspondant, et ayant le rayon pour hauteur.

COROLL. 2.— Lorsqu'on prend pour unité de coin sphérique, le quart de sphère,

Tout coin sphérique a la même mesure que l'angle dièdre correspondant, ou *que l'arc de grand cercle correspondant.*

La mesure absolue du coin, rapportée au cube qui a pour arète l'unité linéaire, est $\frac{1}{3}A\pi r^3$ (n° 586, *coroll.* 2), ou *le tiers* du produit du fuseau correspondant multiplié par le rayon, puisque *le quart de sphère* vaut $\frac{1}{3}\pi r^3$.

N° 627. THÉORÈME XX. Fig. 428.

Deux pyramides triangulaires sphériques symétriques entre elles, OABC, O'A'B'C', *sont équivalentes.* Fig. 428.

Voyez le *numéro* 587.

COROLLAIRE. — *Deux pyramides sphériques symétriques entre elles,* et de bases quelconques d'ailleurs, *sont équivalentes.*

N° 628. THÉORÈME XXI. Fig. 429

Fig. 429. *Une pyramide triangulaire sphérique* OABC *est équivalente à l'excès de la demi-somme des coins qui correspondent à ses angles, sur un coin droit.*

Voyez le *numéro* 588 et les *corollaires.*

COROLLAIRE 1er. — *Toute pyramide sphérique* est équivalente à une pyramide construite sur une base plane équivalente à sa base, et ayant le rayon pour hauteur; — et par conséquent elle *a pour mesure, le tiers du produit de l'aire du triangle sphérique qui lui sert de base, multipliée par son rayon.*

COROLL. 2. — *Les pyramides sphériques appartenant à une même sphère, sont proportionnelles à leurs bases.*

N° 629. PROBLÈME I.

[Dans les mêmes hypothèses que celles déjà faites au *numéro* 590] — *On demande le volume* [v] *de la terre, et son poids* [p], [*sa densité moyenne étant, d'après Cavendish, égale à* 4,5].

Pour cela, on a d'abord (n° 622)

$$v = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{c^3}{6\pi^2};$$

d'où appliquant les logarithmes,

$$log.\ v = 21{,}033728 97,$$

et par conséquent,

$v =$ 1 080 759 000 *myriamètres cubes.*

Ensuite, multipliant le nombre de *mètres cubes* contenus dans v, par 4500, on a le poids de la terre exprimé en kilogrammes:

$$\begin{aligned} log.v\ldots &= 21{,}03372897 \\ log.4500 &= \ \ 3{,}65321251 \\ \hline log.p\ldots &= 24{,}68694148 \end{aligned}$$

d'où $p = 4\,863\,420\,000\,000\,000$ *millions de tonneaux*, chacun de 1000 *kilogrammes*.

N° 630. PROBLÈME II.

Étant donné le volume d'une sphère, égal à 1843^{mc},086278, *trouver son rayon* [r].

On a (n° 622, *coroll.*) : $1843^{mc},086278 = \frac{4}{3}\pi r^3$,

d'où $r = \sqrt[3]{\frac{3}{4}}\sqrt{1843{,}086278} = 7^m{,}61.$

N° 631. PROBLÈME III.

L'arète d'un cube a 0^m,36 *de longueur : — on demande le volume de la sphère circonscrite.*

Le carré de la diagonale (n° 487, *coroll.* 2) vaut $3.(0{,}36)^2$; et par conséquent, la diagonale elle-même a de longueur, $0{,}36.\sqrt{3}$. Cette diagonale étant d'ailleurs le diamètre de la sphère demandée, il s'ensuit que le volume de celle-ci a pour expression (n° 622, *coroll.*)

$$\frac{1}{6}.\pi.3\sqrt{3}.(0{,}36)^3 = \frac{1}{2}.\pi\sqrt{3}.(0{,}36)^3.$$

$$\begin{aligned} log.\pi\ldots\ldots\ldots &= 0{,}4971499 \\ \tfrac{1}{2}.log.3\ldots\ldots\ldots &= 0{,}2385606 \\ 3.log.0{,}36\ldots\ldots &= \bar{2}{,}6689075 \\ C.log.2\ldots\ldots\ldots &= 9{,}6989700 \\ \hline &\ \ \bar{1}{,}1035880 = log.0{,}126937. \end{aligned}$$

Ainsi, le volume cherché est, à *un centimètre cube* près, 0^{mc},126937.

N° 632. PROBLÈME IV.

Évaluer le volume [v] *d'une tranche sphérique, connaissant les rayons de ses deux bases,* $R=0^m,25$, $r=0^m,19$, *ainsi que sa hauteur,* $h=0^m,035$.

Pour cela, on a généralement (n° 625, *scol.*) :

$$V=\frac{1}{6}.\pi h^3+\frac{1}{2}.\pi h\,(R^2+r^2).$$

Or, $h^3=(0,035)^3=0,000042875$,

d'où l'on tire d'abord $\frac{1}{6}.\pi h^3=0,000022449.$

Ensuite $R^2=(0,25)^2=0,0625$,

$r^2=(0,19)^2=0,0361$,

d'où $R^2+r^2=0,0986$;

et de plus, $\frac{1}{2}.\pi h=0,0549779$;

donc secondement

$$\frac{1}{2}.\pi h\,(R^2+r^2)=0,0549779\times 0,0986=0,005420821.$$

Par conséquent $V=0,005443270$,

à *un millimètre cube* près.

§ IV. — *Comparaison des Volumes.*

N° 633. THÉORÈME XXII. Fig. 449.

Deux tétraèdres, ABCD, AB'C'D', *qui ont un angle trièdre égal,* A, *sont proportionnels aux produits des arêtes qui forment cet angle trièdre.*

Nous pouvons d'abord placer les deux tétraèdres de manière que leurs angles trièdres égaux coïncident. Alors, prenons

pour base le plan d'une de leurs faces communes; et abaissons, des sommets opposés, les perpendiculaires DO et D'O' sur ce plan. Les droites DO et D'O' seront les hauteurs respectives des deux tétraèdres; elles appartiendront à un même plan perpendiculaire à la base (n° 423), lequel coupera cette base suivant la droite AO'O et passera par l'arète AD.

Cela posé, nous aurons d'abord

$$ABCD : AB'C'D' :: ABC \times DO : AB'C' \times D'O' \quad (\text{n}^\circ\ 612);$$

mais $ABC : AB'C' :: AB \times AC : AB' \times AC'$ (n° 352),

et de plus $DO : D'O' :: AD : AD'$ (n° 260);

d'ailleurs, en multipliant terme à terme les deux dernières proportions, nous aurons encore

$$ABC \times DO : AB'C' \times D'O' :: AB \times AC \times AD : AB' \times AC' \times AD' :$$

donc $ABCD : AB'C'D' :: AB \times AC \times AD : AB' \times AC' \times AD'$;

C. Q. F. D.

Scolie. — La *réciproque* est *fausse*.

N° 634. THÉORÈME XXIII. Fig. 411.

Deux tétraèdres semblables sont proportionnels aux cubes de leurs arètes homologues.

En effet, les angles trièdres des deux tétraèdres étant égaux chacun à chacun (n° 560), on a, d'après le théorème précédent,

$$SABC : S'A'B'C' :: SA \times SB \times SC : S'A' \times S'B' \times S'C'.$$

D'ailleurs $SB : S'B' :: SA : S'A'$,

et $SC : S'C' :: SA : S'A'$;

de là, en multipliant terme à terme, et supprimant, aux antécédens et aux conséquens, les facteurs communs, on tire

$$SABC : S'A'B'C' :: SA^3 : S'A'^3 :: SB^3 : S'B'^3 :: AB^3 : A'B'^3, \textit{ etc.}$$

N° 635. Théorème XXIV.

Deux polyèdres semblables sont proportionnels aux cubes de leurs arètes homologues.

Même démonstration qu'au *numéro* 354, en substituant les mots............ *polyèdres, tétraèdres, arètes, cubes,* aux mots correspondans *polygones, triangles, côtés, carrés.*

Corollaire. — *Les volumes des figures semblables sont proportionnels aux cubes de leurs lignes homologues.*

Ainsi, par exemple, — *Deux prismes semblables,* ou *deux cylindres semblables,* ou *deux pyramides semblables,* ou *deux cônes semblables, sont proportionnels aux cubes de leurs hauteurs;* etc., etc.

Les polyèdres réguliers de même espèce sont proportionnels aux cubes de leurs arètes, ou *de leurs rayons,* ou *de leurs apothèmes;* etc.

Les sphères sont proportionnelles aux cubes de leurs rayons, ou *de leurs diamètres;* etc.

Il en est de même des *secteurs sphériques* semblables, des *pyramides sphériques* semblables; *etc., etc.*

N° 636. Problème I.

Le volume d'un parallélépipède rectangle est $17^{mc},435$; *et ses arètes sont proportionnelles aux nombres* 2, 3, et 7: — *on demande les trois dimensions de ce parallélépipède.*

Si nous cherchons d'abord quel serait le volume d'un parallélépipède semblable au proposé, et dont les arètes auraient 2^m, 3^m, et 7^m de longueur, nous voyons que ce volume serait

42 *mètres cubes* (n° 598).

Maintenant, en appelant a, b, c, les trois dimensions cherchées, on a (n° 635)

$$a^3 : 2^3 :: 17{,}435 : 42,$$
$$b^3 : 3^3 :: 17{,}435 : 42,$$
$$c^3 : 7^3 :: 17{,}435 : 42.$$

Or, $log.17{,}435 = 1{,}2414220$
$log.42\ldots = 1{,}6232493$

d'où $log.17{,}435 - log.42 = \bar{1}{,}6181727$

nombre dont *le tiers* est....... $\bar{1}{,}8727242$:

donc, en ajoutant ce résultat successivement aux logarithmes de 2, de 3, et de 7, on aura les logarithmes des nombres cherchés.

Ainsi : — 1°................ $\bar{1}{,}8727242$
$log.2 = 0{,}3010300$
$log.a = 0{,}1737542 = log.1{,}49195$;

2°........................ $\bar{1}{,}8727242$
$log.3 = 0{,}4771213$
$log.b = 0{,}3498455 = log.2{,}23792$;

3°........................ $\bar{1}{,}8727242$
$log.7 = 0{,}8450980$
$log.c = 0{,}7178222 = log.5{,}22182$.

Donc, en se bornant aux *centimètres*, les arètes ont pour valeurs respectives : $1^m{,}49$, $2^m{,}24$, et $5^m{,}22$.

N° 637. PROBLÈME II.

Le diamètre du soleil vaut 112,88 *fois celui de la terre : — on demande son volume.*

Les volumes des sphères étant proportionnels aux cubes de leurs diamètres, le volume V du soleil sera (n° 635, *coroll.*)

$$1\,080\,759\,000 \times (112{,}88)^3 \quad \textit{myriamètres cubes.}$$

Or,
$$\begin{aligned} \log.\,1\,080\,759\,000 &= 9{,}0337289 \\ 3.\log.\,112{,}88\ldots\ldots &= 6{,}1578510 \end{aligned}$$

d'où
$$\log.V = 15{,}1915799 :$$

donc
$$V = 1\,554\,462\,000\,000\,000 \quad \textit{myriamètres cubes.}$$

— On conclut de là, que le soleil est *environ* de 14 à 15 *cent mille* fois plus gros que la terre. — Au reste, si l'on voulait s'en tenir à ce résultat, il suffirait de chercher le nombre qui a pour logarithme 6,1578510 : on trouverait immédiatement 1 438 200 pour solution.

FIN DU LIVRE QUATRIÈME ET DE LA SECONDE PARTIE.

Google

NOTES.

Note A, relative aux Problèmes Graphiques.

Des principaux Instrumens employés dans la Géométrie Pratique.

DE LA RÈGLE ET DU COMPAS.

N° 638. Nous avons donné dans le *numéro* 23, la définition de la *règle*, instrument destiné à *décrire* la ligne droite; et nous avons exposé en quelques mots la manière de s'en servir. Malgré la simplicité de la construction que nous avons indiquée, on aurait tort de la regarder comme tout-à-fait exacte et rigoureuse: deux raisons s'opposent principalement à ce que l'on puisse exécuter le *tracé* d'une droite autrement que *par approximation.*

Premièrement, les bords de la règle que l'on emploie ne sont jamais parfaitement rectilignes: ils sont toujours plus ou moins hérissés de petites aspérités; et la règle elle-même, considérée dans son entier, affecte souvent une courbure très notable.

Secondement, les lignes, telles qu'il nous est possible de les tracer, au lieu d'être complétement dépourvues de largeur ainsi qu'on le suppose, sont toujours, en réalité, de véritables surfaces à deux dimensions, surfaces qui deviennent surtout sensibles lorsque plusieurs lignes viennent à se couper: car alors les points de rencontre, au lieu d'être absolument sans étendue (n° 1er), se trouvent presque toujours représentés par de petites figures, qui, non-seulement sont très visibles à l'œil, mais souvent même ont une grandeur appréciable (*voyez* le n° 190, *scol.*).

Ces deux inconvéniens pouvant occasioner de graves erreurs dans les constructions tant soit peu compliquées, il est important de chercher, sinon à les éviter entièrement, du moins à les atténuer autant que possible.

Relativement au premier genre d'imperfection, le meilleur moyen pour reconnaître si la règle est suffisamment droite, consiste à la placer de manière que les deux extrémités d'un même bord se trouvent sur un même rayon visuel, ce procédé, en réduisant autant qu'on le veut la longueur appa-

rente de la règle, suffit pour y apercevoir sur-le-champ les moindres défauts
Fig. 450. de rectitude. — Ou bien, après avoir tracé une droite MN (fig. 450) avec le bord AB de la règle ABCD, on retournera cette règle *sens-dessus-dessous*, non pas de manière que l'extrémité A se place en B, *et vice versâ* [ce moyen ne suffirait pas], mais de manière que l'instrument prenne la position AB*cd*, dans laquelle l'angle C aura passé en *c*, et l'angle D en *d*; et alors on verra si la ligne MN continue à coïncider avec le bord ou l'arète AB qui a servi à la décrire, comme cela doit avoir lieu si la règle est suffisamment bien dressée; dans le cas contraire, il faut renoncer à s'en servir, pour peu que l'on tienne à obtenir un résultat de quelque exactitude.

Quant au second inconvénient, il faut, pour le faire disparaître autant que possible, employer une pointe extrêmement fine, et tracer la droite avec la plus grande légèreté. On n'arrivera jamais, il est vrai, à décrire une *ligne mathématique* dans la rigueur absolue de l'expression; mais on pourra du moins parvenir à en obtenir une assez *fine* et assez *déliée* pour qu'il soit permis, sans avoir à craindre d'erreur notable, de la regarder comme une véritable ligne sans largeur.

N° 639. Le compas, dont nous avons indiqué l'usage dans le *numéro* 26, est sujet à des inconvéniens analogues.

D'abord, il est très difficile d'obtenir que ses deux branches soient réunies d'une manière parfaitement fixe: de sorte que bien souvent, leur écartement venant à varier pendant le tracé, la pointe décrivante ne repasse plus, à la fin de l'opération, par le point de départ. On remédie à ce défaut en resserrant autant que possible la tête du compas, ce qui empêche alors les deux branches de s'écarter ou de se rapprocher l'une de l'autre trop facilement.

Quant à l'inconvénient résultant de ce que les pointes du compas ne seraient pas suffisamment *effilées*, nous renvoyons à ce que nous avons dit ci-dessus pour la description de la ligne droite.

DE L'ÉQUERRE ET DE LA FAUSSE ÉQUERRE.

N° 640. Pour mener des perpendiculaires, on se sert avec avantage d'un instrument que l'on nomme une *équerre*. — L'équerre est ordinairement
Fig. 451. composée de deux règles OA, OB (fig. 451), que l'on nomme ses *côtés* ou ses *branches*, et qui sont réunies de manière à former au point O un angle droit, soit intérieurement, soit extérieurement. [De là vient que deux droites sont dites *d'équerre* lorsqu'elles sont perpendiculaires entre elles.] — D'autres
Fig. 452. fois, l'équerre a la forme d'un triangle rectangle (fig. 452).

Pour mener une perpendiculaire au moyen de l'équerre, il suffirait, à la rigueur, d'appliquer l'un des côtés de son angle droit contre la droite donnée, en s'y prenant de manière que l'autre côté de cet angle passât par le point donné: la droite tracée le long de ce côté serait la perpendiculaire demandée.

Ce procédé serait également applicable au cas où le point donné est situé sur la droite donnée (n° 99), et au cas où le point donné est un point quelconque de la perpendiculaire à construire (n° 100). Mais il faut observer qu'en le suivant de point en point, on obtiendrait difficilement un angle dont le sommet fût bien nettement déterminé; pour parvenir à un semblable résultat, il est nécessaire de combiner l'emploi de l'équerre avec celui de la règle; et le meilleur moyen pour cela paraît être le suivant, qui exige toutefois une équerre triangulaire.

1° On applique l'hypoténuse de l'équerre (fig. 453) le long de la droite donnée AB, en appuyant une règle MN sur l'un des côtés, AO, de l'angle droit (fig. 453, 1re *position*); — 2° On fait pivoter l'équerre autour de son sommet, en l'appuyant à son tour contre la règle, supposée fixe sur le plan; et l'on amène ainsi le second côté OB de l'angle droit contre la règle (2e *posit.* : A'O'B'); — 3° On fait glisser ce second côté contre la règle, de manière que l'hypoténuse vienne passer par le point donné P (3e *posit.* : A"O"B"); et l'on trace alors une droite le long de l'hypoténuse A"B". — Cette droite est la perpendiculaire demandée, puisque les angles A et B" du triangle APB" sont complémentaires. Et de plus, on obtient ainsi quatre angles dont le sommet commun est parfaitement déterminé, et qui sont eux-mêmes parfaitement égaux si l'équerre est *juste*, c'est-à-dire si son angle est exactement droit. Fig. 453.

Pour *vérifier* une équerre [c'est-à-dire pour s'assurer que la condition précédente est bien remplie], il faut — 1° appliquer un côté de son angle droit contre une règle supposée fixe sur un plan, et mener, en suivant le second côté de cet angle, une perpendiculaire au bord de la règle; — 2° retourner l'équerre *sens-dessus-dessous*, en appliquant de nouveau le premier côté de l'angle droit contre la règle; et mener, de la même manière, une seconde perpendiculaire par un point de la première : — l'équerre est juste si les deux perpendiculaires se confondent; — [ordinairement même on se dispense de tracer la seconde, parce que l'œil en juge d'avance la direction].

L'*équerre d'arpenteur* peut être considérée comme un prisme carré (n° 482) que l'on place *verticalement* sur un pied, et dont chaque pan est partagé en deux moitiés par une fente verticale très étroite. — Les plans verticaux qui passent par les fentes opposées, et dans lesquels on dirige des rayons visuels, doivent être perpendiculaires entre eux. — La *figure* 454 représente l'équerre d'arpenteur sous ses deux formes les plus usitées. Fig. 454.

On vérifie cette équerre d'une manière analogue à la précédente, en comparant deux angles adjacens de l'instrument, à un même angle formé par les rayons visuels menés à deux objets remarquables du terrain.

N° 641. Pour faire un angle égal à un autre, on peut employer un instrument AOB (fig. 455) nommé *fausse équerre*, et qui diffère de l'équerre en ce que ses branches, OA, OB, au lieu d'être fixées à angle droit l'une sur Fig. 455.

Digitized by Google

l'autre, sont susceptibles de tourner autour d'un point commun O, de manière à prendre telle inclinaison mutuelle que l'on veut.

On conçoit sans peine l'usage de l'instrument ainsi défini. Il faut d'abord, pour s'en servir, le placer de manière que ses deux branches soient dirigées respectivement le long des côtés de l'angle proposé, ce qui s'appelle *relever l'angle;* il faut ensuite *rapporter* l'angle ainsi relevé, en appliquant l'une des branches de l'instrument contre la droite sur laquelle on veut construire un angle égal au premier, et faisant en sorte que l'un des bords de la seconde branche de l'instrument passe par le point donné du second côté de cet angle : il ne reste plus alors qu'à tracer ce côté, en suivant le bord de l'instrument.

Mais, les deux branches qui composent la fausse équerre, ne pouvant, d'après sa construction même, avoir leurs faces correspondantes situées dans un même plan, il s'ensuit que cet instrument serait d'un usage très incommode, si, comme on le fait ordinairement, on ne bornait son emploi à relever des angles dièdres [convexes ou concaves], pour en rapporter la valeur sur un plan limité par un bord solide rectiligne qui, devant être l'un des côtés de l'angle à construire, puisse servir d'appui à l'une des branches de la fausse

Fig. 456. équerre (fig. 456). Dans ce cas, on y a le plus souvent recours pour tracer des parallèles.

N° 642. On peut également, au moyen d'une règle et d'une équerre,

Fig. 457. *Mener une parallèle à une droite donnée* AB (fig. 457).

Pour cela, on peut commencer par appuyer l'un des côtés OA de l'équerre, contre une règle MN ; puis on amène l'autre côté OB de l'angle droit [ou même l'hypoténuse] contre la droite donnée. — Ensuite, on fait glisser l'équerre le long de la règle, jusqu'à ce que le premier côté passe par le point donné. — La direction de ce côté est alors la parallèle cherchée.

Il est à observer que pour la résolution de ce problème, tout triangle solide peut remplacer l'équerre.

DU RAPPORTEUR, DU GRAPHOMÈTRE, ET DU CERCLE RÉPÉTITEUR.

N° 643. On emploie le plus ordinairement, pour rapporter les angles, un autre instrument que son usage a fait nommer *rapporteur*, et qui présente l'avantage de donner en même temps leur mesure. — Il consiste en un demi-

Fig. 458. cercle (fig. 458), en métal ou en corne, dont le *limbe* [c'est-à-dire la circonférence] est divisé en *degrés*, *minutes*, etc.

On peut en outre, au moyen du rapporteur, inscrire dans un cercle, un polygone régulier d'un nombre quelconque de côtés : pour cela, on calcule d'abord l'angle au centre du polygone, et l'on construit cet angle avec l'instrument.

Fig. 459. Le rapporteur prend le nom de *graphomètre* (fig. 459) quand on y adapte une règle, nommée *alidade*, égale en longueur au diamètre, fixée par son milieu au centre du demi-cercle, et susceptible de tourner dans son plan autour de ce centre. Les extrémités de l'alidade, ainsi que celles du diamètre

qui sert de base au demi-cercle, sont garnies chacune d'une petite plaque nommée *pinnule*. Les pinnules sont traversées par des fentes perpendiculaires au plan de l'instrument, dans lesquelles on dirige des rayons visuels qui passent par son centre : l'instrument sert à mesurer les angles de ces rayons visuels. — Ajoutons que le graphomètre est supporté par un *pied* ou un *trépied* destiné à le fixer sur le terrain.

Cet instrument, qui peut être considéré comme une combinaison de la fausse équerre et du rapporteur, est maintenant peu employé : on le remplace avec avantage par un cercle entier dans lequel on substitue ordinairement deux *lunettes* aux pinnules.

De plus, on peut rendre ces deux lunettes mobiles autour de l'axe du cercle, et son plan lui-même mobile sur son support : cette nouvelle disposition permet d'obtenir la valeur d'un multiple quelconque de l'angle à mesurer, avec le même degré d'approximation qu'on obtiendrait la valeur de l'angle simple. Alors, si l'on divise le multiple obtenu, par le nombre des observations successives, l'erreur possible se trouve divisée par le même nombre ; et l'on obtient ainsi l'angle cherché, avec un degré d'approximation susceptible de devenir indéfini. — Lorsque l'instrument a reçu cette modification, on le nomme un *cercle répétiteur* (fig. 460). Fig. 460.

DES ÉCHELLES ET DU VERNIER.

N° 644. Les moyens indiqués au *numero* 289 pour diviser une droite en parties égales, sont insuffisans dans la pratique lorsque la droite à diviser est très petite et que le nombre des parties est très grand, parce qu'alors les points de division obtenus par ces diverses méthodes, ne sont plus assez distincts. — On y supplée de la manière suivante.

Soit par exemple, à diviser la droite ab (fig. 461) en 10 parties égales : menons à ab la perpendiculaire am, sur laquelle nous prendrons 10 parties égales quelconques ; tirons mb, et menons par les points de division de am, des parallèles à ab : ces parallèles vaudront respectivement $\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \frac{4}{10}, \ldots$ de ab. Fig. 461.

Pour mener plus exactement les parallèles, il est nécessaire de prolonger la droite ab d'une quantité suffisante bc, et de construire le rectangle $mnae$: on partage le côté en comme le côté am ; et l'on mène des droites par les points de division. Pour plus de commodité, on divise aussi les parallèles, en parties égales à ab : la figure donne alors des lignes multiples de ab en même temps que des sous-multiples.

La méthode précédente est surtout employée pour la construction des *échelles*, c'est-à-dire pour la division des droites qui doivent servir à mesurer d'autres droites ou à les diviser elles-mêmes en parties égales. L'échelle prend le nom d'échelle de *dixièmes* quand chacune de ses parties, représentée par ab, est subdivisée en dix parties égales, comme cela a lieu dans la *figure* 461 où ab valant à peu près un *millimètre*, chacune des subdivisions qu'elle fournit vaut un *déci-millimètre*.

Digitized by Google

On peut se servir des échelles pour trouver le rapport de deux droites. A cet effet, il faut commencer par prendre directement la mesure des deux lignes proposées; leur rapport s'obtient ensuite par une simple division arithmétique.

N° 645. Pour évaluer de très petites portions de droites, on emploie en-
Fig. 462. core un instrument appelé *vernier* ou *nonius* (fig. 462), du nom des inventeurs. — Cet instrument consiste dans deux règles divisées respectivement en parties égales, l'une plus grande OZ que nous considérerons comme fixe, l'autre plus petite qui doit être mobile le long de la première : [c'est ordinairement à la petite règle que l'on donne plus particulièrement le nom de *vernier*]. Afin de mieux fixer les idées, nous supposerons que les divisions de la grande règle OZ aient été prises pour unités, et que la longueur du vernier contienne 9 de ces divisions : dans ce cas il doit être lui-même divisé en 10 parties égales [une de plus qu'il ne contient d'unités] dont chacune vaudra par conséquent $\frac{9}{10}$. Pour plus de clarté, les divisions de la grande règle seront indiquées par des chiffres romains, et celles du vernier par des chiffres arabes.

Cela posé, quand le point O de la grande règle coïncide avec l'extrémité o de la petite, le point de division IX doit coïncider avec l'extrémité 10; les points de division 1 et I sont distans de $\frac{1}{10}$, 2 et II diffèrent de $\frac{2}{10}$, 3 et III diffèrent de $\frac{3}{10}$, *etc*.... Donc, si l'on fait avancer le vernier de $\frac{1}{10}$, 1 coïncidera avec I; si on le fait avancer de $\frac{2}{10}$, 2 coïncidera avec II; si on le fait avancer de $\frac{3}{10}$, 3 coïncidera avec III; et ainsi de suite. Le *numéro* d'ordre d'un point de division de la petite règle, qui coïncide avec un point de division de la grande, indique toujours le nombre de 10mes dont la petite règle a avancé depuis que ses extrémités coïncidaient avec deux points de division de
Fig. 463. la grande règle. Par exemple, sur la *figure* 463, l'extrémité o est comprise entre XI et XII, et 7 coïncide avec un point de division de la grande règle : cela indique qu'entre O et o, il y une distance égale à $11 + \frac{7}{10}$. On peut donc ainsi évaluer une distance quelconque à $\frac{1}{10}$ près. On pourrait même l'évaluer à $\frac{1}{20}$ près : car si les points de division 6 et 7, par exemple, se trouvaient compris entre deux points de division consécutifs de la règle OZ, *sans coïncidence*, l'extrémité o étant d'ailleurs comprise entre XI et XII, la distance des points O et o serait sensiblement égale à 11 *plus* 6 *dixièmes*, *plus un demi-dixième*, ou à $11 + \frac{13}{20}$.

La même méthode est applicable à l'évaluation des arcs; on emploie pour cet objet, au lieu du *vernier rectiligne*, un *vernier circulaire*.

Digitized by Google

DU COMPAS DE PROPORTION ET DU COMPAS DE RÉDUCTION.

N° 646. La plupart des problèmes relatifs aux lignes proportionnelles peuvent se résoudre au moyen d'un instrument nommé *compas de proportion* (fig. 464). On peut se le représenter comme une fausse équerre sur les branches de laquelle, à partir de leur point de jonction o, on aurait marqué un même nombre de parties égales, 1,2,3,4, *etc.* — Pour en comprendre l'usage, il suffit de faire remarquer que si, ayant donné à l'instrument une ouverture quelconque, on joint deux à deux les points marqués sur les deux branches par le même *numéro* d'ordre, 1,2,3......, on formera une série de triangles isocèles ayant leur sommet commun en o, et tous semblables entre eux. Fig. 464.

Cela posé, admettons qu'il s'agisse de — *Trouver une quatrième proportionnelle à trois longueurs données : a, b, c* (n° 291).—Pour cela : — 1° On prend à partir du point o, sur l'une des deux branches, une longueur égale à *a* : supposons que son extrémité tombe au point 3 ; — 2° On prend à partir du même point o sur la même branche, une longueur égale à *b* : supposons que l'extrémité tombe au point 5; — 3° On donne à l'instrument une ouverture telle que la distance [3...3] soit égale à *c* [ce dont on s'assure au moyen du compas ordinaire] : — La distance [5...5] est la longueur cherchée.

Soit encore, par exemple, à — *Partager une longueur donnée en deux parties proportionnelles aux nombres* 3 *et* 5 (n° 290). — Pour cela, on fait la somme des nombres 3 et 5, ce qui donne 8, et l'on ouvre l'instrument de manière que la distance [8...8] soit égale à la ligne donnée : les distances respectives [3...3] et [5...5] sont les deux parties cherchées.

Nous ne nous étendrons pas davantage sur les usages de cet instrument ; nous ajouterons seulement qu'il peut aussi être employé à *réduire* dans un rapport donné, les lignes d'une figure donnée, c'est-à-dire à trouver des lignes qui soient respectivement avec les premières, dans ce rapport donné. Par exemple, si l'on veut réduire les lignes de la figure dans le rapport de 5 à 3, on donnera à l'instrument une ouverture telle que la distance [5...5] soit égale à 3. Alors, les distances [1...1], [2...2], [3...3],.... seront respectivement égales aux distances du point o aux points 1, 2, 3...., réduites dans le rapport donné.

N° 647. Pour le dernier usage qui vient d'être indiqué, on emploie plus commodément un instrument spécial nommé *compas de réduction*. Il est formé de deux branches égales et terminées en pointes, AB, A'B' (fig. 465), que l'on réunit à tel point O que l'on veut de leur longueur, pourvu cependant que AO = A'O et BO = B'O. Alors, si BO est, par exemple, les $\frac{2}{5}$ de AO, la distance BB' sera égale à la distance AA' réduite aux $\frac{2}{5}$. Fig. 465.

DU LEVER DES PLANS, ET DE LA PLANCHETTE.

N° 648. L'art de *lever les plans* est une application de la théorie de la *similitude*. Il a pour but de décrire sur le papier, des figures semblables à celles que déterminent sur un terrain, les points où se trouvent placés des objets remarquables, ou bien aux figures dans lesquelles le terrain se trouve naturellement décomposé. Quand la figure du terrain est terminée par une ligne courbe, et non par des côtés rectilignes, on y substitue d'abord un polygone inscrit; et si les sommets de ce polygone sont suffisamment rapprochés, il est facile ensuite de rétablir la forme de la courbe, du moins approximativement.

Tout plan doit être accompagné d'une échelle (n° 644) qui indique dans quel rapport les distances prises sur le terrain, se trouvent réduites.

N° 649. Au nombre des instrumens employés pour lever les plans, se
Fig. 466. trouve la *planchette*.— On nomme ainsi un rectangle de bois MN (fig. 466), dont la surface est rendue aussi plane que possible, et que l'on établit sur un support, à peu près comme le graphomètre (n° 643).—Supposons que l'on veuille, au moyen de cet instrument, lever *le plan* du polygone ABCDEF supposé horizontal dans toute son étendue. Pour cela, on se place d'abord au point A, où l'on fixe l'instrument dans une situation également horizontale. On marque sur la planchette le point A; et l'on trace, au moyen d'une alidade, des droites dans les directions AB, AC, AD, AE, AF. Cela fait, on se transporte en un autre point E. On place de nouveau l'instrument dans une situation horizontale, de manière que la droite que l'on y a tracée suivant AE, coïncide avec sa première direction. Puis on prend, à partir du point *a* que l'on a marqué sur la planchette pour figurer le point A, une distance *a*E qui soit à AE dans le rapport de réduction suivant lequel on veut construire le plan : [le point E du terrain est censé correspondre exactement, sur une même verticale, au point E de la planchette]. Dans cette nouvelle position de l'instrument, les droites qu'on y avait tracées sont restées parallèles à elles-mêmes. Alors, par le point E, on tire de nouveau des droites dans les directions EB, EC, ED, EF : soient *b*, *c*, *d*, *f*, les points d'intersection respectifs des droites AB et EB, AC et EC, AD et ED, AF et EF. On mène de plus, les droites *ab*, *bc*, *cd*, *de*, *ef*, *fa*. Les polygones ABCDEF et *abcdef*, étant alors composés de triangles qui sont semblables chacun à chacun comme équiangles, sont par conséquent semblables eux-mêmes.

DU PANTOGRAPHE.

N° 650. On trouve encore une application de la théorie des figures semblables, et en particulier de celle des centres de similitude (n°s 270 et 271), dans le *pantographe* ou *singe*, instrument nommé ainsi parce qu'il sert à *imiter* une figure donnée. Il se compose de *quatre* règles ou *tringles*,

Digitized by Google

AB A'B', OB, A'C (fig. 467), mobiles autour des articulations A', B', B, C, de manière à former toujours un parallélogramme A'B'BC, et deux triangles OAB, OA'B', semblables comme équiangles quelles que soient les valeurs que l'on fasse prendre aux angles. Par conséquent, si l'on conduit le point A le long d'une ligne donnée MAN, le point A', convenablement *armé*, tracera une ligne M'A'N' semblable à la première (n° 270). Fig. 467.

Les tringles qui composent le pantographe sont divisées en parties égales, de sorte qu'en changeant à volonté la position des articulations B' et C, on peut établir un rapport quelconque entre les dimensions des deux figures.

DU FIL A PLOMB ET DU NIVEAU.

N° 651. On nomme *verticale* la direction de la pesanteur, c'est-à-dire la route que tend à parcourir un corps qu'on laisse tomber librement.

Pour obtenir la direction verticale, on emploie un *fil à plomb*, c'est-à-dire un fil auquel on suspend un corps pesant qui consiste ordinairement en une petite masse de plomb (fig 468). Ce fil, abandonné à lui-même, prend naturellement la direction verticale; et l'on peut tracer cette direction sur un plan vertical, en combinant le fil à plomb avec une règle (fig. 469) que l'on applique sur le plan. Fig. 468. Fig. 469.

N° 652. Tout plan perpendiculaire à la direction verticale, est dit un *plan horizontal*. — Telle est presque toujours la surface d'un liquide en repos. Telle est encore, assez généralement, la surface du sol, supposée plane.

Pour s'assurer qu'un plan est *horizontal*, comme cela est nécessaire dans plusieurs opérations de géométrie pratique, on emploie un instrument appelé *niveau* [ce qui fait que l'on nomme quelquefois *plan de niveau*, un plan horizontal]. Cet instrument, réduit à son plus grand degré de simplicité, consiste, soit dans une équerre coudée (fig. 470) à laquelle est adapté un fil à plomb qui doit, en s'appliquant suivant l'une des branches, déterminer la seconde à prendre une direction horizontale, soit dans un triangle isocèle (fig. 471) formé de tringles de bois, au sommet duquel est suspendu un fil à plomb; et dans ce dernier cas, lorsque le plan du triangle est vertical et que sa base est horizontale, le fil à plomb se dirige suivant l'axe de symétrie. Fig. 470. Fig. 471.

Cet instrument peut donc servir à reconnaître si un plan est horizontal; et comme deux droites déterminent un plan, il suffit, pour s'assurer que la surface satisfait à cette condition, de vérifier si, dans deux positions différentes de l'instrument [positions que, pour plus d'exactitude, il faut prendre à peu près perpendiculaires entre elles], la direction du fil à plomb coïncide avec la droite marquée d'avance sur le plan de l'instrument pour indiquer la verticale.

Cette dernière opération, exécutée sur un plan que l'on sait d'avance être horizontal, sert aussi à *vérifier* le niveau (*voyez* le n° 640).

Digitized by Google

Les instrumens grossiers que nous venons de décrire, ont depuis long-temps fait place à d'autres plus parfaits, dont l'un consiste en un *tube* de verre horizontal, *ouvert* et recourbé à ses deux extrémités, et terminé ainsi par deux
Fig. 472. bouts de tube verticaux *gradués* (fig. 472). — Le tube étant rempli d'eau presque en entier, on juge qu'il est dans une position *horizontale* quand le liquide s'élève à la même hauteur dans les deux portions graduées qui le terminent. — Cet instrument porte le nom de *niveau d'eau*.

Enfin, le niveau le plus exact et le plus sensible est formé, comme le pré-
Fig. 473. cédent, d'un *tube* de verre à peu près cylindrique (fig. 473), mais *fermé* aux deux bouts, et légèrement renflé à son milieu. Le tube est encore rempli d'eau ou d'un autre liquide, à l'exception d'un petit espace qui est occupé par une *bulle d'air*, ce qui a fait nommer cet instrument, un *niveau à bulle d'air*. Pour que l'axe du tube soit horizontal, il faut que la bulle d'air se trouve au milieu de sa longueur. — Le niveau est fixé à une petite plaque rectangulaire dont le plan est parallèle à son axe. En plaçant cette plaque dans toutes les directions sur un plan horizontal, l'axe du tube parcourt un autre plan horizontal parallèle au premier; et la bulle d'air ne cesse pas d'occuper le milieu du tube; la bulle quitterait au contraire cette position si le plan sur lequel on place l'instrument n'était pas horizontal.

Dans les grandes opérations de *nivellement*, on adapte au niveau une *lunette* dont l'axe est parallèle à celui de l'instrument.

N° 653. Le niveau et le fil à plomb peuvent servir à l'évaluation des volumes des corps solides dans l'intérieur desquels on ne peut pénétrer. Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de mesurer le volume d'une pyramide : la base pouvant être mesurée, la question se réduit à mesurer la hauteur. Pour cela, on posera la pyramide, par sa base, sur un plan de niveau
Fig. 474. (fig. 474); puis on prendra une équerre; on la placera de manière que l'un des côtés de l'angle droit soit vertical, en le faisant coïncider avec la direction du fil à plomb; et l'on fera passer la direction du second côté, par le sommet de la pyramide. Alors, on laissera *filer* le fil à plomb jusqu'à ce que la petite masse suspendue touche le plan de la base : la longueur du fil [y compris la masse] donnera la hauteur cherchée.

N° 654. On peut mesurer, par une suite d'opérations analogues, le volume d'un polyèdre convexe de forme quelconque. On sait en effet (n° 512), que tout polyèdre convexe est décomposable en pyramides qui ont pour sommet commun l'un des sommets du polyèdre, et pour bases respectives les faces de ce polyèdre, desquelles il faut excepter celles qui passent par le sommet commun. Il résulte de là, qu'en posant successivement le polyèdre, sur un plan de niveau, par chacune des faces qui servent de bases aux pyramides qui le composent, puis mesurant, pour chacune de ces positions, l'aire de la base correspondante et la hauteur du sommet commun au-dessus du plan horizontal, on aura tous les élémens nécessaires à la détermination des pyramides partielles, et par suite du polyèdre entier.

Digitized by Google

Note B, relative aux Problèmes Numériques.

Exposition du Système Métrique Français.

N° 655. La résolution des problèmes numériques que nous nous sommes proposés pour exemples, dépendant du système métrique, il est nécessaire de reprendre en quelques mots l'exposition de ce système.

On peut se représenter la terre comme une sphère légèrement aplatie suivant la direction de l'un de ses diamètres. Sa surface est donc une surface de révolution ayant ce diamètre pour *axe*. On nomme *pôles* de la terre les extrémités de cet axe, et *méridiens* les intersections de la surface par les plans quelconques menés suivant l'axe. Le plan perpendiculaire à l'axe, mené par son milieu ou par le *centre* de la terre, coupe la surface suivant un grand cercle que l'on nomme *équateur*.

La distance d'un pôle à l'équateur, comptée sur la surface, ou le quart du méridien, est supposée partagée en *dix millions* de parties. La petitesse de chaque partie, comparée au méridien entier, permettant de la regarder comme rectiligne, on la prend pour *unité linéaire* rectiligne, et on lui donne le nom de Mètre.

Le mètre se désigne dans les calculs par M ou *m*.

Les multiples et les sous-multiples décimaux du mètre sont indiqués par ces mots

Déca, qui signifie...........	10,
Hecto	100,
Kilo.......................	1000,
Myria......................	10000,
Déci.......................	0,1,
Centi......................	0,01,
Milli......................	0,001.

On désigne ces trois derniers mots par les abréviations *d*, *c*, *m*.

La *figure* 475 représente la *chaîne métrique* d'*un décamètre* de longueur, réduite au *centième* : ainsi elle a sur la figure, *un décimètre* de long. Chacun des 50 *chaînons* dont elle se compose a *deux décimètres* de longueur dans la réalité, et seulement *deux millimètres* sur la figure. Fig. 475.

N° 656. *L'unité de surface* est le *mètre carré*, c'est-à-dire le carré d'un mètre de côté.

Le décamètre carré vaut 100 mètres carrés; l'hectomètre carré vaut 100 décamètres carrés ou 10 000 mètres carrés, etc. De même, le mètre carré vaut 100 décimètres carrés, le décimètre carré vaut 100 centimètres carrés, etc.

Le mètre carré se désigne par *m.q*.

L'unité de volume est le *mètre cube*, ou le cube qui a pour arète un mètre de longueur. — On lui donne le nom de *stère* quand il est employé à la mesure des bois de chauffage et des matériaux de construction.

Le décamètre cube vaut 1000 mètres cubes; l'hectomètre cube vaut 1000 décamètres cubes ou 1 000 000 mètres cubes, etc. De même, le mètre cube vaut 1000 décimètres cubes, celui-ci vaut 1000 centimètres cubes, etc.

Le mètre cube se désigne par *m.c*.

Dans l'évaluation des grandes portions de la surface terrestre, on emploie une autre unité que le mètre carré : cette unité, que l'on nomme *are*, est le décamètre carré : on la désigne par A ou *a*. Ses multiples et ses sous-multiples décimaux employés, sont, l'*hectare* ou hectomètre carré, le *myriare* ou kilomètre carré, le *centiare* ou mètre carré.

Dans l'évaluation des volumes des matières liquides, et généralement de celles que l'on peut renfermer dans des vases, comme les graines, etc., on prend pour unité de volume, le décimètre cube, que l'on nomme *litre*, et que l'on désigne par L ou *l*. Ses multiples décimaux sont le *décalitre*, l'*hectolitre*, le *kilolitre* ou mètre cube, et le *myrialitre*; ses sous-multiples sont le *décilitre*, le *centilitre*, et le *millilitre* ou centimètre cube.

N° 657. On a encore recours, pour mesurer les volumes des corps, à un moyen physique qui consiste à déterminer la force avec laquelle, en vertu de l'attraction terrestre, ils pressent un plan horizontal sur lequel on les pose. Cette force, que l'on nomme poids, étant, pour des corps *homogènes* [ou de même nature], proportionnelle à leurs volumes, peut servir à les mesurer. L'unité des poids, nommée *gramme*, est le poids d'un centimètre cube d'eau *distillée* [c'est-à-dire exactement purifiée], et prise dans un certain état fixe que l'on nomme en Physique son *maximum de condensation*. Pour concevoir la raison de cette dénomination, il faut savoir que l'eau, une fois parvenue au degré de chaleur ou à la température qui constitue cet état, augmente constamment de volume dès qu'on vient à changer ce degré, soit par une élévation de température, soit par un abaissement. D'où il suit que dans cette circonstance particulière, l'eau occupe son *minimum* de volume pour le même poids, ou présente son *maximum* de poids sous le même volume.

Il est facile de conclure de ce qui vient d'être dit, qu'un litre d'eau parvenue à son *maximum* de condensation, pèse un kilogramme. Et de là résulte

un moyen d'évaluer la capacité d'un vase quelconque par le poids de l'eau qu'il peut contenir, ou le volume d'un corps solide par celui de l'eau qu'il peut déplacer.

Le gramme se désigne par G ou *g*. Ses multiples et ses sous-multiples décimaux sont désignés par les mots *décagramme*, *hectogramme*, etc., *décigramme*, etc. [comme pour le mètre et le litre].

Les corps, lorsqu'ils sont *hétérogènes* [ou de nature différente], n'ayant pas le même poids sous le même volume, on nomme *poids spécifique* d'un corps d'une certaine nature, le rapport du poids d'un volume quelconque de ce corps, au poids d'un pareil volume d'eau distillée prise à son *maximum* de condensation, ou bien, le poids absolu, en grammes, d'un centimètre cube de ce corps, ou bien encore, le nombre de kilogrammes que pèse une portion du corps égale en volume à un décimètre cube. Ainsi, le poids absolu d'un corps quelconque est le produit du poids spécifique de sa substance, par le volume qu'il occupe, exprimé en centimètres cubes. On peut donc aisément, étant donnés deux de ces trois élémens numériques, déterminer le troisième. — (*Voyez* à la fin de l'ouvrage, la *Table des Poids Spécifiques* des substances les plus communes.)

N° 658. Enfin, chaque substance ayant une *valeur* relative particulière, dépendant de l'importance de ses usages, de sa rareté, ou même du caprice, on prend pour unité de cette espèce de grandeur, la valeur d'une petite masse métallique pesant 5 grammes, et composée de $\frac{9}{10}$ d'argent sur $\frac{1}{10}$ de cuivre ou d'alliage; et l'on donne à cette unité le nom de *franc*. — Il résulte de là, par exemple, que 100 francs d'argent monnayé pèsent un demi-kilogramme. Ainsi, l'on peut évaluer une somme d'argent par son poids; et réciproquement, on peut se servir d'argent monnayé pour peser des corps quelconques.

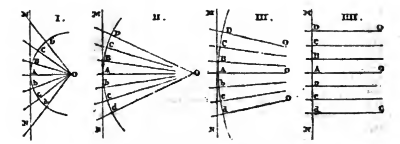
Le *franc* se désigne par F ou *f*. — Ses sous-multiples sont, le *décime*, valant un dixième de franc, le *centime*, valant un centième de franc, et le *millime* [monnaie de compte, rarement employée], représentant un millième de franc.

Pour de plus grands détails, nous renvoyons à *l'Arithmétique* de M. Bourdon.

Addition *à la Théorie des* Parallèles.

Dès qu'une fois on admet pour définition des *parallèles*, que ce sont des *droites indéfiniment prolongées*, etc., on doit regarder à peu près comme évident que, chercher une théorie des parallèles qui soit indépendante de toute considération de l'*infini*, c'est chercher une chose contraire à son essence, c'est-à-dire une *absurdité*. La seule condition que l'on puisse raisonnablement exiger dans cette théorie, est, que l'infini n'y paraisse pas *à priori* et d'une manière *absolue*, mais simplement sous la forme plus mathéma-

tique de *limite*. Or, c'est une condition que nous paraît remplir le principe de Bertrand de Genève, du moins en le présentant ou en le préparant comme il suit.



Soit une série de circonférences croissantes, ayant toutes leurs centres sur une même droite AO, [*figures* I, II, III, qui sont censées n'en faire qu'*une seule* conjointement avec la *figure* IV], et passant par un même point A de cette droite où elles ont une tangente commune MN [*voyez* le *numéro* 97 (*scolies* 2 *et* 3), *numéro anterieur* à la théorie des parallèles].—Supposons que ces circonférences étant partagées, à partir du point A, en arcs de même longueur, non-seulement pour une même circonférence, mais pour toutes, on mène, dans chacune, des rayons aux points de division, A, B, C, D..., b, c, d..., et que l'on prolonge ces droites au-delà indéfiniment. Il en résultera des angles qui augmenteront continuellement en nombre en même temps qu'ils diminueront de grandeur, à mesure que les circonférences elles-mêmes s'agrandiront(*) et que leurs centres s'éloigneront de la tangente commune. Or, *à la limite*, c'est-à-dire quand les circonférences se confondront avec cette tangente (*fig.* IV), le nombre des angles sera devenu infiniment grand, en même temps que leur valeur sera devenue infiniment petite. Mais d'une autre part, les rayons étant devenus perpendiculaires à cette tangente commune, seront alors tous parallèles entre eux; et les angles infiniment petits dont nous parlions ne seront plus autre chose que des bandes (n° 132). Donc — *Une bande comprise entre deux parallèles* [ou du moins, une bande comprise entre deux droites perpendiculaires à une troisième (n° 132), en supposant qu'il puisse y avoir encore d'autres sortes de parallèles] *peut être considérée comme la limite de décroissement à laquelle parvient un angle variable, mais correspondant à un arc constant et équivalent à la largeur de cette bande, quand on fait croître jusqu'à l'infini le rayon de cet arc.*

De là il résulte qu'*une pareille bande, quelque large qu'elle soit, est toujours moindre qu'un angle quelconque*, puisque du sommet de celui-ci, comme centre, on peut toujours supposer décrit un arc d'une longueur égale à la largeur de la bande.

Fig. 85. De là encore on peut conclure, à peu près comme dans le *numéro* 136, que *par un point* O (fig. 85) *pris hors d'une droite* AB *on peut toujours mener une parallèle* CD, *et qu'on n'en peut mener une seconde* EF; sans quoi l'angle DOF serait contenu dans la bande ABCD.

[Ce qui précède peut remplacer les *numéros* 133, 134, 135, 136, du texte.]

(*) Notez que la propriété des lignes convexes enveloppées (n° 243) ne dépend que de la définition de la droite.

FIN.

RÉDUCTION DES MESURES ANCIENNES EN MESURES NOUVELLES.		RÉDUCTION DES MESURES NOUVELLES EN MESURES ANCIENNES.	
1 ligne vaut en m.m...	2,255829	1 m.m. vaut en lignes. .	0,443296
1 pouce vaut en c.m.: .	2.706995	1 c.m. vaut en pouces..	0,369413
1 pied vaut en d.m.....	3,248394	1 d.m. vaut en pieds....	0,307844
1 toise vaut en MÈTRE	1,949036	1 MÈTRE vaut en toises..	0,513074
1 lig. q. vaut en m.m.q.	5,088765	1 m.m.q. vaut en lign. q.	0,196511
1 pouc.q. vaut en c.m.q.	7,327821	1 c.m.q. vaut en pouc. q.	0,136466
1 pied q. vaut en d.m.q.	10,552063	1 d.m q. vaut en pieds q.	0,094768
1 toise q. vaut en m.q..	3,798744	1 m.q. vaut en toises q..	0,263245
1 lig. cub. v. en m.m.c.	11,479388	1 m.m.c. vaut en lign. c.	0,087113
1 po. cub. vaut en c.m.c.	19,836383	1 c.m.c. vant en pouc. c.	0,050412
1 pi. cub. vaut en d.m.c.	34,277270	1 d.m.c. vaut en pieds c.	0,029174
1 toise cube vaut en m.c.	7,403890	1 m.c. vaut en toises c..	0,135064
	M		A.
1 aune vaut en mètre..	1,188445	1 mètre vaut en aune....	0,841436
	K.M.		L.
1 lieue de 2000 tois. vant.	3,898072	1 K.M. v. en l. de 2000 t..	0,256537
1 lieue de 2500 tois. vant.	4,872590	1 K.M. v. en l. de 2500 t..	0,205232
1 arpent de 100 perches carrées vaut en hectare { la perche de 18 pi.	— 0,341886	1 hectare vaut en arpent de 100 perches carrées. { la perche de 18 pi.	— 2,924943
{ la perche de 22	— 0,510720	{ la perche de 22	— 1,958020
1 corde [de bois] v. en STÈRE.	3,83905	1 STÈRE vaut en corde..	0,26048
1 solive vaut en stère....	0,10283	1 stère vaut en solive....	9,72462
1 pinte vaut en LITRE...	0,93132	1 LITRE vaut en pinte...	1,07374
1 muid vaut en hectolitre.	2,68220	1 hectolitre v. en muid..	0,37283
1 setier vaut en hectolitre.	1,56100	1 hectolitre v. en setier..	0,64062
1 boisseau v. en décalitre.	1,30083	1 décalitre v. en boisseau.	0,76874
1 litron vaut en litre.....	0,81302	1 litre vaut en litron....	1,22998
	G.		liv. o. g. g.
1 grain v. en GRAMME.	0,05311	1 GRAMME vaut....	0.0.0.19
1 gros..............	3,82426	1 décagramme.....	0,0.2.44
1 once..............	30,59408	1 hectogramme....	0.3.2.11
	K.G.		
1 livre vaut en K.G...	0,48951	1 kilogramme.....	2 0.5.35
10 livres valent........	4,89506	10 kilogrammes...	20.6.6.64
100 livres......	48,95058	100 kilogrammes.....	204.4.4.59
	F		liv. s. d.
1 denier vaut en FRANC..	0,004	1 centime vaut..........	0.0.2
1 sou...............	0,049	1 décime.............	0.2.0
1 livre...............	0,988	1 FRANC.............	1.0.3
10 livres valent...........	9,877	10 francs valent..........	10.2.6
81 livres.................	80,000	80 francs...............	81.0.0

TABLE DES CORDES

POUR UN RAYON ÉGAL A 10000 (n°s 310, *scol.* 4; et 322).

D.	0′	10′	20′	30′	40′	50′	Diff.
0°	0	29	58	87	116	145	29
1	175	204	233	262	291	320	
2	349	378	407	436	465	494	
3	523	553	582	611	640	669	
4	698	727	756	785	814	843	
5	872	901	931	960	989	1018	
6	1047	1076	1105	1134	1163	1192	
7	1221	1250	1279	1308	1337	1366	
8	1395	1424	1453	1482	1511	1540	
9	1569	1598	1627	1656	1685	1714	
10	1743	1772	1801	1830	1859	1888	
11	1917	1946	1975	2004	2033	2062	
12	2091	2120	2148	2177	2206	2235	
13	2264	2293	2322	2351	2380	2409	
14	2437	2466	2495	2524	2553	2582	29
15	2611	2639	2668	2697	2726	2755	
16	2783	2812	2841	2870	2899	2927	
17	2956	2985	3014	3042	3071	3100	
18	3129	3157	3186	3215	3244	3272	
19	3301	3330	3358	3387	3416	3444	
20	3473	3502	3530	3559	3587	3616	
21	3645	3673	3702	3730	3759	3788	
22	3816	3845	3873	3902	3930	3959	
23	3987	4016	4044	4073	4101	4130	
24	4159	4187	4215	4244	4272	4300	28
25	4329	4357	4386	4414	4443	4471	
26	4499	4527	4556	4584	4612	4641	
27	4669	4697	4725	4754	4782	4810	
28	4838	4867	4895	4923	4951	4979	
29	5008	5036	5064	5092	5120	5148	
30	5176	5204	5233	5261	5289	5317	
31	5345	5373	5401	5429	5457	5485	
32	5513	5541	5569	5597	5625	5652	
33	5680	5708	5736	5764	5792	5820	
34	5847	5875	5903	5931	5959	5986	28
35	6014	6042	6070	6097	6125	6153	
36	6180	6208	6236	6264	6291	6319	
37	6346	6374	6401	6429	6456	6484	
38	6511	6539	6566	6594	6621	6649	
39	6676	6704	6731	6759	6786	6813	
40	6840	6868	6895	6922	6949	6977	
41	7004	7031	7059	7086	7113	7140	
42	7167	7195	7222	7249	7276	7303	
43	7330	7357	7384	7411	7438	7465	
44	7492	7519	7546	7573	7600	7627	27

Soit à trouver la corde de 62° 45′. — On pose la proportion $x : 25 :: 7 : 10$; d'où $x = 17$. Ajoutant 17 à 10400, on a 10417 pour la corde cherchée.

Le sinus d'un arc s'obtient en prenant la moitié de la corde de l'arc double : ainsi le sinus de 31° 22′ 30″ vaut 5208.

TABLE DES CORDES

POUR UN RAYON ÉGAL A 10000 (nos 310, *scol.* 4; et 322).

D.	0′	10′	20′	30′	40′	50′	Diff.
45°	7654	7680	7707	7734	7761	7788	27
46	7815	7841	7868	7895	7922	7948	
47	7975	8002	8028	8055	8082	8108	
48	8135	8161	8188	8214	8241	8267	
49	8294	8320	8347	8373	8400	8426	
50	8452	8479	8505	8532	8558	8584	26
51	8610	8636	8663	8689	8715	8741	
52	8767	8794	8820	8846	8872	8898	
53	8924	8950	8976	9002	9028	9054	
54	9080	9106	9132	9157	9183	9209	
55	9235	9261	9287	9312	9338	9364	
56	9389	9415	9441	9466	9492	9518	
57	9543	9569	9594	9620	9645	9671	
58	9696	9722	9747	9772	9798	9823	
59	9848	9874	9899	9924	9949	9975	25
60	10000	10025	10050	10075	10101	10126	
61	10151	10176	10201	10226	10251	10276	
62	10301	10326	10351	10375	10400	10425	
63	10450	10475	10500	10524	10549	10574	
64	10598	10623	10648	10672	10697	10721	
65	10746	10771	10795	10819	10844	10868	
66	10893	10917	10941	10966	10990	11014	
67	11039	11063	11087	11111	11136	11160	24
68	11184	11208	11232	11256	11280	11304	
69	11328	11352	11376	11400	11424	11448	
70	11472	11495	11519	11543	11567	11590	
71	11614	11638	11661	11685	11709	11732	
72	11756	11779	11803	11826	11850	11873	
73	11896	11920	11943	11966	11990	12013	
74	12036	12060	12083	12106	12129	12152	23
75	12175	12198	12221	12244	12267	12290	
76	12313	12336	12359	12382	12405	12427	
77	12450	12473	12496	12518	12541	12564	
78	12586	12609	12632	12654	12677	12699	
79	12721	12744	12766	12789	12811	12833	
80	12856	12878	12900	12922	12944	12966	22
81	12989	13011	13033	13055	13077	13099	
82	13121	13143	13165	13187	13209	13231	
83	13252	13274	13296	13318	13339	13361	
84	13383	13404	13426	13447	13469	13490	
85	13512	13533	13555	13576	13597	13619	21
86	13640	13661	13682	13704	13725	13746	
87	13767	13788	13809	13830	13851	13872	
88	13893	13914	13935	13956	13977	13997	
89	14018	14039	14060	14080	14101	14121	20

La corde de 90° vaut 14142 (n° 285).

Soit a la corde d'un angle, x la corde de son supplément, et r le rayon, on a : $x = \sqrt{4r^2 - a^2} = \sqrt{(2r+a)(2r-a)}$.

On peut, par cette formule, trouver les cordes de tous les angles supérieurs à 90° :

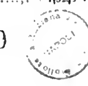
Exemple : .... a = corde 62° 47′ = 10417; $x = \sqrt{30417 \times 9583} = 17073$ = corde 117° 13′.

TABLE DES POIDS SPÉCIFIQUES
DES SUBSTANCES LES PLUS COMMUNES.

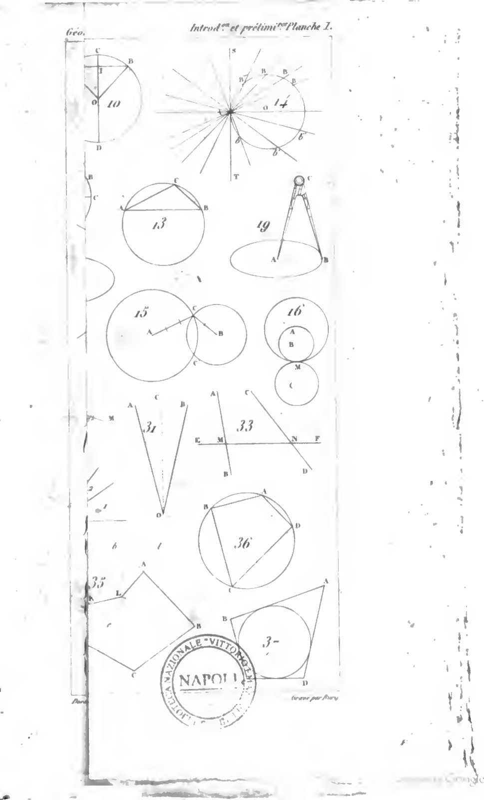
Eau distillée (au *maximum* de condensation)		1,000
Platine		20,722
Or		19,258
Mercure		13,586
Plomb		11,352
Argent		10,474
Bismuth		9,070
Cuivre		8,895
Laiton		8,395
Fer fondu	7,645 à	7,788
Fer forgé	7,875 à	8,778
Acier		7,767
Étain		7,264
Zinc		6,862
Spath d'Islande (carbonate de chaux cristallisé)		2,70
Craie	2,25 à	2,32
Marbre de Carrare		2,717
Pierre de Saint-Cloud		2,207
Pierre de Liais		2,077
Pierre d'Arcueil		2,061
Pierre de Saint-Leu		1,578
Porphyre		2,765
Granit d'Égypte		2,761
Pierre ponce		0,914
Gypse compacte (sulfate de chaux)	1,87 à	2,29
Spath fluor (fluate de chaux)	2,14 à	2,60
Spath pesant (sulfate de baryte)	4,3 à	4,4
Terre glaise	1,8 à	2,0
Grès	2,11 à	2,56
Silex	2,58 à	2,67
Cristal de roche		2,653
Verre vert	2,5 à	2,6
Verre blanc	2,4 à	2,5
Flint glass (cristal)	3,20 à	3,329
Salpêtre		1,900
Sel commun		1,918
Sel ammoniac		1,420
Diamant		3,521
Soufre		1,800
Cire	0,95 à	0,96
Bois de chêne (frais)		0,93
(sec)		1,67
Hêtre		0,85
Sapin		0,55
Liége		0,24
Glace		0,916
Eau de mer		0,026
Vin de Bourgogne		0,992
Alcool (absolu)		0,792
Huile d'olive		0,913

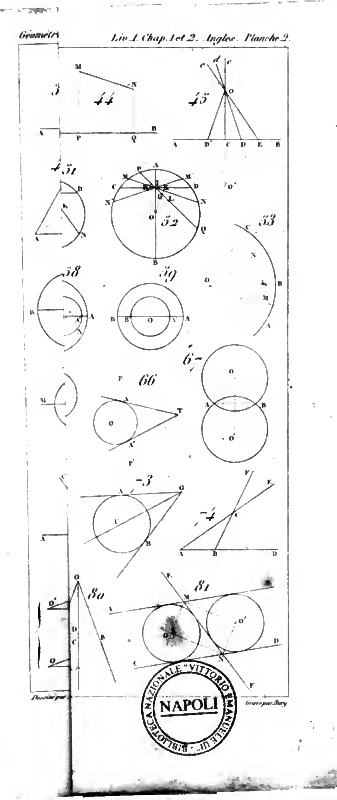
Air (à 0°, sous la pression 0m,76)	1,0000	0,001 2991
Oxygène	1,1026	0,001 4323
Azote	0,9757	0,001 2675
Hydrogène	0,0688	0,000 0894
Acide carbonique	1,5245	0,001 9805

SBN 607210



Digitized by Google

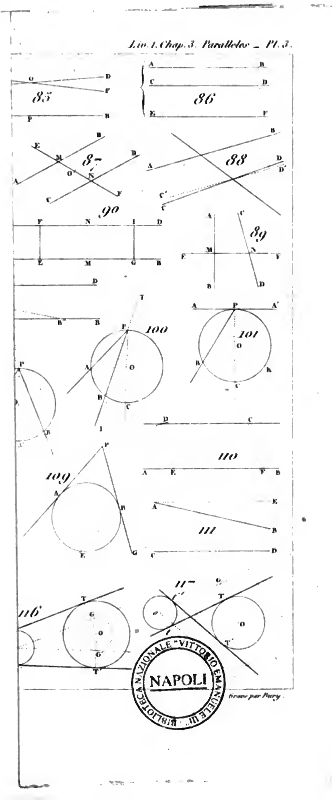

10
14
13
19
15
16
31
33
36
35
3-
NAPOLI



BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" NAPOLI
Digitized by Google



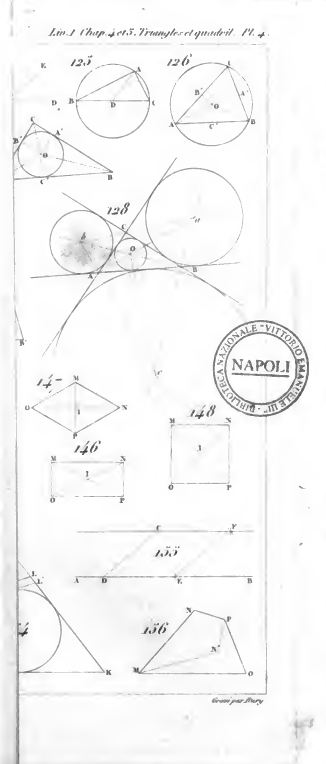
Google



BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" NAPOLI

Digitized by Google

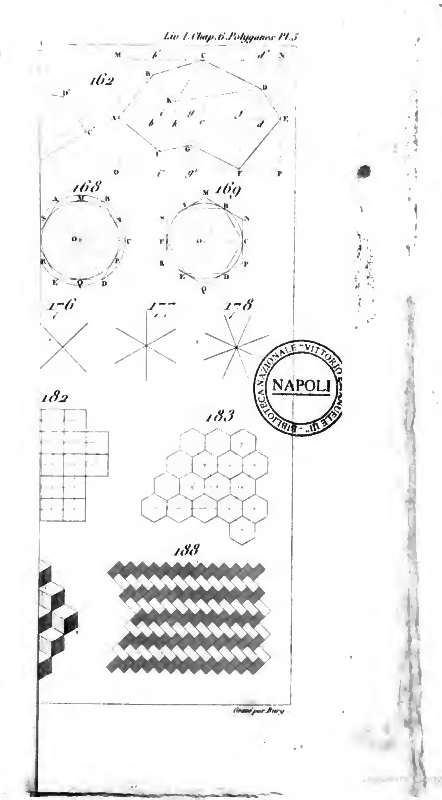
Digitized by Google



BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE III · NAPOLI

Digitized by Google

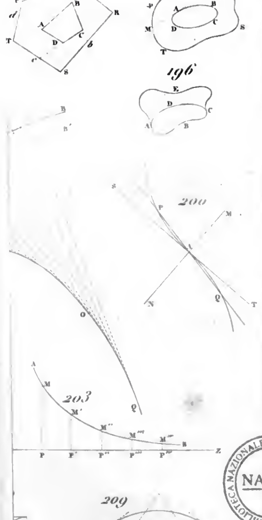
Digitized by Google



BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE III NAPOLI

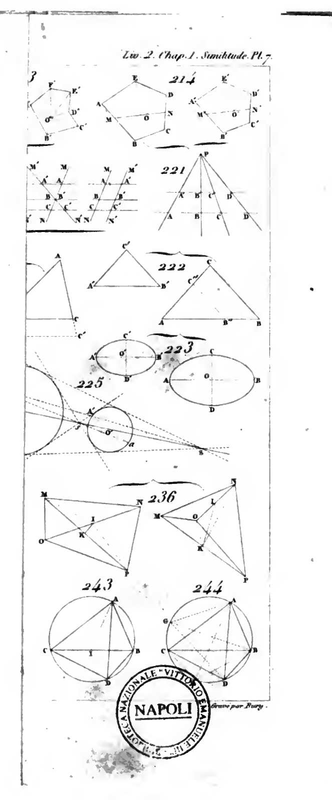
Digitized by Google

Digitized by Google

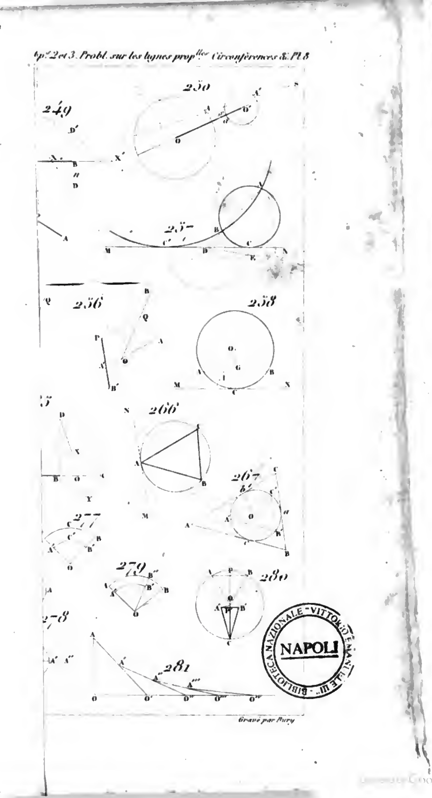



BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" NAPOLI

Digitized by Google

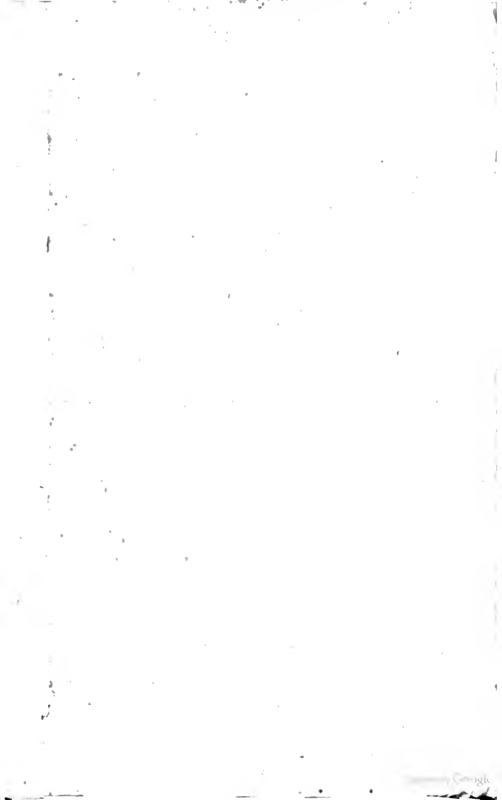


BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" NAPOLI

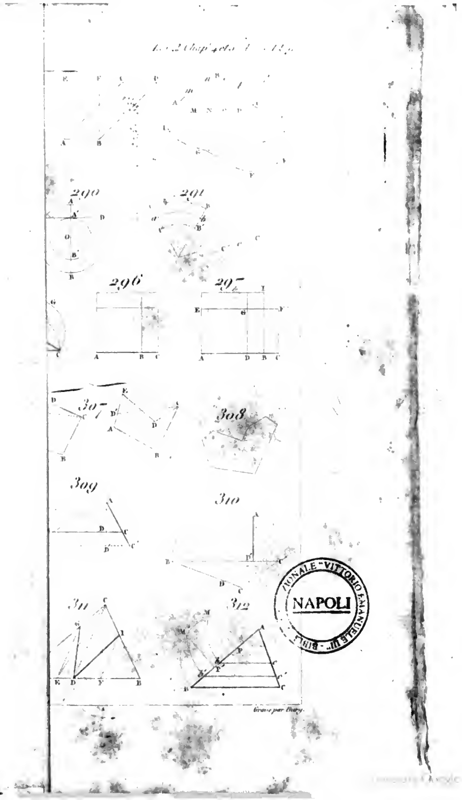


BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE III NAPOLI

Digitized by Google



Google



BIBL. NAZIONALE VITTORIO EMANUELE III · NAPOLI


Digitized by Google

4
2
3
1
6
8

319

323

328

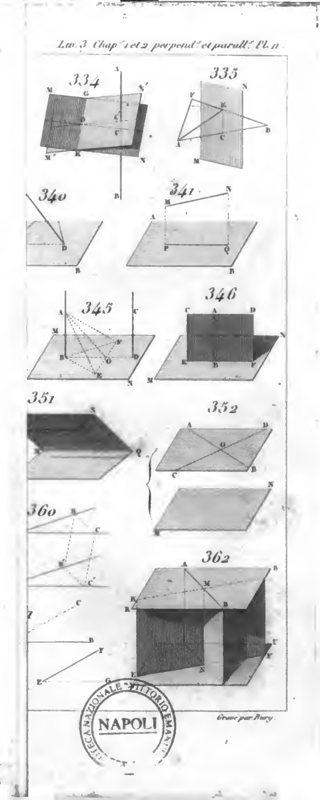
ϱ

329

BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" NAPOLI

Gravé par Bury.

Digitized by Google


Liv. 3 Chap. 1 et 2 perpend. et parall. Pl. 11
334
335
340
341
345
346
351
352
360
362
Gravé par Bury
NAPOLI
BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMAN.

368

367

372

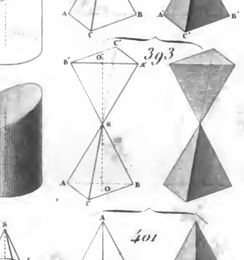
376

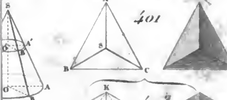
381

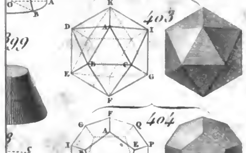
Gravé par Bury.

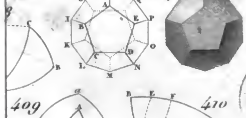
BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE III NAPOLI

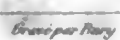
Digitized by Google











NAPOLI

Digitized by Google

41.

416

417

421

428

427

429

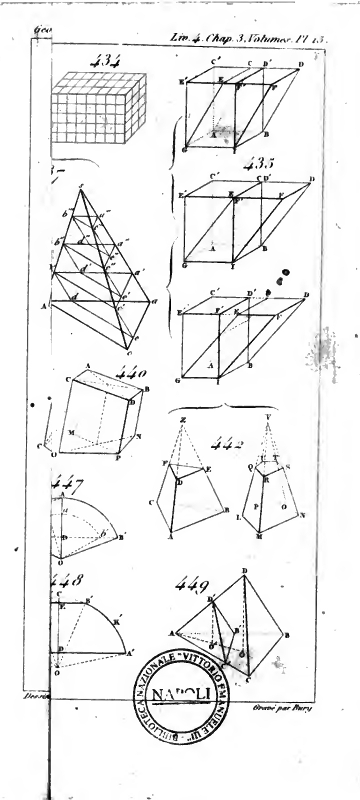
4

Dessiné par

Gravé par Bury

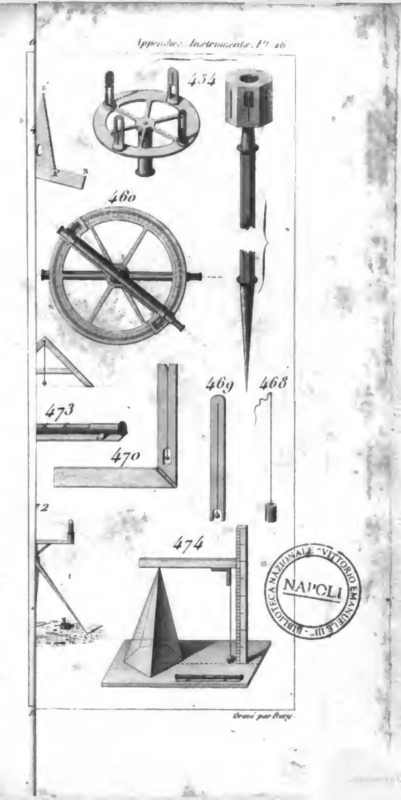
BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE II" NAPOLI

Digitized by Google



Dessiné
Gravé par Bury

BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" NAPOLI



BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE III NAPOLI

Digitized by Google

Digitized by Google



Google

Digitized by Google

